

Открытая физико-математическая олимпиада 2017

Математика

7 класс

1. Петя посчитал сумму и произведение пяти чисел. Оказалось, что сумма равна 200, а произведение оканчивается на 2017. Не ошибся ли Петя?
2. В треугольнике PQR угол PQR равен 60° . На продолжениях стороны PR за точки P и R соответственно взяты точки E и F , причем $PE = PQ$ и $RF = RQ$. Найдите угол EQF .
3. На олимпиаде по математике каждый участник решил хотя бы одну из четырех предложенных задач. Одна треть всех участников плюс еще 20 участников решили по две задачи, одна пятая всех участников плюс еще 15 участников решили по три задачи, одна седьмая всех участников плюс еще 10 участников решили все задачи. Сколько участников решили по три задачи, если известно, что тех, кто решил только одну задачу меньше, чем тех, кто решил все задачи.
4. Иван начертил квадрат размером 4×4 клеток и поочередно закрашивает в нём по одной клетке. Закрасив очередную клетку, он записывает в ней число — количество закрашенных клеток, соседних с ней. Закрасив весь квадрат, Иван складывает числа, записанные во всех клетках. Докажите, что в каком бы порядке Иван ни красил клетки, у него в итоге получится одна и та же сумма. (Соседними считаются клетки, имеющие общую сторону.)

Решение каждой задачи оценивается целым числом от 0 до 7. Максимальное количество баллов равно 28.

1. Ответ: Петя ошибся.

Решение. Если бы все числа были бы нечетны, то их сумма была бы нечетна, а у нас сумма четная. Делаем вывод, что, по крайней мере, одно число четное, а тогда произведение чисел будет четным, и не может оканчиваться на 7.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 0 баллов. Указано, что произведение чётное без обоснования – 2 балла.

2. Ответ: 120° .

Решение. Треугольники EPQ и FRQ равнобедренные. Углы RPQ и PRQ являются внешними углами треугольников EPQ и FRQ . Обозначим $\angle RPQ = 2\alpha$, $\angle PRQ = 2\beta$. Тогда $\angle QEF = \alpha$, $\angle QFE = \beta$. Следовательно, $\angle EQF = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - 60^\circ) = 120^\circ$.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 0 баллов.

Указано, что сумма углов QEP , EQP , RQF и RFQ равна 120° без дальнейшего содержательного продвижения – 2 балла.

3. Ответ: 57 участников.

Решение: Количество участников делится на 3, 5 и 7, а следовательно, делится на 105. Обозначим количество участников через $105n$.

Тогда $35n + 20$ участников решили по две задачи, $21n + 15$ участников решили по три задачи, $15n + 10$ участников решили все задачи. Тогда количество участников, которые решили одну задачу, равно $105n - (35n + 20) - (21n + 15) - (15n + 10) = 34n - 45$. Так как $34n - 45 \geq 0$, $n \geq 2$. С другой стороны, если участников, решивших по одной задаче, меньше тех, кто решил все задачи, то $34n - 45 < 15n + 10$, откуда $19n < 55$, а значит, $n < 3$. Откуда следует, что $n = 2$. Поэтому $21 \cdot 2 + 15 = 57$ участников решили по три задачи.

Комментарий. Указано, что общее количество участников делится на 105 – 1 балл. Получен верный ответ путем неполного перебора возможных значений общего количества участников (105, 210) – 4-5 баллов.

4. Решение. Рассмотрим все единичные отрезки, которые являются общими сторонами для двух клеток. Таких отрезков ровно двадцать четыре – 12 вертикальных и 12 горизонтальных. Если отрезок разграничивает две закрашенные клетки, то будем говорить, что он "окрашен". Заметим, что когда Иван пишет какое-то число в клетке, он указывает количество отрезков, которые не были окрашены до закрашивания этой клетки, а теперь стали окрашенными. Когда Иван приступает к суммированию, окрашены все 24 отрезка, то есть сумма чисел, которые записывает Иван, всегда будет равна 24.

Отметим, что описывать «материализацию» указанной суммы можно по-разному, например, вместо окрашенного отрезка можно говорить о парах соседних закрашенных клеток и т. п. Отметим также, что у этой задачи безусловно существует переборное решение, но изложить его в работе физически невозможно.

Комментарий. Указано, но не обосновано, что Иван всегда получит число 24 — 0 баллов. Получено число 24 путем неполного перебора – 1 балл.