

**В.П. Чуваков**

## **Шары и многогранники**

### **Введение**

Задачи по стереометрии на комбинацию сфер (шаров) с другими геометрическими объектами традиционно являются одними из самых сложных и интересных одновременно. Разнообразие вариантов взаимного расположения, трудности геометрического представления и изображения делают эту тему популярной на вступительных экзаменах в ведущие вузы России и ЕГЭ.

При решении таких задач важно провести методически грамотный анализ конфигурации, правильно понять условия взаимного расположения сферы (шара) и геометрических объектов, иметь хорошее геометрическое воображение. Как правило, только в этом случае удастся сложную пространственную задачу разложить на элементы и решить.

В первых четырех параграфах данного учебного пособия проводится анализ различных вариантов взаимодействия сферы (шара) с другими геометрическими объектами и рассматриваются основные модели (конструкции) базовых конфигураций.

В приложении (§ 5) на различных по сложности примерах показано, как с помощью рассмотренных в пособии анализа и базовых конструкций можно моделировать различные комбинации сфер (шаров) с другими геометрическими объектами.

В конце пособия приведен список задач для самостоятельной работы.

Предлагаемое учебно-методическое пособие способствует выработке методических навыков правильного анализа стереометрических задач, развивает геометрическое воображение, помогает конструировать различные комбинации сферы с другими геометрическими объектами.

Пособие предназначено для углубленного изучения курса стереометрии, подготовки к выпускным экзаменам, ЕГЭ, вступительным экзаменам в вузы.

### **1. Основные определения и свойства**

**Определение 1.** Плоскость касается шара (сферы), если она имеет с шаром (сферой) единственную общую точку.

**Определение 2.** Шар называется вписанным в многогранник, если он касается всех граней многогранника.

*Замечание 1.* Центр шара, вписанного в пирамиду, лежит внутри пирамиды. Расстояние от центра шара до каждой из граней пирамиды равно радиусу шара.

*Замечание 2.* Объем пирамиды  $V = \frac{1}{3} S_{\text{пов}} \cdot R$ ,

где  $S_{\text{пов}}$  – площадь полной поверхности пирамиды,  $R$  – радиус вписанного шара.

**Определение 3.** Биссекторной плоскостью двугранного угла с ребром  $l$  называется плоскость, проходящая через прямую  $l$  и биссектрису линейного угла.

*Замечание 3.* Биссекторная плоскость – множество точек пространства, равноудаленных от граней двугранного угла.

**Определение 4.** Плоскость, проходящая через середину отрезка  $AB$ , перпендикулярно этому отрезку, называется серединной перпендикулярной плоскостью отрезка  $AB$ .

*Замечание 4.* Геометрическое место точек в пространстве, равноудаленных от концов отрезка, является серединной перпендикулярной плоскостью этого отрезка.

*Замечание 5.* Если точки  $A$  и  $B$  лежат на сфере, то центр сферы лежит на серединной перпендикулярной плоскости отрезка  $AB$ .

**Определение 5.** Сфера называется описанной около многогранника, если все вершины многогранника лежат на сфере.

*Замечание 6.* Если около многогранника можно описать сферу, то ее центр лежит на пересечении серединных перпендикулярных плоскостей всех ребер многогранника.

*Замечание 7.* Если все боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под одним углом, то вершина пирамиды проектируется в центр окружности, описанной около основания.

*Замечание 8.* Если все грани пирамиды наклонены к плоскости основания под одним углом, то вершина пирамиды проектируется в центр окружности, вписанной в основание.

*Замечание 9.* Отрезки касательных, проведенных к данной сфере из одной точки, равны.

**Признак касания сферы и плоскости.**

Плоскость касается сферы тогда и только тогда, когда плоскость проходит через точку на сфере и перпендикулярна радиусу, проведенному в эту точку.

**§ 1. Описанные сферы**

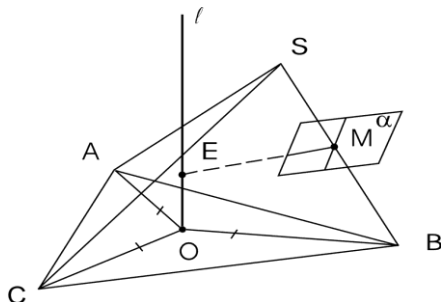
**Теорема 1.** (О существовании описанной сферы)

В произвольной треугольной пирамиде серединные перпендикулярные плоскости всех ребер имеют единственную общую точку, равноудаленную от всех вершин пирамиды. Общая точка является центром сферы, описанной около треугольной пирамиды.

*Доказательство.* Пусть  $SABC$  – треугольная пирамида с основанием  $ABC$ ,  $O$  – центр окружности, описанной около треугольника  $ABC$ .

Проведем через точку  $O$  прямую  $l$ , перпендикулярно плоскости  $ABC$ .

Произвольная точка, лежащая на этой прямой, равноудалена от точек  $A, B, C$ .



Пусть  $SB$  – боковое ребро пирамиды,  $M$  – середина ребра  $SB$ ,  $\alpha$  – серединная перпендикулярная плоскость ребра  $SB$ .

Докажем, что плоскость  $\alpha$  пересекает прямую  $l$ .

Если  $\alpha \parallel l$ , то в плоскости  $\alpha$  через точку  $M$  можно провести прямую  $l_1 \parallel l$ ,  $l_1 \perp SB$ ,  $l_1 \parallel l \Rightarrow l \perp SB$ .

Далее,  $l \perp SB$ ,  $l \perp ABC \Rightarrow SB \parallel ABC$ . Противоречие.

Если  $l \in \alpha$ , то любая точка прямой  $l$  равноудалена от точек  $S, B$ . Это невозможно, так как  $l$  проходит через точку  $O$ , равноудалена от точек  $A, B, C$  и перпендикулярна плоскости  $ABC$ .

Таким образом, прямая и плоскость пересекаются в точке  $E$ , которая равноудалена от точек  $S, A, B, C$  и, следовательно, является центром сферы, описанной около треугольной пирамиды  $SABC$ . Теорема доказана.

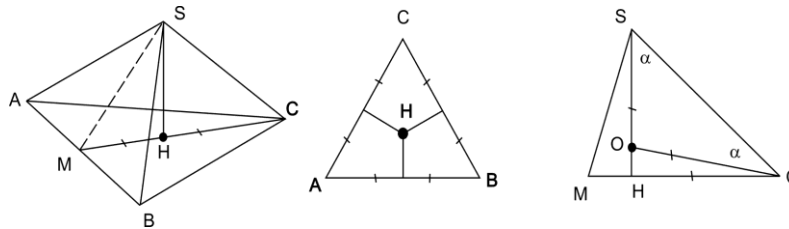
**Утверждение 2.** Пусть  $SA_1 \dots A_n$  – произвольная пирамида с вершиной  $S$  и основанием  $A_1 \dots A_n$ . Вокруг пирамиды можно описать шар тогда и только тогда, когда вокруг многоугольника  $A_1 \dots A_n$  можно описать окружность.

*Доказательство.* Если около пирамиды можно описать шар, то в сечении шара плоскостью основания получится многоугольник, вписанный в окружность. Обратно, пусть точка  $O$  – центр окружности радиуса  $R$ , описанной около основания. Проведем перпендикуляр к плоскости основания через точку  $O$ . Тогда точка пересечения этого перпендикуляра и серединной перпендикулярной плоскости ребра  $SA_m$  равноудалена от всех вершин пирамиды.

*Замечание 2.1.* Центр сферы, описанной около произвольной пирамиды, лежит на перпендикуляре к основанию пирамиды, проведенном через центр описанной около основания окружности.

**Утверждение 3.** Центр сферы, описанной около правильной треугольной пирамиды, лежит на высоте пирамиды.

*Доказательство.* Пусть  $SABC$  – правильная треугольная пирамида,  $SA = SB = SC$ ,  $AB = AC = BC$ ,  $M$  – середина ребра  $AB$ .



Так как пирамида правильная, то плоскость  $CSM$  является серединной перпендикулярной плоскостью ребра  $AB$  и проходит через высоту  $SH$ . Следовательно, высота пирамиды принадлежит серединным перпендикулярным плоскостям всех ребер основания.

Рассмотрим плоскость  $CSM$ . Если  $\angle HSC = \alpha$ , то  $\angle HOC = 2\alpha$ ,  $\angle OSC = \alpha$ .

Тогда  $OS = R = OC$ ,  $OH = R \cdot \cos(\angle HOC)$  и для вычисления радиуса можно использовать соотношение  $SH = R + R \cos 2\alpha$

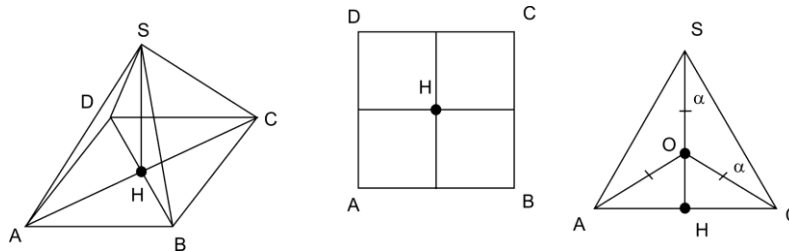
**Следствие 3.1.** Радиус сферы, описанной около правильного тетраэдра с ребром  $a$ , равен  $\frac{a\sqrt{6}}{4}$ .

$$\text{Действительно, } SM = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad MH = \frac{a\sqrt{3}}{6}, \quad HC = \frac{a\sqrt{3}}{3}, \quad SH = \frac{a\sqrt{6}}{3},$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}, \quad \cos 2\alpha = \frac{1}{3}, \quad R = \frac{SH}{1 + \cos 2\alpha} = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

**Утверждение 4.** Центр сферы, описанной около правильной четырехугольной пирамиды, лежит на высоте пирамиды.

*Доказательство.* Пусть  $SABCD$  – правильная четырехугольная пирамида,  $SA = SB = SC = SD$ ,  $AB = AD = BC = CD$ . Так как высота пирамиды принадлежит серединным перпендикулярным плоскостям всех ребер основания, то центр сферы лежит на высоте.



