

Югорский физико-математический лицей

**В.П. Чуваков**

## **Квадратичная функция**

Учебно-методическое пособие

Ханты-Мансийск  
2017

## **В.П. Чуваков**

**Квадратичная функция:** Учебно-методическое пособие, 4-е изд.- Ханты-Мансийск, Бюджетное общеобразовательное учреждение Ханты-Мансийского автономного округа-Югры «Югорский физико-математический лицей-интернат», 34 с.

Пособие предназначено для повторения и систематизации знаний по квадратичным функциям с целью углубленного изучения математики, подготовки к предметным и вузовским олимпиадам, ЕГЭ.

Адресовано школьникам старших классов и преподавателям.

Текст одного из изданий пособия размещен на сайте лицея:  
<http://ugrafmsh.ru/ucheba/metodicheskiy-kabinet/kafedra-matematiki/uchebnyie-posobiya>

## Введение

Квадратичная функция является одной из наиболее изученных функций школьного курса алгебры, для которой доказаны многие свойства, и задачи на которую в явном или неявном виде часто встречаются на математических олимпиадах и ЕГЭ. Это задачи с параметрами на общие свойства параболы, на существование решений и число решений, теорему Виета, расположение корней квадратного уравнения, геометрию параболы.

Для решения этих задач требуется как знание фактического материала, так и общее понимание алгебраических свойств квадратичной функции и геометрии ее графика. В ряде случаев геометрическая интерпретация может подсказать алгоритм решения или проверить логическую правильность рассуждений.

В пособии систематизированы основные знания по квадратичной функции, приведены доказательства и геометрическая интерпретация основных свойств, показаны их применения для решения задач различного уровня сложности.

Приведен список задач для самостоятельного решения, список олимпиадных задач и задач повышенного уровня сложности.

### 1. Общие сведения

Рассмотрим функцию  $y = ax^2$ .

График этой функции (рис. 1) называется параболой.

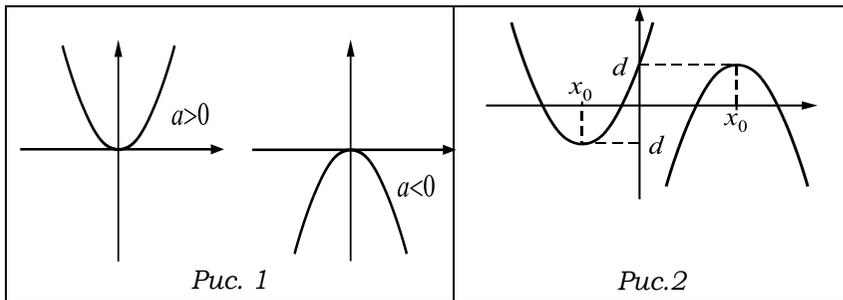


График функции  $y = a(x - x_0)^2 + d$  тоже является параболой с вершиной в точке  $(x_0, d)$  и получается из графика  $y = ax^2$  смещением вершины параболы на величину  $x_0$  по оси  $OX$  и на величину  $d$  по оси  $OY$  (рис.2)

**Определение.** Квадратным трехчленом называется выражение вида  $f(x) = ax^2 + bx + c$ .

Выражение  $x^2 + px + q$  называется приведенным квадратным трехчленом.

Выделим «полный квадрат» из квадратного трехчлена

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}. \quad (1)$$

Например,  $f(x) = 2x^2 + 12x - 4 = 2(x + 3)^2 - 22$  – парабола с ветвями, направленными вверх, и координатами вершины  $(-3, -22)$ , а  $f(x) = 3 + 2x - x^2 = -(x - 1)^2 + 4$  – парабола с ветвями, направленными вниз, координатами вершины  $(1; 4)$  и осью симметрии  $x = 1$ .

### **Свойства функции, вытекающие из формулы (1):**

1. График квадратного трехчлена – парабола с вершиной в точке  $(x_b; y_b) = \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$ .
2. График функции пересекается с осью  $OY$  в точке  $y_0 = f(0) = c$ .
2. Если  $a > 0$ , то функция  $f(x) = ax^2 + bx + c$  монотонно убывает на интервале  $(-\infty; -\frac{b}{2a}]$  и монотонно возрастает на интервале  $[-\frac{b}{2a}; \infty)$ .

3. Если  $a < 0$ , то функция  $f(x) = ax^2 + bx + c$  монотонно возрастает на интервале  $(-\infty; -\frac{b}{2a}]$  и монотонно убывает на интервале  $[-\frac{b}{2a}; \infty)$ .
4. Если  $a > 0$ , то  $ax^2 + bx + c \geq \frac{4ac - b^2}{4a}$  для любого  $x \in R$ .
5. Если  $a < 0$ , то  $ax^2 + bx + c \leq \frac{4ac - b^2}{4a}$  для любого  $x \in R$ .
6. Парабола  $f(x) = ax^2 + bx + c$  симметрична относительно оси  $x = -\frac{b}{2a}$ .
7. Если существует точка  $p$  такая, что  $a \cdot f(p) < 0$ , то  $D > 0$ .

**Пример 1.1** По виду графиков функции  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , представленных на рисунках 3 и 4, определите знаки коэффициентов  $a, b, c$ .

