

Открытая физико-математическая олимпиада 2017

Физика 8 класс

Решения

1. Дорога к бабушке. Как-то мама, отправляя Красную шапочку к бабушке, дала ей карту дороги от их



дома до дома бабушки. На карте дорога представляла собой три равных по размеру участка, но мама предупредила, что один из них проходит по равнине, другой является подъемом, а третий идет под гору. Путь, который предстояло пройти девочке на каждом участке, указан на карте. Из дома Красная шапочка вышла в **12:00:00**, когда она дошла до уличных часов в конце второго участка, они показывали время **13:55:30**, к бабушке девочка пришла в **14:33:00**. Найдите скорость движения Красной шапочки на каждом участке, если известно, что при подъеме её скорость была в два раза меньше, чем при спуске, а по равнинной местности она шла быстрее, чем поднималась в гору. Ответ дайте в км/ч.

Дано:

$$t_1 = 12:00:00$$

$$t_2 = 13:55:30$$

$$t_3 = 14:33:00$$

$$S_1 = 4,5 \text{ км}$$

$$S_2 = 4 \text{ км}$$

$$S_3 = 5 \text{ км}$$

$$v_1, v_2, v_3 - ?$$

Решение:

Так как рисунок представляет собой карту, то все участки, представленные на ней, являются проекциями пройденных Красной шапочкой отрезков пути на горизонтальную плоскость. Следовательно, горизонтальному участку движения соответствует отрезок пути наименьший по протяженности, т.к. проекция всегда меньше и равна проецируемому отрезку. Таким образом, второй участок движения является горизонтальным. (1 балл)

Зная время начала и окончания движения на третьем участке, а также его длину, находим скорость на третьем участке:

$$v_3 = \frac{S_3}{t_3 - t_2} = \frac{5 \text{ км}}{0,675 \text{ ч}} = 8 \text{ км/ч. (2 балла)}$$

Известно, что скорость на подъёме в два раза меньше скорости при спуске. Так как средний участок является горизонтальным, то третий соответствует либо подъёму, либо спуску. Определим, чему соответствует третий участок движения.

Можно, исходя из соображений реальности происходящего, сказать, что идти Красная шапочка не может со скоростью 16 км/ч , следовательно, третий отрезок является спуском с горы.

Можно получить и точное доказательство. Предположим, что Красная шапочка 5 километров шла в гору со скоростью $v_3 = 8 \text{ км/ч}$, тогда на первом участке она должна была идти со скоростью 16 км/ч . Следовательно, время, которое девочка затратила бы на преодоление первого отрезка пути равно $t = (4,5 \text{ км}) / (16 \text{ км/ч}) = 0,28125 \text{ ч} = 16,875 \text{ мин}$. Тогда найдем скорость, с которой Красная шапочка должна была двигаться по горизонтали $S_2 / (t_2 - t_1 - t) = 2,43 \text{ км/ч}$. Однако, согласно условию, девочка горизонтальный участок проходила со скоростью большей скорости движения в гору, следовательно, третий участок является спуском. (2 балла)

Находим скорость на первом участке:

$$v_1 = \frac{v_3}{2} = 4 \text{ км/ч.}$$

Зная скорость движения на подъёме, найдем промежуток времени, в течение которого Красная шапочка поднималась в гору:

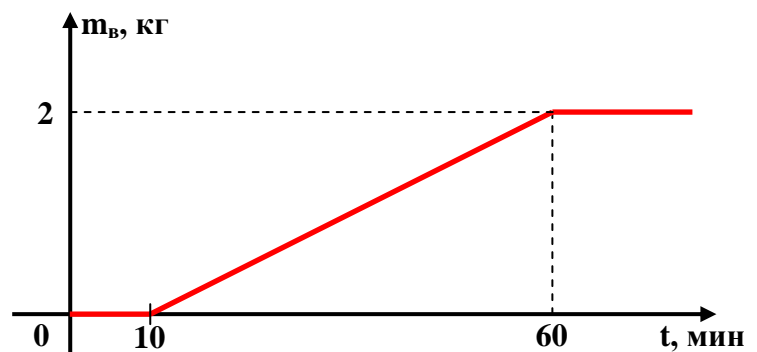
$$\Delta t_1 = \frac{S_1}{v_1} = 1,125 \text{ ч} = 67,5 \text{ мин. (1 балл)}$$