Рассмотрим плоскость  $ASC$ . Если  $\angle HSC = \alpha$ , то  $\angle OSC = \alpha$ ,  $\angle HOC = 2\alpha$ . Тогда  $OS = OA = OC = R$ ,  $OH = R \cdot \cos(\angle HOC)$  и для вычисления радиуса можно использовать соотношение  $SH = R + OH = R + R \cos 2\alpha$

**Утверждение 5.** (Необходимое и достаточное условие существования сферы, описанной около призмы)

Около призмы можно описать сферу тогда и только тогда, когда призма прямая и около ее основания можно описать окружность.

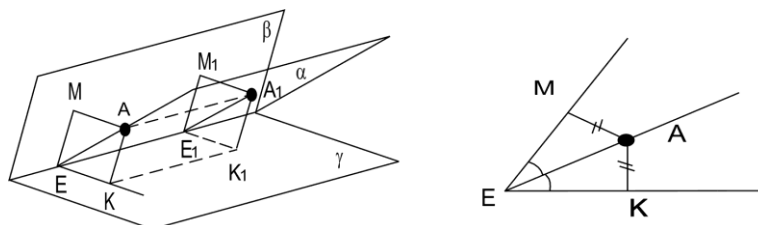
*Доказательство.* Пусть около призмы описана сфера. Тогда в сечении сферы плоскостью основания получится окружность, описанная около основания, а в сечении сферы боковыми гранями – параллелограммы, вписанные в окружности. Если параллелограмм вписан в окружность, то он является прямоугольником и, следовательно, все боковые ребра призмы перпендикулярны основанию.

Обратно. Пусть  $P, P_1$  – центры окружностей, описанных около оснований прямой призмы. Тогда отрезок  $PP_1$  перпендикулярен основанию, а середина отрезка точка  $O$  равноудалена от всех вершин призмы и является центром описанного шара.

### § 3. Вписанные сферы

**Утверждение 6.** Если сфера касается двух пересекающихся плоскостей, то ее центр лежит на биссекторной плоскости двугранного угла, образованного этими плоскостями.

*Доказательство.* Пусть  $\beta, \gamma$  – заданные плоскости,  $\beta \cap \gamma = l$ ,  $\angle MEK = 2\varphi$  – линейный угол двугранного угла,  $\alpha$  – биссекторная плоскость. Если  $AM \perp \beta$ ,  $AK \perp \gamma$ ,  $AM = AK = R$ , то центр сферы  $A$  равноудален от сторон линейного угла, лежит на биссектрисе линейного угла и, следовательно, лежит на биссекторной плоскости.

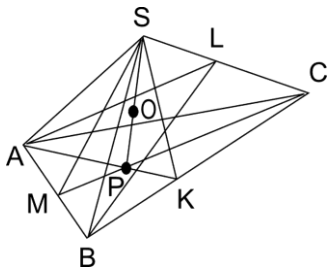


Расстояние от центра сферы до прямой  $l$  равно  $EA = \frac{R}{\sin \frac{\varphi}{2}}$ ,  $KE = R \cdot \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}$ .

**Утверждение 7.** Если сфера вписана в многогранник, то ее центр лежит на пересечении всех биссекторных плоскостей многогранника.

**Утверждение 8.** (О существовании вписанной сферы) В произвольную треугольную пирамиду можно вписать сферу.

*Доказательство.* Пусть  $SABC$  – треугольная пирамида,  $AKS$ ,  $CMS$  – биссекторные плоскости двугранных углов с ребрами  $BC$  и  $AB$ ,  $SP$  – прямая их пересечения. По свойству биссекторных плоскостей, всякая точка прямой  $SP$  равноудалена от боковых граней пирамиды.

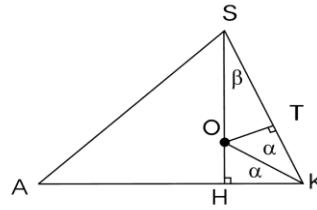
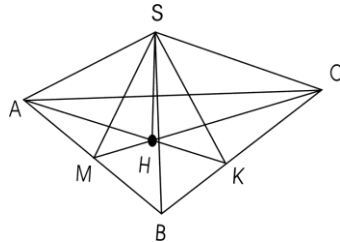


Биссекторная плоскость двугранного угла, образованного основанием и боковой гранью  $ASB$  пересекает прямую  $SP$  в точке  $O$ , равноудаленной уже от всех граней пирамиды.

Точка  $O$  является центром сферы, вписанной в треугольную пирамиду  $SABC$ .

**Утверждение 9.** Центр сферы, вписанной в правильную треугольную пирамиду, лежит на высоте пирамиды.

*Доказательство.* Пусть  $M$ ,  $K$  – середины ребер  $AB$ ,  $BC$ . Тогда плоскости  $ASK$ ,  $CSM$  являются биссекторными плоскостями для двугранных углов, пересекающихся по ребрам  $AS$ ,  $CS$ , и высота  $SH$  является пересечением этих плоскостей.



Так как в треугольнике  $ASK$   $OH = OT = R$  и  $OK$  – биссектриса угла  $ASK$ , то  $OH = HK \cdot \operatorname{tg} \alpha$ ,  $SH = R + OS = R + \frac{R}{\sin \beta}$ .

Следовательно, радиус вписанного шара можно найти из соотношения

$$R = HK \cdot \operatorname{tg} \alpha, \quad SH = R + OS = R + \frac{R}{\sin \beta}.$$

*Замечание 3.1.* Для нахождения радиуса вписанной окружности можно воспользоваться также свойством биссектрисы

$$SO : OH = SK : HK, \quad OH = R, \quad SO + R = SH.$$

*Замечание 3.2.* В правильной треугольной пирамиде вычислить углы  $\alpha$ ,  $\beta$  или высоту достаточно просто.

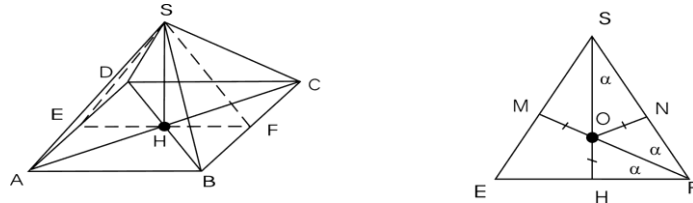
**Следствие 4.2.** Радиус шара, вписанного в правильный тетраэдр с ребром  $a$ , равен  $\frac{a \sqrt{6}}{12}$ .

Действительно,  $SK = \frac{a \sqrt{3}}{2}$ ,  $HK = \frac{a \sqrt{3}}{6}$ ,  $SH = \frac{a \sqrt{6}}{3}$ . По свойству биссектрисы  $KO$ :

$$\frac{SO}{OH} = \frac{SK}{HK} = \frac{1}{3} \Rightarrow R = \frac{1}{4} SH = \frac{a \sqrt{6}}{12}.$$

**Утверждение 10.** Центр сферы, вписанной в правильную четырехугольную пирамиду, лежит на высоте пирамиды.

*Доказательство.* Плоскости  $ASC$ ,  $DSB$  являются биссекторными плоскостями для двугранных углов, пересекающихся по ребрам  $AS$ ,  $DS$ , а высота  $SH$  является прямой пересечения этих плоскостей. Если  $E$ ,  $F$  – середины ребер  $AD$ ,  $BC$ , то плоскость  $ESF$  проходит через центр шара, а шар касается граней  $ASD$ ,  $BSC$  по прямым  $ES$ ,  $FS$ . Тогда,  $OM = ON = OH = R$  и  $O$  – центр окружности, вписанной в треугольник  $ESF$ .



Следовательно, радиус вписанного шара можно найти из соотношения

$$R = HF \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

*Замечание 3.3.* Радиус окружности, вписанной в треугольник  $ESF$ , можно также найти из формулы площади треугольника  $S_{ESF} = \frac{p}{2} \cdot R$ , где  $p$  – периметр треугольника.

*Замечание 3.4.* Для нахождения радиуса можно также воспользоваться свойством биссектрисы  $FO$ :  $SO:R = SF:HF$ ,  $R + SO = SH$ .

*Замечание 3.5.* Треугольник  $ESF$  является равнобедренным, поэтому вычислить величину угла  $\alpha$ , периметр или площадь треугольник  $ESF$  достаточно просто.

**Утверждение 11.** Если все боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под одним углом, то точка пересечения высоты пирамиды с биссектрисой угла, образованного апофемой и ее проекцией на плоскость основания, является центром вписанного шара.

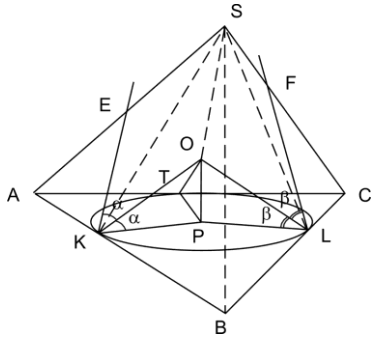
*Доказательство.* Легко доказать, что указанная точка равноудалена от всех граней пирамиды.

**Утверждение 12.** Если шар, вписанный в треугольную пирамиду, касается плоскости основания в центре вписанной в основание окружности, то все двугранные углы между боковыми гранями и основанием равны и центр шара лежит на высоте пирамиды.

*Доказательство.* Рассмотрим треугольную пирамиду  $SABC$  с вершиной  $S$  и основанием  $ABC$ . Пусть шар радиуса  $R$  с центром в точке  $O$  касается плоскости основания в точке  $P$ , а окружность радиуса  $m$  с центром в точке  $P$  касается ребер  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$  в точках  $K$ ,  $L$ ,  $T$ :  $PK = PL = PT = m$ .

В плоскости  $ASB$  проведем отрезок  $KE$  перпендикулярно  $AB$ , а в плоскости  $BSC$  – отрезок  $LF$  перпендикулярно  $BC$ . Тогда углы  $EKO$ ,  $FLO$  являются линейными углами соответствующих двугранных углов, а  $OK$ ,  $OL$  – биссектрисы этих углов.

Так как  $tg \alpha = \frac{OP}{KP} = \frac{R}{m} = \frac{OP}{PL} = tg \beta$ , то двугранные углы равны  $\angle EKP = 2\alpha = 2\beta = \angle FLP$

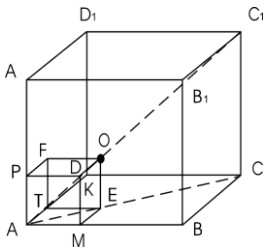


Далее, если все грани пирамиды наклонены к плоскости основания под одним углом, то вершина пирамиды проектируется в точку  $P$  – центр окружности, вписанной в основание.

Из условий  $SP \perp \Delta ABC$ ,  $OP \perp \Delta ABC$  следует, что точка  $O$  лежит на высоте пирамиды  $SP$ .

**Замечание 3.6.** Из доказанного утверждения следует, что, в действительности, точки  $E$  и  $F$  совпадают с точкой  $S$ .

**Утверждение 13.** Пусть сфера радиуса  $R$  касается граней трехгранного угла  $A$  куба  $AB_1C_1D_1$ . Тогда центр сферы лежит на диагонали куба и является вершиной куба с ребром  $R$ , встроеного в трехгранный угол  $A$ .



**Доказательство.** Действительно, радиусы  $OF$ ,  $OE$ ,  $OK$ , проведенные из центра  $O$  в точки касания, перпендикулярны граням куба.

Тогда  $AMETPKOF$  – куб с ребром  $R$  и вершина куба лежит на диагонали  $AO$  а, следовательно, на диагонали  $AC_1$ .

**Утверждение 14.** В прямую призму можно вписать сферу тогда и только тогда, когда в основание призмы можно вписать окружность, диаметр которой равен высоте призмы.

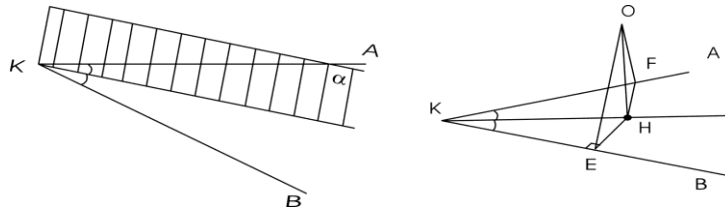
**Необходимость.** Пусть в призму можно вписать сферу. Так как радиус, проведенный в точку касания сферы и плоскости перпендикулярен плоскости, то высота призмы равна диаметру сферы. Далее, проведем плоскость через центр вписанной сферы параллельно основанию. Призма прямая, следовательно, в сечении призмы этой плоскостью получится многоугольник, равный основанию, с вписанной в него окружностью нужного радиуса.

**Достаточность.** Так как призма прямая, а в основание ее можно вписать окружность, радиус  $R$  которой равен половине высоты призмы, то отрезок длины  $2R$  соединяющий центры окружностей, перпендикулярен основанию. Тогда сфера радиуса  $R$  с центром на середине этого отрезка касается всех боковых граней призмы и оснований.

#### § 4. Сфера касается двух лучей, выходящих из одной точки

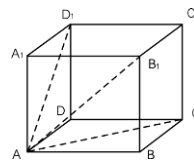
**Утверждение 15.** Пусть сфера касается двух лучей  $KA$ ,  $KB$ , выходящих из точки  $K$ . Тогда центр сферы лежит на плоскости  $\alpha$ , проходящей через биссектрису угла  $AKB$  перпендикулярно плоскости этого угла.

**Доказательство.** Пусть  $O$  – центр сферы,  $E$ ,  $F$  – точки касания шара и лучей. Из условия касания следует, что  $OE \perp KB$ ,  $OF \perp KA$ ,  $OE = OF = R$ . Опустим перпендикуляр  $OH$  на плоскость угла  $AKB$ . По теореме о трех перпендикулярах  $HE \perp KB$ ,  $HF \perp KA$ .



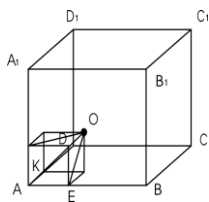
Прямоугольные треугольники равны и, следовательно,  $HE = HF$ . Таким образом, точка  $H$  равноудалена от сторон угла, а точка  $O$  лежит на плоскости, проходящей через биссектрису угла  $AKB$  перпендикулярно плоскости этого угла.

*Замечание 4.1.* Рассмотрим куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Тогда  $AD_1 \perp D_1 C_1$ ,  $AC \perp C C_1$ ,  $AB_1 \perp B_1 C_1$ .



**Утверждение 16.** Пусть шар радиуса  $R$  касается ребер трехгранного угла  $A$  куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Тогда центр шара лежит на диагонали  $AC_1$  куба и является вершиной куба с ребром  $\frac{R}{\sqrt{2}}$ , встроеного в трехгранный угол  $A$ .

*Доказательство.* Пусть  $O$  – центр шара. Тогда  $AD_1 \perp D_1 C_1$ ,  $AC \perp C C_1$ ,  $AB_1 \perp B_1 C_1$ ,  $OF = OE = OK = R$ .



Построим новый куб, диагоналями граней которого являются  $OF$ ,  $OE$ ,  $OK$ . Ребро построенного куба равно  $\frac{R}{\sqrt{2}}$ , а точки  $A$ ,  $O$ ,  $C_1$  лежат на диагонали куба  $AC_1$ .

## § 5. Приложение

Рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих различные случаи взаимного расположения шара (сферы) с другими геометрическими объектами.

Решение каждого примера будем начинать с нахождения (построения) точки центра шара (сферы) на основе анализа условий и применения доказанных выше утверждений.

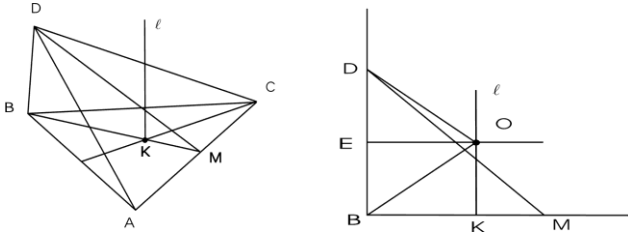
Полученную на первом этапе информацию будем использовать для вычисления требуемых линейных величин.

**Пример 1.** В основании пирамиды лежит равносторонний треугольник со стороной 3, одно из боковых ребер перпендикулярно основанию и равно 2. Найдите радиус описанного шара.

**Построение.** Точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  лежат на сфере, следовательно, центр сферы  $O$  лежит на перпендикуляре  $l$ , проведенном через центр треугольника  $ABC$  перпендикулярно плоскости этого треугольника.

Точки  $B$ ,  $D$  лежат на сфере. Следовательно, центр сферы – это точка пересечения серединной перпендикулярной плоскости отрезка  $BD$  и прямой  $l$ .



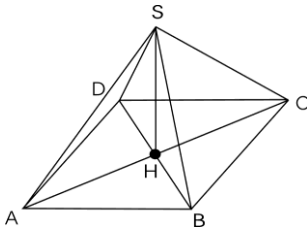


**Вычисления.** Рассмотрим сечение  $BDM$ ,  $DE = EB$ . Тогда  $OD = OB = R$ ,

$$BM = \frac{3\sqrt{3}}{2}, BK = \frac{2}{3} BM = \sqrt{3}, BE = ED = 1, BO = \sqrt{3+1} = 2. \text{ Ответ: } R = 2.$$

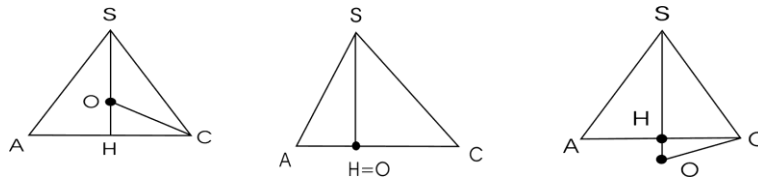
**Пример 2.** Основанием пирамиды служит прямоугольник с углом  $\alpha$  между диагоналями, а все боковые ребра образуют с плоскостью основания угол  $\varphi$ . Найдите расстояние от центра описанного шара до основания, если радиус шара равен  $R$ .

**Построение.** Так как все боковые ребра наклонены к плоскости основания под одним углом, то основание высоты попадает в точку пересечения диагоналей прямоугольника,  $SA = SB = SC = SD$  и любая точка высоты равноудалена от точек  $A, B, C, D$ . Таким образом, центр шара  $O$  лежит на высоте.



**Вычисления.** Рассмотрим сечение  $ACS$ . Вычислим угол  $HCO$ .  $OS = OC = R$ ,  $OH = R \cdot \cos(\angle HOC)$ ,  $\angle HCS = \varphi$ ,  $\angle HSC = 90^\circ - \varphi$ ,  $\angle HOC = 180^\circ - 2\varphi$ .

$$\text{Следовательно, } OH = R \cos(180^\circ - 2\varphi) = -R \cos 2\varphi.$$

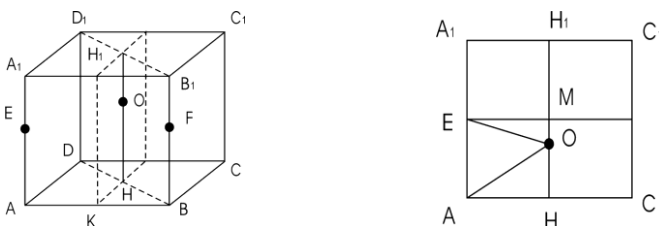


**Замечание.**

- Если  $\varphi > 45^\circ$ , то  $\cos 2\varphi < 0 \Rightarrow$  точка  $O$  лежит выше  $AC$ ;
- если  $\varphi = 45^\circ$ , то  $\cos 2\varphi = 0 \Rightarrow$  точка  $O$  лежит на  $AC$ ;
- если  $\varphi < 45^\circ$ , то  $\cos 2\varphi > 0 \Rightarrow$  точка  $O$  лежит ниже  $AC$ .

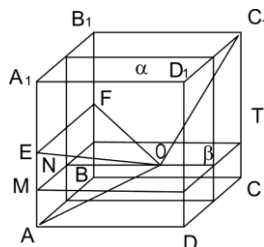
**Пример 3.** Ребро куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  равно  $a$ . Найдите радиус сферы, проходящей через середины ребер  $AA_1$ ,  $BB_1$  и вершины  $A, C$ .

**Построение.** Пусть  $E, F, K$  – середины ребер  $AA_1, BB_1, AB$ . Сфера проходит через точки  $E, F \Rightarrow$  центр сферы лежит на серединной перпендикулярной плоскости, проходящей через точку  $K$ . Сфера проходит через точки  $A, C \Rightarrow$  центр сферы лежит на серединной перпендикулярной плоскости  $DBB_1 D_1$ . Следовательно, центр сферы лежит на пересечении плоскостей  $\alpha$  и  $DBB_1 D_1$ .