Найдем скорость движения по равнине:

$$v_2 = \frac{S_2}{t_2 - t_1 - \Delta t_1} = 5 \text{ км/ч. (1 балл)}$$

Ответ: $v_1 = 4 \text{ км/ч}; v_2 = 5 \text{ км/ч}; v_3 = 8 \text{ км/ч}.$

2. Из твердого в жидкое. К сосуду с некоторым количеством льда начали подводить тепло с постоянной мощностью. Зависимость массы воды в сосуде от времени представлена на рисунке. Найдите начальную температуру льда T_0 . Теплоемкостью сосуда и теплообменом с окружающей средой пренебречь. Удельная теплота плавления льда $\lambda = 3,36 \cdot 10^5 \text{ Дж/кг}$, удельная теплоемкость льда $c = 2100 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{°C)}$.



Дано:

$$\lambda = 3,36 \cdot 10^5 \text{ Дж/кг}$$

$$c = 2100 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{°C)}$$

$$m = 2 \text{ кг}$$

$$T = 0 \text{ °C}$$

$$\Delta t_1 = 10 \text{ мин}$$

$$\Delta t_2 = 50 \text{ мин}$$

$$T_0 - ?$$

Решение:

Проанализируем график. В течение первых *десяти минут* масса воды в сосуде не увеличивается, но тепло подводится. Следовательно в это время лед нагревается до температуры плавления, которая равна $T = 0 \text{ °C}$. Следующие *50 минут* масса воды равномерно увеличивается, то есть происходит процесс плавления льда. Через *60 минут* от начала масса воды в сосуде не изменяется. Значит, к этому моменту весь лед расплавился. **(1 балл)**

Запишем соответствующие уравнения, учитывая, что подводимая мощность P постоянна:

$$P\Delta t_1 = cm(T - T_0); \text{ (2 балла)}$$

$$P\Delta t_2 = \lambda m. \text{ (2 балла)}$$

Поделим первое уравнение на второе:

$$\frac{P\Delta t_1}{P\Delta t_2} = \frac{cm(T - T_0)}{\lambda m} \Rightarrow T_0 = T - \frac{\lambda\Delta t_1}{c\Delta t_2} = -32 \text{ °C}. \text{ (2 балла)}$$

Также можно было решать полученную систему уравнений поэтапно.

Сначала, используя массу льда, выражаем подводимую тепловую мощность из второго уравнения:

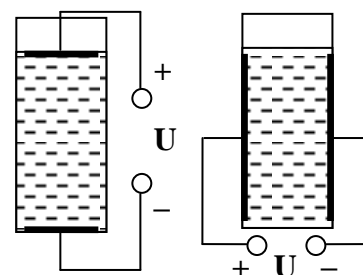
$$P = \frac{\lambda m}{\Delta t_2} = 224 \text{ Вт}. \text{ (1 балл)}$$

Подставляя полученную мощность в первое уравнение, получаем начальную температуру льда:

$$T_0 = T - \frac{P \Delta t_1}{cm} = -32^\circ\text{C}. \text{ (1 балл)}$$

Ответ: $T_0 = -32^\circ\text{C}$.

3. Жидкий проводник. Проводящую жидкость наливают в вертикальный сосуд квадратного сечения, на дне которого лежит электрод. Второй электрод сверху погружают в жидкость на глубину много меньшую высоты столба жидкости и подают на электроды напряжение U . Через $t_1 = 16$ минут жидкость нагрелась на ΔT . Затем электроды присоединяют к двум противоположным боковым граням сосуда и подают такое же напряжение U . За какое время t_2 жидкость нагреется на $2\Delta T$, если отношение высоты жидкости в сосуде к стороне основания равно $n = 2$? Удельное сопротивление проводника считать не зависящим от температуры, теплоемкостью сосуда и теплообменом с окружающей средой пренебречь.



Дано:

$$t_1 = 16 \text{ мин}$$

$$h/a = 2$$

$$\Delta T_2 / \Delta T_1 = 2$$

$$t_2 - ?$$

Решение:

Так как на проводник подают некоторое напряжение, по нему течет ток, вследствие чего проводник нагревается. Тепловую мощность, выделяемую в проводнике можно найти по формуле:

$$P = I^2 R,$$

где I – ток, текущий через проводник, R – сопротивление проводника.