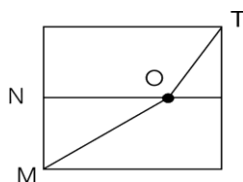
**Вычисления.** Рассмотрим сечение  $ACC_1A_1$ :  $OE = OA = R$ ,  $AH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ ,  $EO^2 = EM^2 + MO^2$ ,  
 $AO^2 = AH^2 + OH^2$ . Так как  $EM = AH$ ,  $EO = AO$ , то  $OM = OH = \frac{a}{4}$ . Тогда  $R^2 = \frac{a^2}{16} + \frac{a^2}{4}$ .

**Пример 4.**  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  – куб с ребром  $a$ . Найдите радиус сферы, проходящей через середины ребер  $AA_1$ ,  $BB_1$  и вершины  $A$  и  $C_1$ .



**Построение.** Пусть  $\alpha$  – срединная перпендикулярная плоскость отрезка  $AB$ ,  $E, F$  – середины ребер  $AA_1, BB_1$ . Как и в предыдущей задаче центр сферы лежит на плоскости  $\alpha$ . Точки  $E, A$  лежат на сфере, следовательно, центр сферы лежит на срединной перпендикулярной плоскости  $\beta$  проходящей через середину  $AE$  – точку  $M$ . Таким образом, центр сферы лежит на пересечении плоскостей  $\alpha$  и  $\beta$  – прямой  $NO$ .

**Вычисления.**  $OE = OA = OC_1 = R$ ,  $ME = \frac{a}{4}$ ,  $C_1T = \frac{3a}{4}$ . Рассмотрим сечение куба плоскостью  $\beta$ . Пусть  $OH = x$ . Тогда



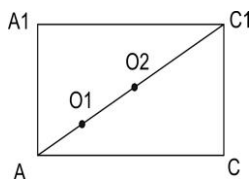
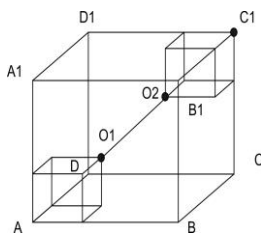
$$OC_1^2 = OT^2 + TC_1^2, EO^2 = EM^2 + MO^2, MH = H_1T = \frac{a}{2},$$

$$OT^2 = (a-x)^2 + \frac{a^2}{4}, MO^2 = x^2 + \frac{a^2}{4}. \text{ Приравняем эти выражения и}$$

найдем  $x = \frac{3a}{4}$ ,  $R^2 = \frac{14a^2}{16}$ . Ответ:  $R = \frac{\sqrt{14}}{4} a$ .

**Пример 5.** В угол  $A$  куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  с ребром  $1,5$  вписан шар радиуса  $0,5$ . Найдите радиус шара, вписанного в трехгранный угол с вершиной  $C_1$  и касающегося первого шара.

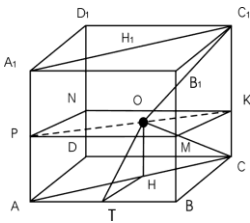
**Построение.** Из утверждения 8 следует, что центры шаров  $O_1, O_2$  являются вершинами кубов с радиусами  $0,5$  и  $R$  и лежат на диагонали  $AC_1$ .



**Вычисления.** Рассмотрим сечение  $ACC_1A_1$ :  $AC_1 = AO_1 + O_1O_2 + O_2C_1$ , где  $AC_1, AO_1, O_2C_1$  – диагонали трех кубов:  $AO_1 = \sqrt{3} \cdot 0,5$ ,  $O_2C_1 = \sqrt{3} \cdot R$ ,  $AC_1 = \sqrt{3} \cdot 1,5$ , а из условия касания  $O_1O_2 = 0,5 + R$ . Теперь,  $\sqrt{3} \cdot 1,5 = \sqrt{3} \cdot 0,5 + 0,5 + R + \sqrt{3} R$

Ответ:  $R = \frac{2\sqrt{3}-1}{2(\sqrt{3}+1)}$ .

**Пример 6.**  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  – куб с ребром  $1$ . Найдите радиус шара, проходящего через вершины  $C, C_1$  и касающегося прямых  $AB, AD$ .



**Построение.** Шар проходит через вершины  $C, C_1 \Rightarrow$  центр шара лежит на серединной перпендикулярной плоскости  $PMKN$ , где  $P, M, K, N$  – середины ребер. Далее, шар касается  $AB, AD \Rightarrow$  центр шара лежит на плоскости  $ACC_1A_1$ . Следовательно, центр шара лежит на линии пересечения указанных плоскостей – прямой  $PK$ .

Если  $O$  – центр шара, то  $OH \perp AC, HT \perp AB, OT = OC = OC_1 = R$ .

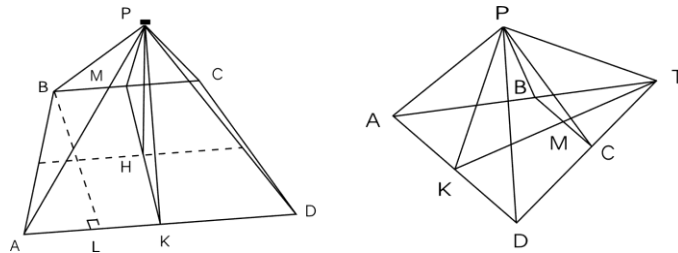
**Вычисления.** Пусть  $OK = x$ .

$$\text{Тогда } R^2 = OC^2 = x^2 + \frac{1}{4}, PO = AH = \sqrt{2} - x, AH = \frac{AH}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} - x}{\sqrt{2}} = 1 - \frac{x}{\sqrt{2}}.$$

$$\begin{aligned} \text{В результате получаем уравнение } x^2 + \frac{1}{4} &= \left(1 - \frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 \Rightarrow x = \frac{2 + \sqrt{2}}{2} x^2 + \frac{1}{4} = \\ &= R^2 = \left(1 - \frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{2 + \sqrt{2}}{2}. \text{ Наконец, } R^2 = \frac{6 + 4\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{4}. \text{ Ответ: } R = \frac{\sqrt{7 + 4\sqrt{2}}}{2}. \end{aligned}$$

**Пример 7.** Основание пирамиды  $PABCD$  – равнобедренная трапеция с боковыми сторонами  $AB = CD = b$  и острым углом  $A$ , равным  $\alpha$ . Боковые грани  $APD, BPC$  – равнобедренные треугольники ( $BP = PC, AP = PD$ ), образующие с основанием угол  $\varphi$ . Известно, что в пирамиду можно вписать шар. Найдите радиус этого шара.

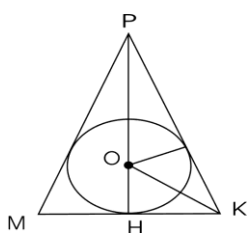
**Построение.** Пусть  $K, M$  – середины  $AD$  и  $BC$ . Из условий  $AP = PD \Rightarrow PK \perp AD, BP = PC \Rightarrow PM \perp BC$ . Отсюда следует, что  $MK \perp AD, MK \perp BC, \angle KMP = \angle MKP = \varphi$ . Следовательно, высота  $PH$  является биссектрисой угла  $MPK$ . Значит, биссекторная плоскость между боковыми гранями  $APD, BPC$  проходит через высоту  $PH$ .



Докажем, что биссекторная плоскость между гранями  $APB, DPC$  также проходит через высоту  $PH$ . Продолжим боковые стороны  $AB, DC$  трапеции до пересечения в точке  $T$ . Тогда,  $AT = TD$  и  $TK$  является биссектрисой и высотой треугольника  $ATD$ . Плоскость  $KPT$  перпендикулярна плоскости  $ATD \Rightarrow$  плоскость  $KPT$  является биссекторной плоскостью для граней  $APT, DPT$ , а плоскости  $APD, BPC$  перпендикулярны плоскости  $KPM$ . Таким образом, центр шара лежит на высоте и радиус  $R$  окружности, вписанной в треугольник  $MPK$ , равен радиусу шара.

**Вычисления.** Вычислим радиус окружности, вписанной в треугольник  $MPK$ :  $HK = \frac{b \sin \alpha}{2}, R = OH = HK \cdot \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$ .

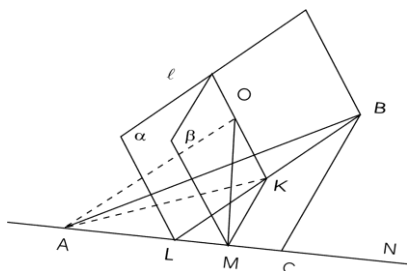
$$MK = b \sin \alpha, \angle M = \angle K = \varphi, \angle HKO = \frac{\varphi}{2}. \text{ Ответ: } R = \frac{b \sin \alpha}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}.$$



**Пример 8.** Дан прямоугольный треугольник  $ABC$  с катетами  $AC=4$ ,  $BC=3$ . Точка  $N$  лежит на луче  $AC$ ,  $AN=6$ . Шар радиуса 4 касается лучей  $BA$ ,  $BC$ , его центр равноудален от точек  $A$  и  $N$ . Найдите расстояние от центра шара до точки  $A$ .

**Построение.** Пусть  $BL$  – биссектриса угла  $ABC$ ,  $M$  – середина отрезка  $AN$ . Шар касается лучей  $BA$  и  $BC \Rightarrow$  центр шара лежит в плоскости  $\alpha$  проходящей через биссектрису  $BL$  перпендикулярно плоскости  $ABC$ . Центр шара равноудален от точек  $A$ ,  $N \Rightarrow$  центр шара лежит на серединной перпендикулярной плоскости  $\beta$  проходящей через точку  $M$ .

Если точка  $K$  – пересечение биссектрисы  $LB$  и перпендикуляра  $MK$ , то центр шара лежит на пересечении плоскостей  $\alpha$  и  $\beta$ . Прямая  $l = \alpha \cap \beta$  проходит через точку  $K$  перпендикулярно плоскости  $ABC$ . Расстояние от точки  $O$  до луча  $BC$  равно  $R$ .



**Вычисления.** По свойству биссектрисы,  
 $\frac{AL}{LC} = \frac{5}{3} \Rightarrow LC = \frac{3}{2}$ .

Далее,  $AM = \frac{1}{2}AN = 3 \Rightarrow LM = LC - MC = \frac{1}{2}$ . Из подобия

треугольников  $LKM$  и  $LBC$  следует, что

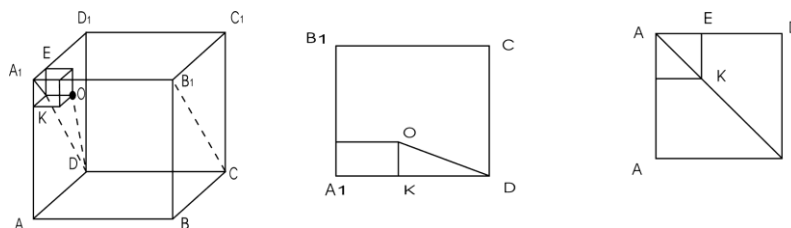
$\frac{KM}{BC} = \frac{LM}{LC} \Rightarrow KM = 1$ . Так как  $MC = KM = 1$ , то по теореме Пифагора  $OM = R = 4$ .

Теперь,  $OK^2 = OM^2 - MK^2 = 15$ ,  $AK^2 = AM^2 + MK^2 = 10$ ,  $AO^2 = AK^2 + OK^2 = 25$ .

Ответ:  $AO = 5$ .

**Пример 9.**  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  – куб с ребром 1. Два шара одинакового радиуса касаются друг друга. Один – с центром в точке  $D$ , другой – касается трехгранного угла с вершиной  $A_1$ . Найдите радиусы шаров.

**Построение.** Шар вписан в угол  $A_1 \Rightarrow$  центр шара  $O$  является вершиной куба с ребром  $R$ , построенного в вершине  $A_1$ . Шары касаются  $\Rightarrow OD = 2R$ .



**Вычисления.** Рассмотрим грань  $ADD_1 A_1$  и диагональное сечение  $A_1 DCB_1$ . Имеем  $A_1 K = \sqrt{2}R$ ,  $KE = R$ ,  $AD = \sqrt{2}$ ,  $KD = \sqrt{2} - A_1 D = \sqrt{2} - \sqrt{2}R$ .

$OD^2 = OK^2 + KD^2 \Rightarrow 4R^2 = R^2 + (\sqrt{2} - \sqrt{2}R)^2$ . Ответ:  $R = \sqrt{6} - 2$ .

**Пример 10.** В основании правильной четырехугольной пирамиды  $SABCD$  лежит квадрат  $ABCD$  со стороной 6, высота пирамиды равна 4. Точки  $K$ ,  $L$  расположены на ребрах  $AD$ ,  $SC$  так, что  $AK : KD = SL : LC = 1 : 2$ . Шар касается плоскостей  $ASB$ ,  $CSD$  и его центр лежит на прямой  $KL$ . Найдите радиус шара.

**Построение.** Шар касается плоскостей  $ASB$  и  $CSD \Rightarrow$  его центр лежит на биссекторной плоскости  $ESF$ , где  $E, F$  – середины  $AD, BC$ . Кроме того, по условию задачи, центр шара лежит на  $KL$ . Следовательно, центр шара лежит на пересечении прямой  $KL$  и плоскости  $ESF$ .

**Вычисления.** Найдем точку пересечения прямой и плоскости «методом координат».

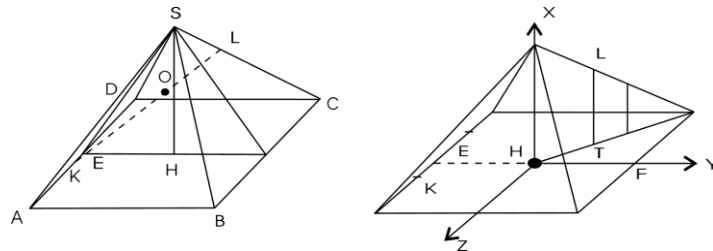
Выберем оси координат как показано на рисунке. Тогда  $K = (0; -3; 1), L = (\frac{8}{3}; 1; -1)$

$\overline{KL} = (\frac{8}{3}; 4; -2)$ . Запишем уравнение прямой, проходящей через точку  $K$  параллельно

$$KL: (x; y; z) = (0; -3; 1) + t \cdot (\frac{8}{3}; 4; -2) = (\frac{8}{3}t; -3 + 4t; 1 - 2t).$$

Плоскость  $ESF$  проходит через оси  $OX, OY$  и задается уравнением  $z = 0$ .

Точку пересечения прямой  $KL$  и плоскости  $z = 0$  найдем из условия  $z = 1 - 2t = 0 \Rightarrow t = 0,5 \Rightarrow$  координаты центра сферы  $O (\frac{4}{3}; -1; 0)$ . Радиус шара – это расстояние от центра шара до плоскости, проходящей через точки  $S (4; 0; 0), B(0; 3; 3), A (0; -3; 3)$ .



Эта плоскость задается уравнением  $3x + 4z - 12 = 0$ , а расстояние от точки  $O$

до плоскости вычисляется по формуле  $R = d = \frac{|3 \cdot \frac{4}{3} - 12|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{8}{5}$ .

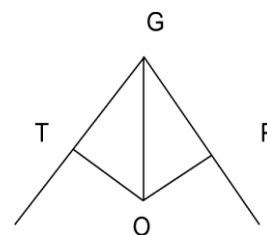
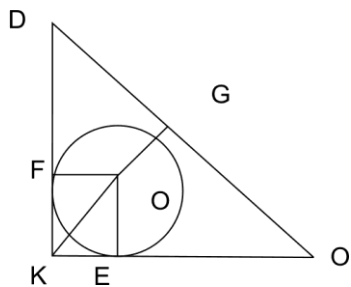
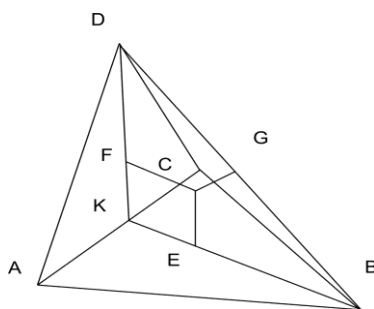
**Пример 13.** Грани  $ACD$  и  $ACB$  треугольной пирамиды  $ABCD$  – равносторонние треугольники со стороной  $a$ , перпендикулярные друг другу. Найдите радиус шара, вписанного в пирамиду.

**Построение.** Обозначим через  $K$  середину ребра  $AB$ . Так как  $CK$  и  $DK$  биссектрисы соответствующих углов, то плоскость  $CKD$  является биссекторной плоскостью двугранного угла с ребром  $DC$  и, следовательно, центр вписанного шара  $O$  лежит в этой плоскости.

Пусть  $E, F, T, P$  – точки касания шара с гранями  $ABC, ADC, ADB, CDB$ . Тогда  $OF \perp ADC, OE \perp ABC, OT \perp ADB, OP \perp BDC$ .

$DK$  и  $KB$  перпендикулярны ребру  $AC$ , поэтому точки касания  $E, F$  лежат на  $DK$  и  $KB$ , а  $\angle TGP$  является линейным углом двугранного угла  $2\varphi$  с ребром

$DB, OT = OP = R, OG = \frac{R}{\sin \varphi}$ . Рассмотрим сечение шара плоскостью  $CKD$ . Окружность радиуса  $R$  касается катетов треугольника  $KDC$ .



**Вычисления.**  $KD = KB = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ ,  $R + OG = KG = \frac{DB}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{4}$

Отсюда,  $R \left(1 + \frac{1}{\sin \varphi}\right) = \frac{a\sqrt{6}}{4}$ . Угол  $\varphi$  найдем из равнобедренного треугольника

$AGC$ :

$DB = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ ,  $AG = BG = \frac{a\sqrt{10}}{4}$ , Ответ:  $R = \frac{a\sqrt{6}(\sqrt{10}-2)}{12}$ .

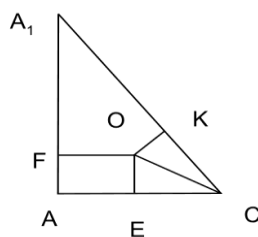
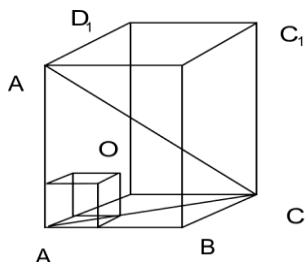
$\sin \varphi = \frac{2}{\sqrt{10}}$ .

*Замечание 5.2.* В данной задаче условие «треугольники  $ABC$ ,  $ADC$  правильные» можно заменить на более слабое – например, оба треугольника равнобедренные. Тогда для вычисления искомого радиуса можно использовать прием из предыдущего примера – вычислить площадь треугольника  $KDB$  как суммы площадей треугольников  $KOD, DOB, BOK$

$$S_{KDB} = \frac{1}{2}(KD \cdot R + KB \cdot R + DB \cdot OG), \quad OG = \frac{R}{\sin \varphi}.$$

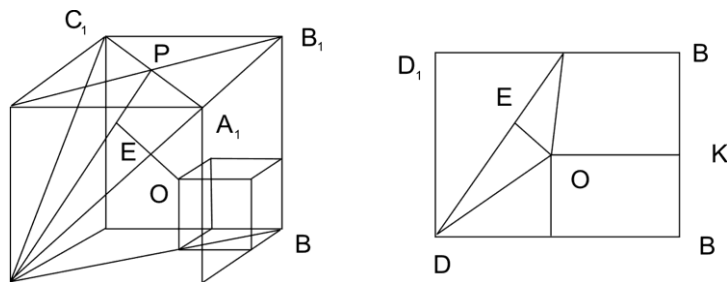
**Пример 14.** Квадрат  $ABCD$  со стороной 1 является основанием прямоугольного параллелепипеда  $ABCDA_1B_1C_1D_1$ , боковое ребро которого равно 4. Сфера, центр которой лежит внутри параллелепипеда, касается граней  $ABCD$ ,  $AA_1B_1B$ ,  $AA_1D_1D$  и прямой  $A_1C$ . Найдите радиус сферы.