Применяя закон Ома, также можно получить другую формулу:

$$P = \frac{U^2}{R}. \text{ (1 балл)}$$

Эта формула удобнее для решения данной задачи, так как позволяет задействовать величину, которая одинакова в обоих случаях подключения – напряжение U .

Сопротивление проводника меняется в зависимости от способа подключения электродов и может быть найдено по формуле:

$$R = \frac{\rho l}{S}, \text{ (1 балл)}$$

где ρ – удельное сопротивление, l – длина, S – площадь поперечного сечения проводника.

Пусть a – сторона основания сосуда, h – высота жидкости в сосуде. Тогда

можно выразить сопротивление проводника для двух случаев подключения:

$$R_1 = \frac{\rho h}{a^2}; R_2 = \frac{\rho a}{ah}. \text{ (1 балл)}$$

Найдем тепло выделившееся в проводнике для двух случаев:

$$Q_1 = \frac{U^2 a^2}{\rho h} t_1; Q_2 = \frac{U^2 ah}{\rho a} t_2. \text{ (1 балл)}$$

Все это тепло идет на нагревание жидкости:

$$Q_1 = cm\Delta T_1; Q_2 = cm\Delta T_2. \text{ (1 балл)}$$

Приравняем соответствующие количества теплоты:

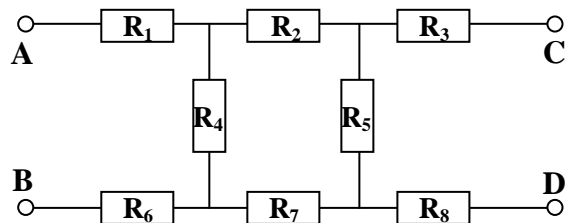
$$\frac{U^2 a^2}{\rho h} t_1 = cm\Delta T_1; \frac{U^2 ah}{\rho a} t_2 = cm\Delta T_2.$$

Поделим второе уравнение на первое:

$$\frac{U^2 a h t_2 \rho h}{\rho a U^2 a^2 t_1} = \frac{cm\Delta T_2}{cm\Delta T_1} \Rightarrow \frac{h^2 t_2}{a^2 t_1} = \frac{\Delta T_2}{\Delta T_1} \Rightarrow t_2 = \frac{a^2 \Delta T_2}{h^2 \Delta T_1} t_1 = 8 \text{ мин.} \text{ (2 балла)}$$

Ответ: $t_2 = 8$ минут.

4. Сгорел или не сгорел - вот в чем вопрос. Ученик нашел схему из восьми одинаковых резисторов, соединенных так, как показано на рисунке. Решив проверить, все ли резисторы исправны, он с помощью омметра сделал три измерения сопротивления схемы - между клеммами **AD**, **BC** и **AB**. Результаты получились следующими: $R_{AD} = R_{BC} = 5 \text{ Ом}$, $R_{AB} = 6,25 \text{ Ом}$. Проанализировав их, ученик сделал вывод, что какой-то резистор перегорел (т.е. его сопротивление можно считать бесконечно большим). Прав ли этот ученик? Если да, то какой резистор неисправен? Найдите сопротивление каждого резистора.



Дано:

$$R_{AD} = R_{BC} = 5 \text{ Ом}$$

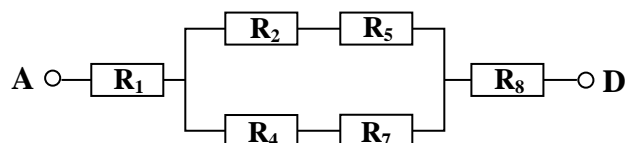
$$R_{AB} = 6,25 \text{ Ом}$$

$R - ?$

Решение:

Чтобы понять прав ученик или нет, достаточно выразить сопротивления R_{AD} , R_{BC} , R_{AB} и проанализировать их сопоставимость с полученными при помощи омметра значениями.

Рассмотрим подключение к клеммам А и D.