**Построение.** Так как сфера касается граней трехгранного угла с вершиной  $A$  и прямой  $A_1C$ , то центр сферы  $O$  является вершиной куба со стороной  $R$ , вписанной в этот трехгранный угол, а расстояние от точки  $O$  до прямой  $A_1C$  равно  $R$ .



**Вычисления.** Рассмотрим сечение куба плоскостью  $AA_1C$ :  $OE = OK = R$ ,  $OF = \sqrt{2} R$ ,  $AA_1 = 4$ ,  $AC = \sqrt{2}$ ,  $A_1C = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ .





$DP = PB_1$ ,  $OE \perp DP$ ,  $OE = R$ ,  $OK \parallel DB$ ,  $DB = \sqrt{2}$ ,  $DP = \sqrt{\frac{3}{2}}$ ,  $OK = R\sqrt{2}$ . Радиус сферы найдем из выражения площади треугольника  $ODP$ .

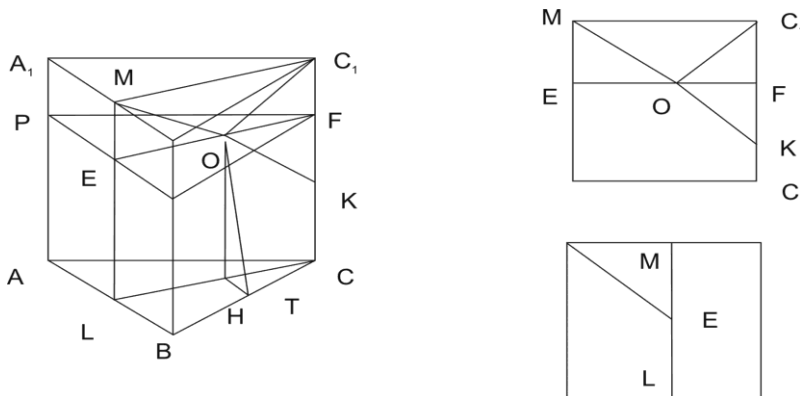
$$S_{ODP} = \frac{1}{2} DP \cdot R = S_{DD_1B_1} - S_{DD_1P} - S_{DOKB} - S_{OPB_1}. \quad \text{Отсюда}$$

$$\frac{1}{2} R \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} = 1 \cdot \sqrt{2} - \frac{R + \sqrt{2}}{2} \cdot \frac{R}{\sqrt{2}} - \frac{R + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} \cdot (1 - \frac{R}{\sqrt{2}}).$$

Ответ:  $R = \frac{2\sqrt{2}}{3 + \sqrt{6}}$ .

**Пример 17.** Сфера пересекает ребро  $CC_1$  правильной треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$  в точках  $C_1$  и  $K$  ( $C_1K = 4$ ) и касается всех ребер ломаной  $BCAA_1B_1$ . Найдите радиус сферы и объем призмы.

**Построение.** Пусть точки  $L, M, F$  – середины  $AD, A_1D_1, KC_1$ , точка  $E$  лежит на  $LM$  ( $EM = FC_1 = 2$ ). Проанализируем условие задачи.



Во-первых, точки  $K, C_1$  лежат на сфере  $\Rightarrow$  центр сферы  $O$  лежит в плоскости  $PFQ$  ( $PA_1 = QB_1 = FC_1$ ).

Во-вторых, сфера касается ребер  $CA, CB \Rightarrow O$  лежит на плоскости  $LMC_1C$ . Так как выполняются оба этих условия, то центр сферы будет лежать на пересечении данных плоскостей прямой  $EF$ .

В-третьих, сфера касается ребер  $AA_1, A_1B_1 \Rightarrow O$  лежит на плоскости, проходящей через биссектрису угла  $AA_1B_1$ . Однако известно, что центр  $O$  лежит на прямой  $EF$ , значит  $A_1E$  – биссектриса, а указанная плоскость проходит через прямую  $EF$ . Тогда  $ME = A_1M = MB_1 = 2$  и  $ABC$  – правильный треугольник со стороной 4.

Пусть  $OH \perp CL$ ,  $HT \perp BC$ . Сфера касается ребра  $A_1B_1$  в точке  $M$ , ребра  $BC$  в точке  $T$ ,  $OT = OC_1 = OM = R$ .



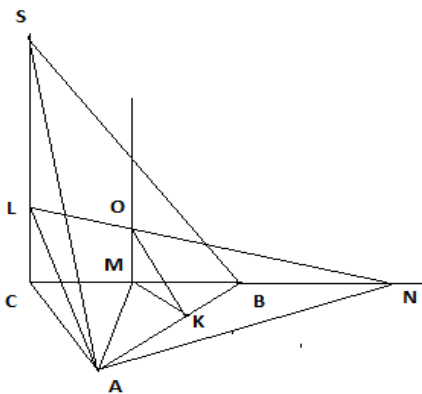
**Вычисления.** Треугольник  $MOC_1$  – равнобедренный, поэтому  $O$  – середина  $EF$ , а  $H$  – середина  $LC$ ,  $EO = OF = \frac{1}{2} MC_1 = \sqrt{3}$ ,  $CL = EF = MC_1 = 2\sqrt{3}$ . Далее,  $R^2 = OM^2 = OE^2 + EM^2 = 7$ ,  $R = \sqrt{7}$ ,  $EL^2 = OH^2 = R^2 - \frac{3}{4} = \frac{25}{4}$ .

Наконец,  $AA_1 = EL + 2 = \frac{9}{2}$ ,  $V = \frac{1}{3} \cdot 16 \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{9}{2} = 18\sqrt{3}$ .

Ответ:  $R = \sqrt{7}$ ,  $V = 18\sqrt{3}$ .

**Пример 18.** В основании треугольной пирамиды  $SABC$  лежит правильный треугольник  $ABC$  со стороной 5. Боковое ребро  $SC$  перпендикулярно основанию и равно 12. Сфера с центром  $O$  на плоскости  $SBC$  касается ребер  $SA, AC, AB$ . Найдите радиус сферы.

**Построение.** Если сфера касается ребер  $AC$  и  $AB$ , то центр сферы лежит в плоскости  $\alpha$ , проходящей через биссектрису (медиану)  $AM$  правильного треугольника  $ABC$  перпендикулярно плоскости треугольника  $ABC$ . Если сфера касается ребер  $AC$  и  $AS$ , то центр сферы лежит в плоскости  $\beta$ , проходящей через биссектрису  $AL$  прямоугольного треугольника  $ACS$  перпендикулярно плоскости этого треугольника.



Если  $AN \perp AC$ , то плоскость  $ALN$  проходит через биссектрису  $AL$  и перпендикулярна плоскости  $ACS$ , т.е.

является искомой плоскостью  $\beta$ .

Таким образом, центр сферы лежит на прямой пересечения плоскостей  $\alpha$  и  $\beta$  – прямой  $AO$ .

С другой стороны, по условию задачи, центр сферы лежит в плоскости  $SBC$  т.е. точка  $O$  – центр сферы.

Проведем  $MK \perp AB$ , тогда  $OK \perp AB$  и  $R = OK$ .

**Вычисления.** Если  $AL$  – биссектриса угла  $SAC$ , то  $\frac{LC}{SL} = \frac{CA}{SA} = \frac{13}{5}$ . Следовательно,

$CL = \frac{10}{3}$ . Так как  $AN \perp AC$ , то  $\angle CNA = 30^\circ$  и  $CN = 10$ . Из подобия треугольников  $CLN$  и

$MON$  следует, что  $\frac{OM}{CL} = \frac{MN}{CN} = \frac{3}{4} \Rightarrow OM = \frac{5}{2}$ . Наконец

$$MK = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{4}, R^2 = OK^2 = \frac{25}{4} + \frac{75}{16} = \frac{175}{16}.$$

Ответ:  $R = \frac{5\sqrt{7}}{4}$ .

## § 6. Задачи для самостоятельного решения

1. Найдите объем правильной треугольной пирамиды, если сторона основания равна  $c$ , а радиус вписанного шара равен  $R$
2. В правильной четырехугольной пирамиде двугранный угол между основанием и боковой гранью равен  $\pi/3$ . Найдите отношение объема пирамиды к объему вписанного в нее шара.
3. В основании треугольной пирамиды лежит прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна  $c$ . Каждое ребро пирамиды образует с плоскостью основания угол  $\alpha$ . Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды.
4. Найдите радиус шара, описанного около правильной четырехугольной пирамиды, если расстояние от центра шара до боковой грани равно  $a$ , а до бокового ребра –  $b$ .
5. Найдите радиус шара, касающегося всех ребер правильного тетраэдра, если ребро тетраэдра равно  $a$ .
6. Шар касается всех ребер куба. Найдите площадь части поверхности шара, лежащей внутри куба, если ребро куба равно 1.
7. Шар радиуса  $R$  вписан в прямую призму, основанием которой является трапеция со средней линией, равной  $a$ . Найдите площадь боковой поверхности призмы.
8. Ребро куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  равно  $a$ . Внутри куба расположены касающиеся друг друга два шара, причем первый касается трех граней куба, сходящихся в вершине  $A$ , а второй – трех граней, сходящихся в вершине  $C$ . Найдите радиусы шаров, если их величины относятся как 1: 2.
9. Основанием пирамиды является равнобедренный треугольник с боковыми сторонами, равными  $a$ , и углом между ними  $\alpha$ . Две боковые грани пирамиды, проходящие через равные стороны основания, перпендикулярны основанию, а третья боковая грань наклонена к основанию под углом  $\alpha$ . Найдите радиус шара, вписанного в пирамиду.
10. Основанием четырехугольной пирамиды  $SABCD$  является квадрат  $ABCD$  со стороной 8, ребро  $SA$  перпендикулярно основанию,  $SA = 6$ . Точки  $E, F$  – середины отрезков  $AD, CD$ . Найдите радиус сферы, вписанной в пирамиду  $SDEF$ .
11. Ребро правильного тетраэдра равно  $b$ . Найдите радиус сферы, касающейся боковых граней тетраэдра, если центр этой сферы лежит на основании тетраэдра.
12. Найдите радиус сферы, проходящей через вершины нижнего основания куба с ребром  $a$  и касающейся ребер его верхнего основания.
- 13\*. В правильной четырехугольной пирамиде  $SABCD$  высота равна диагонали основания  $ABCD$ . Через вершину  $A$  параллельно  $BD$  проведено сечение пирамиды плоскостью, касающейся вписанной в пирамиду сферы. Найдите отношение площади сечения к площади основания.
14. Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  с ребром 1. Найдите радиус шара, проходящего через вершины  $C, C_1$  и касающегося прямых  $AB, AD$ , если известно, что центр шара лежит внутри куба.
- 15°. В куб с ребром 2 вписан шар. Определить радиус другого шара, который касается первого шара и трехгранного угла с вершиной  $A$ .
16.  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  – куб с ребром  $a$ ,  $E_1$  – середина  $C_1 D_1$ ,  $F_1$  – середина  $B_1 C_1$ . Найдите радиус сферы, проходящей через точки  $E_1, F_1, A, C$ .
17. На ребре единичного куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  взята точка  $K$  так, что  $AK = 1/3$ . Через точки  $K$  и  $A_1$  проведена плоскость, касающаяся вписанного в куб шара и пересекающая  $AD$  в точке  $M$ . Найдите  $AM$ .
18. Найдите радиус шара, вписанного в треугольную пирамиду, пять ребер которой равны 2, а одно ребро равно 1.

- 19.**  $DABC$  – правильный тетраэдр с ребром 1. Найдите радиус шара, касающегося ребра  $AB$  в его середине, а также ребер  $AC$  и  $CD$ .
- 20.** Найдите радиус шара, касающегося всех ребер правильной треугольной пирамиды, у которой сторона основания равна 2, а боковое ребро – 3.
- 21.** Дан правильный тетраэдр  $ABCD$  с ребром  $a$ . Найдите радиус сферы, проходящей через вершины  $C$ ,  $D$  и середины ребер  $AB$  и  $AC$ .
- 22.** Дана правильная треугольная пирамида  $SABC$  со стороной основания  $a$  и боковым ребром  $\sqrt{2}a$ . Сфера проходит через точку  $A$  и касается боковых ребер  $SB$ ,  $SC$  в их серединах. Найдите радиус сферы.
- 23.** Нижним основанием прямой призмы  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  является ромб с острым углом  $\varphi$ . Известно, что в призму можно вписать шар диаметра  $d$ . Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через  $BC$  и  $A_1D_1$ .
- 24.** В основании пирамиды лежит квадрат со стороной  $a$ . Высота пирамиды проходит через середину одного из ребер основания и равна  $a\sqrt{3}/2$ . Найдите радиус описанного шара.
- 25.** В основании треугольной пирамиды  $ABCD$  лежит прямоугольный треугольник с катетами  $AC = 15$ ,  $BC = 20$ . Боковое ребро  $DC$  перпендикулярно плоскости основания. Сфера касается основания пирамиды, ребра  $CD$  и боковой грани  $ABD$  в точке  $P$ , которая лежит на высоте треугольника  $ABD$ , опущенной из вершины  $D$ . Найдите объем пирамиды, если  $DP = 6$ .
- 26\*.** В двугранный угол величиной  $60^\circ$  вписан шар радиуса  $R$ . Найдите радиус шара, вписанного в тот же угол и касающегося данного шара, если известно, что прямая, соединяющая центры шаров, образует с ребром двугранного угла угол  $45^\circ$ .
- 27\*.** В треугольной пирамиде  $ABCD$   $DC = 9$ ,  $DB = AD$ , ребро  $AC$  перпендикулярно грани  $ABD$ . Сфера радиуса 2 касается грани  $ABC$ , ребра  $DC$ , а также грани  $DAB$  в точке пересечения ее медиан. Найдите объем пирамиды.
- 28\*.** Дана пирамида  $SABC$  с основанием  $ABC$ , в которой ребро  $AC$  перпендикулярно грани  $SAB$ . Шар касается грани  $ASC$  в точке  $S$  и грани  $ABC$  в точке  $V$ . Найдите радиус шара, если  $AC = 1$ ,  $\angle ACB = \angle BSC = 60^\circ$ .
- 29.** В треугольной пирамиде  $SABC$  грань  $SAC$  перпендикулярна грани  $ABC$ . Кроме того,  $SA = SC = 1$ , угол при вершине  $B$  треугольника  $ABC$  – прямой. Сфера касается грани  $ABC$  в точке  $V$  и грани  $SAC$  в точке  $S$ . Найдите радиус сферы.
- 30.** Сторона правильного тетраэдра равна  $a$ . Определить радиус шара, касающегося боковых ребер в вершинах основания.
- 31.** Боковые ребра правильной треугольной пирамиды  $SABC$  наклонены к плоскости основания под углом  $45^\circ$ . Шар касается плоскости основания  $ABC$  в точке  $A$  и, кроме того, касается вписанного в пирамиду шара. Через центр первого шара и высоту основания  $BD$  проведена плоскость. Найдите угол наклона этой плоскости к плоскости основания.
- 32.** В правильной треугольной пирамиде  $SKLM$  высота равна 6, а сторона основания равна 3. Шар, вписанный в пирамиду, касается граней  $LSM$ ,  $MSK$  в точках  $A$  и  $B$  соответственно. Найдите длину отрезка  $AB$ .
- 33.** Сфера диаметром  $AD = \sqrt{3}$  касается плоскости треугольника  $ABC$  в точке  $A$ . Отрезки  $BD$  и  $CD$  пересекают сферу в точках  $M$  и  $N$  соответственно. Найдите длину отрезка  $MN$ , если  $AB = 3$ ,  $AC = 3\sqrt{5}$ ,  $\angle BDC = \pi/3$ .
- 34.** Объем правильной треугольной пирамиды равен  $8\sqrt{3}$ , а плоскость, проходящая через сторону основания пирамиды и центр вписанного шара, перпендикулярна противоположному ребру пирамиды. Найдите радиус вписанного шара.

**35.** Перпендикуляр, опущенный из центра основания правильной четырехугольной пирамиды на боковую грань, попадает в центр окружности радиуса  $\sqrt{6}$ , описанной около боковой грани. Найдите радиус шара, описанного около пирамиды.

**36.** Объем правильной треугольной пирамиды равен  $162\sqrt{3}$ , а перпендикуляр, опущенный из центра основания пирамиды на ее боковую грань, попадает в центр окружности, вписанной в боковую грань. Найдите сторону основания пирамиды.

**37°.** В правильной четырехугольной пирамиде через сторону основания и центр описанного около пирамиды шара проведена плоскость, образующая с основанием угол  $\arctg(2.3)$ . Найдите косинус угла между боковой гранью и плоскостью основания.

**38.** Радиус шара, вписанного в правильную четырехугольную пирамиду  $MABCD$  с основанием  $ABCD$ , равен 6, радиус шара, вписанного в пирамиду  $MABC$ , равен 4. Найдите площадь основания пирамиды.

**39.<sup>0</sup>** В правильной треугольной пирамиде радиус вписанного шара равен 1. Найдите радиус описанного шара, если известно, что центры этих шаров совпадают.

**40.** В правильной треугольной пирамиде  $SABC$  боковая грань составляет с основанием  $ABC$  угол  $\arccos(1/9)$ . В пирамиду вписан шар радиуса 2 с центром в точке  $O$ . Найдите радиус шара, описанного около пирамиды  $OABC$ .

**41.** Через вершину  $A$  треугольника  $ABC$  проведена прямая  $m$ , перпендикулярная плоскости этого треугольника. Шар радиуса  $r$  касается всех сторон треугольника и прямой  $m$ . Найдите расстояние от точки  $A$  до центра шара, если известно, что  $AB = AC$ ,  $\angle BAC = 120^\circ$ .

**42.** Шар радиуса  $R$  касается всех граней трехгранного угла, плоские углы при вершине которого равны  $60^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$ . Найдите расстояние от вершины угла до центра шара.

**43.** Дан куб  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  с ребром 1. Сфера касается ребер  $AA_1$ ,  $A_1D_1$ ,  $AB$  и пересекает ребро  $CC_1$  в точке  $M$ , такой, что  $CM = 1/3$ . Найдите радиус сферы.

**44.** Дан куб  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  с ребром 1. Две сферы одинакового радиуса касаются друг друга, причем центр первой сферы совпадает с вершиной  $D$ , а центр второй расположен внутри куба, и она касается ребер трехгранного угла с вершиной в точке  $A_1$ . Определить радиус сфер.

**45.** В пирамиде  $ABCD$  ребро  $DC$  перпендикулярно плоскости основания  $ABC$ ,  $AB = 3\sqrt{3}$ ,  $BC = 3$ ,  $DC = \sqrt{13}$ ,  $\angle ACB = 60^\circ$ . Центр сферы радиуса 5 находится в точке  $D$ . Найдите длину линии пересечения сферы и основания.

**46.** В основании треугольной пирамиды  $SABC$  лежит треугольник  $ABC$  со сторонами  $AB = \sqrt{3}$ ,  $BC = 5$ ,  $AC = 2\sqrt{7}$ , все боковые ребра равны 4. Сфера, центр которой лежит на продолжении ребра  $BS$  за точку  $S$ , касается плоскости основания и проходит через точку  $S$ . Найдите радиус сферы.

**47°.** Дан куб  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  с ребром 5. Точки  $K$  и  $L$  расположены на ребрах  $B_1C_1$ ,  $CD$  соответственно так, что  $B_1K : KC_1 = DL : LC = 1 : 2$ . Центр шара, касающегося плоскостей  $ABCD$  и  $ABB_1A_1$ , лежит на отрезке  $KL$ . Найдите радиус шара.

**48.** В пирамиде  $ABCD$  ребра  $DA$ ,  $AB$ ,  $BC$  попарно перпендикулярны и равны 3. Точка  $M$  расположена на ребре  $BD$  так, что  $DM : MB = 1 : 2$ . Шар с центром на прямой  $AC$  касается ребра  $BD$  в точке  $M$ . Найдите радиус шара.

**49<sup>0</sup>**. Дан куб  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  с ребром 1. Точка  $Q$  – центр грани  $A_1B_1C_1D_1$ . Найдите радиус сферы, проходящей через точки  $B$ ,  $D$ ,  $C_1$ ,  $Q$ .