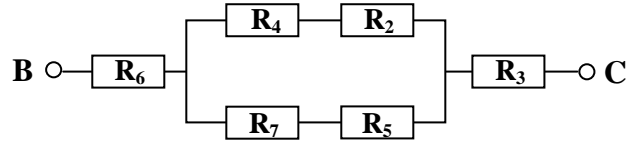


Ток в цепи будет протекать либо когда все резисторы исправны, либо в случае перегорания резисторов 2, 5 или 4, 7. Однако резисторы 1 и 8 должны быть исправны, иначе сопротивление цепи будет бесконечно большим. Выразим сопротивление такого соединения, считая $R_1 = R_2 = R_3$

$$= R_4 = R_5 = R_6 = R_7 = R_8 = R:$$

$$R_{AD} = R_1 + \frac{(R_2 + R_5)(R_4 + R_7)}{R_2 + R_5 + R_4 + R_7} + R_8 = 3R.$$

Аналогичные рассуждения можно провести для подключения омметра к клеммам В и С. Ток может не протекать через резисторы 2, 4 и 5, 7, но резисторы 3 и 6 должны быть исправными.

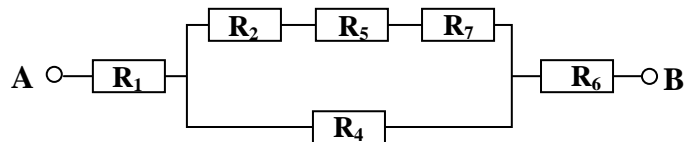


Найдем сопротивление R_{BC} :

$$R_{BC} = R_6 + \frac{(R_2 + R_4)(R_5 + R_7)}{R_2 + R_4 + R_5 + R_7} + R_3 = 3R. \text{ (1 балл)}$$

Пока что ничего не противоречит условию.

Рассмотрим подключение к клеммам А и В.

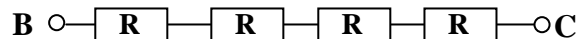
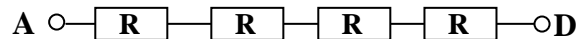


Найдем сопротивление R_{AB} :

$$R_{AB} = R_1 + \frac{R_4(R_2 + R_5 + R_7)}{R_2 + R_4 + R_5 + R_7} + R_6 = 2,75R. \text{ (1 балл)}$$

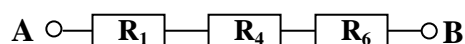
Получено противоречие, так как, согласно условию, сопротивление $R_{AB} > R_{AD}$. Можно сделать вывод, что какие-то резисторы перегорели. **(1 балл)**

Исходя из предыдущих размышлений, можно сделать вывод, что могли перегореть только 2, 4, 5 и 7 резисторы. Допустим, перегорел 2, 5 или 7 резистор. Выразим сопротивления R_{AD} , R_{BC} . Для всех трех случаев схемы соединений будут одинаковыми, так как резисторы имеют одинаковое сопротивление. Следовательно, сопротивления этих соединений будут равными между собой.



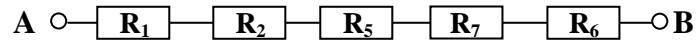
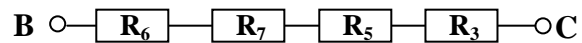
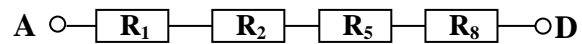
$$R_{AD} = R_{BC} = 4R. \text{ (1 балл)}$$

R_{AB} также будет одинаковым для всех трех случаев, так как перегорание хотя бы одного из перечисленных резисторов, ток не будет протекать ни через один из них.



$$R_{AB} = 3R. \text{ (1 балл)}$$

Вновь получили значения, противоречащие условию. Следовательно, перегореть мог только резистор R_4 . Выразим сопротивления R_{AD} , R_{BC} и R_{AB} для этого случая:



$$R_{AD} = R_{BC} = 4R; R_{AB} = 5R. \text{ (1 балл)}$$

Используя представленные в условии значения, найдем сопротивление R :

$$R = \frac{R_{AB}}{5} = \frac{R_{AD}}{4} = 1,25 \text{ Ом}. \text{ (1 балл)}$$

Ответ: Ученик прав, перегорел резистор R_4 ; $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = R_6 = R_7 = R_8 = R = 1,25 \text{ Ом}$.