**50.** Длина ребра правильного тетраэдра  $SABC$  равна  $\sqrt{2}$ ,  $NM$  – средняя линия треугольника  $BSC$ , параллельная  $BC$ . Шар касается лучей  $AS$ ,  $AB$ ,  $AC$  и отрезка  $MN$ , его центр лежит вне тетраэдра. Найдите радиус шара.

**51\*.** В основании треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$  лежит правильный треугольник  $ABC$  со стороной  $a$ . Ребро  $AA_1$  перпендикулярно ребру  $BC$  и образует угол  $60^\circ$  с плоскостью основания  $ABC$ . Найдите объем призмы, если известно, что в нее можно вписать шар.

**52.** В основании правильной четырехугольной пирамиды  $SABCD$  лежит квадрат  $ABCD$  со стороной  $4a$ , высота пирамиды равна  $4\sqrt{2}a$ . Через вершину  $B$  параллельно  $AC$  проведена плоскость, касающаяся вписанного в пирамиду шара. В каком отношении эта плоскость делит высоту пирамиды ( $SD$ )?

**53.** В основании пирамиды  $SABCD$  лежит ромб  $ABCD$  с диагоналями  $AC = 6$ ,  $BD = 8$ . Перпендикуляр, опущенный из вершины  $S$  на основание, пересекает основание в точке  $H$  – середине ребра  $BC$ . Найдите объем пирамиды, если известно, что существует сфера, касающаяся ребер основания, а прямая  $SH$  касается сферы в точке  $S$ .

**54.** В правильную треугольную призму  $ABCA_1B_1C_1$  вписана сфера с центром в точке  $O$ . Прямая  $AO$  пересекает грань  $BB_1C_1C$  в точке  $M$ . Найдите объем призмы, если  $B_1M = \sqrt{13}$ .

**55.** В правильной треугольной пирамиде  $SABC$  сторона основания равна  $4\sqrt{3}$ , высота пирамиды равна 12. Точки  $M$ ,  $N$ ,  $K$  – середины ребер  $AS$ ,  $BS$ ,  $CS$ . Найдите радиус шара, касающегося основания пирамиды и прямых  $AK$ ,  $CN$ ,  $BM$ .

**56.** В треугольной пирамиде  $SABC$  боковая грань  $SBC$  образует с плоскостью основания  $ABC$  двугранный угол, равный  $\frac{\pi}{4}$ . Треугольники  $SBC$ ,  $ABC$  – равнобедренные с общим основанием  $BC = a$ . Высота пирамиды равна  $h$ . Центр шара, описанного около пирамиды, лежит в плоскости основания. Найдите радиус описанного шара.

**57.** Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 2. Перпендикуляр, опущенный из центра описанного около пирамиды шара на боковую грань, образует с высотой угол  $\text{arcctg } \frac{3}{5}$ . Найдите объем пирамиды.

**58.** В треугольной пирамиде длины ребер равны 15, 9, 9, 12, 12, 3. Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды.

**59.** В основании пирамиды лежит треугольник со сторонами 6, 8, 10, все боковые ребра наклонены к плоскости основания под одним углом. Найдите высоту пирамиды, если радиус описанной около пирамиды сферы равен 7.

**60.** Сфера пересекает ребро  $CC_1$  правильной треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$  в точках  $C_1$  и  $K$  ( $C_1K = 4$ ) и касается всех ребер ломаной  $BCAA_1B_1$ . Найдите объем призмы и радиус сферы.

**61.** Ребро куба равно 1. Найдите радиус сферы, касающейся ребер  $BA$ ,  $BB_1$ ,  $BC$  и плоскости  $A_1DC$ .

**62.** В основании пирамиды лежит квадрат  $ABCD$  со стороной  $a$ , боковое ребро  $DS = \sqrt{2}a$  и перпендикулярно основанию. Найдите радиус вписанной в пирамиду сферы.

**63.** В треугольной пирамиде  $SABC$  грань  $SAC$  перпендикулярна основанию  $ABC$  ( $SA = SC = 1$ ), а угол при вершине  $B$  треугольника  $ABC$  – прямой. Шар касается основания пирамиды в точке  $B$ , а грани  $SAC$  – в точке  $S$ . Найдите радиус шара.

**64.** Основание пирамиды  $SABC$  – ромб со стороной  $a$ ,  $SA = SC = a$ ,  $SB = SD$ ,  $\angle BCD = 2\alpha$ . Найдите радиус вписанного в пирамиду шара.

**65.** Сфера пересекает ребро  $CC_1$  правильной треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$  в точках  $C_1$  и  $K$  ( $C_1K = 4$ ) и касается всех ребер ломаной  $BCAA_1B_1$ . Найдите объем призмы и радиус сферы.

**66.** Ребро куба равно 1. Найдите радиус сферы, касающейся:

а) ребер  $BA$ ,  $BB_1$ ,  $BC$  и плоскости  $A_1DC_1$ ;

б) ребер  $BA$ ,  $BB_1$ ,  $BC$  и прямой  $DA_1$ .

**67.** В основании пирамиды лежит квадрат  $ABCD$  со стороной  $a$ , боковое ребро  $DS = \sqrt{2}a$  и перпендикулярно основанию. Найдите радиус вписанной в пирамиду сферы.

### Ответы:

1.  $\frac{1}{6} \frac{\sqrt{3}Rc^4}{c^2 - 12R^2}$  \ 2.  $\frac{9}{\pi}$  \ 3.  $\frac{c}{2 \sin 2\alpha}$  \ 4.  $\frac{a^2 b^2}{a^2 - 2b^2}$  \ 5.  $\frac{a\sqrt{2}}{4}$  \
6.  $3\pi\sqrt{2} - 4\pi$  \ 7.  $8aR$  \ 8.  $\frac{2a}{5}; \frac{4a}{5}$  \ 9.  $\frac{a \sin \alpha}{\cos \frac{\alpha}{2} + 1}$  \ 10.  $32 + 4\sqrt{22}$
11.  $\frac{b\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$  \ 12.  $\frac{a\sqrt{41}}{8}$  \ 13. 1:3 \ 14.  $\frac{a\sqrt{25+16\sqrt{2}}}{2}$  \ 15.  $2 - \sqrt{3}$  \ 16.  $\frac{\sqrt{41}a}{8}$
17.  $\frac{7}{13}$  \ 18.  $\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{15+4\sqrt{3}}}$  \ 19.  $\frac{\sqrt{2}}{4}$  \ 20.  $\frac{4}{\sqrt{23}}$  \ 21.  $\frac{\sqrt{11}}{8}$  \ 22.  $\frac{\sqrt{115}a}{8}$  \ 23.  $\frac{d^2 \sqrt{2}}{\sin \varphi}$
24.  $\frac{a\sqrt{21}}{6}$  \ 25. 450 \ 26.  $R \frac{9 \pm 2\sqrt{2}}{7}$  \ 27. 36 \ 28.  $\frac{\sqrt{6}}{2}$  \ 29.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  \ 30.  $\frac{a}{\sqrt{2}}$
31.  $\frac{\sqrt{15} + \sqrt{5}}{6}$  \ 32.  $\frac{9}{7}$  \ 33.  $\frac{3}{4}$  \ 34. 1 \ 35. 3 \ 36. 18 \ 37.  $\frac{1}{\sqrt{26}}$  \ 38. 288 \
39. 3 \ 40. 6 \ 41.  $\frac{5R^2}{4}$  \ 42.  $R\sqrt{5+2\sqrt{3}}$  \ 43.  $\frac{\sqrt{5}}{3}$  \ 44.  $\frac{\sqrt{7} - \sqrt{2}}{5}$  \ 45.  $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$
46. 12 \ 47.  $\frac{15}{4}$  \ 48. 3 \ 49.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  \ 50.  $1 + \frac{\sqrt{5}}{4}$  \ 51.  $\frac{3}{4(2+\sqrt{13})}$  \
52. 1:2 \ 53.  $28/5$  \ 54.  $48\sqrt{3}$  \ 55. 2 \ 56.  $\sqrt{\frac{a^2}{4} + (h - \frac{a^2}{8h})^2}$  \ 57. 3.84 \ 59. 7. 5 \ 59.  $8(7 \pm 2\sqrt{6})$  \ 60.
- $18\sqrt{3}$  \ 61.  $\frac{6\sqrt{2} - 4\sqrt{3}}{3}$  \ 62.  $\frac{2a}{2 + \sqrt{2} + \sqrt{6}}$  \ 63.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  \ 64.  $\frac{a \sin \alpha \cos \alpha}{\sqrt{1 + \cos^2 \alpha} + \cos \alpha}$  \
65.  $\sqrt{7}; 18\sqrt{3}$  \ 66.  $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{6} + 3}; 2\sqrt{2} - \sqrt{5}$  \ 67.  $\frac{2a}{2 + \sqrt{2} + \sqrt{6}}$  \

### Список рекомендуемой литературы

1. Александров А. Д., Вернер А. Л., Рыжик В. И. Стереометрия. Геометрия в пространстве. Висагинас: Alfa, 1998.

2. Белоносов В. С., Фокин М. В. Задачи вступительных экзаменов по математике. Новосибирск: Сиб. унив. изд-во., 2005.

3. Дорофеев Г. В., Потапов М. К., Розов Н. Х. Пособие по математике для поступающих в вузы. М.: Наука, 1973; 2003.

4. *Литвиненко В. Н.* Практикум по элементарной математике. Стереометрия. М.: Вербум-М, 2001.
5. *Лурье М. В.* Геометрия. Техника решения задач. М: Физматлит, 2002.
6. *Методическое* пособие по математике для поступающих в вузы / Под ред. М. И. Шабунина. М.: Физматкнига, 2008.
7. *Никитин А. А. и др.* Учебник для одиннадцатых классов специализированных учебно-научных центров. Новосибирск: НГУ, 2003. Ч. 1–2.
8. *Осипов В. Д.* Конкурсные задачи по математике. СПб.: Изд-во С.-Петербур. ун-та, 2004.
9. *Цыпкин А. Г., Пинский А. И.* Справочное пособие по математике с методами решения задач для поступающих в вузы. М.: «Изд. дом «Оникс 21 век»». Изд-во «Мир и образование», 2005.
10. *Шабунин М. И.* Математика для поступающих в вузы. М.: Бином; Лаборатория знаний, 2003.
13. *Калинин А. Ю., Терешин Д. А.* Стереометрия 11. М.: Физматкнига, 2005.