**Решение.** У параболы на рисунке 3 ветви направлены вверх, поэтому  $a > 0$ . Координата вершины  $x_e = -\frac{b}{2a} > 0$ , следовательно  $b < 0$ . Наконец, из графика видно, что значение функции в нуле  $f(0) = c > 0$ . Таким образом,  $a > 0, b < 0, c > 0$ .

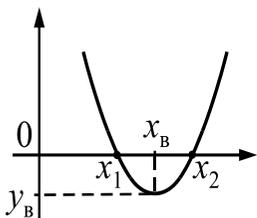


рис. 3

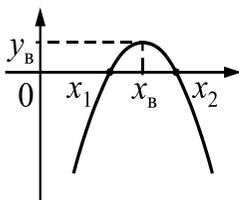


рис. 4

Аналогично, из вида график на рис. 4, получаем условия  $a < 0, b > 0, c < 0$  (ветви параболы направлены вниз,  $x_0 = \frac{-b}{2a} > 0$ , и  $f(0) = c < 0$ ).

## 1. Решение квадратных уравнений $ax^2 + bx + c = 0$

**Определение** Выражение  $D = b^2 - 4ac$  называется дискриминантом квадратного уравнения.

Из формулы (1) следует, что если  $x$  – корень квадратного уравнения, то

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}. \quad (2)$$

**ТЕОРЕМА 1** (О существовании корней квадратного уравнения)

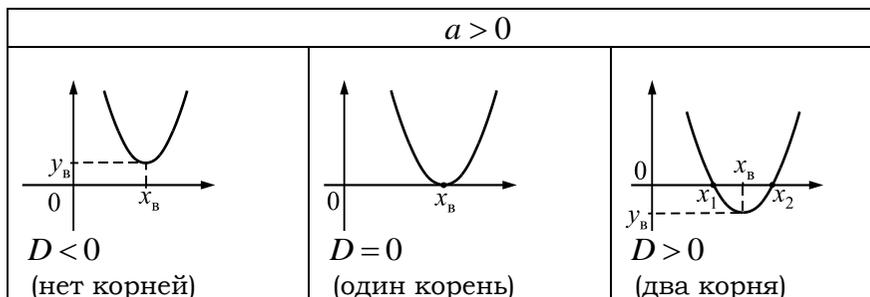
Если  $D < 0$ , то уравнение  $ax^2 + bx + c = 0$  не имеет корней.

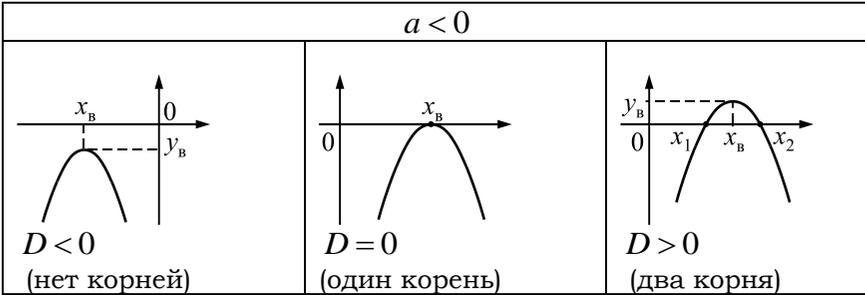
Если  $D = 0$ , то уравнение  $ax^2 + bx + c = 0$  имеет единственный корень  $x = \frac{-b}{2a}$ .

Если  $D > 0$ , то уравнение  $ax^2 + bx + c = 0$  имеет два различных корня  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ .

**Следствие.**  $x_2 - x_1 = \frac{\sqrt{D}}{a}$ .

Геометрическая интерпретация теоремы





**Пример 1.2** При каких значениях параметра  $b$  функция  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x - 3b + 1}$  определена при всех значениях  $x$ ?

**Решение.** Функция  $f(x)$  будет определена при всех значениях  $x$ , если  $x^2 + 4x - 3b + 1 \neq 0$  при всех  $x$ . Уравнение  $x^2 + 4x - 3b + 1 = 0$  не имеет корней, если  $D = 16 - 4(1 - 3b) < 0$ . Решая последнее неравенство, получаем условие  $b < -1$ . *Ответ:*  $b < -1$ .

**Пример 1.3** При каких значениях параметра  $a$  квадратное уравнение  $(a + 4)x^2 + 6x - 1 = 0$  имеет единственное решение?

**Решение.** Квадратное уравнение имеет единственное решение, если  $D = 36 + 4(a + 4) = 52 + 4a = 0$ . *Ответ:*  $a = -13$ .

**Пример 1.4** Укажите область определения и область значений функции  $f(x) = \sqrt{3 + 2x - x^2}$ .

**Решение.** Пусть  $g(x) = 3 + 2x - x^2$ . Графиком функции  $g(x)$  является парабола с ветвями, направленными вниз, и координатами вершины  $(x_b, y_b) = (1, 4)$ , кроме того, для любого  $x$  справедливо неравенство  $g(x) \leq g(1) = 4$ . Область определения функции  $f(x)$  определяется условием  $g(x) \geq 0$ , которое справедливо при  $-1 \leq x \leq 3$ . Графиком функции  $y = \sqrt{3 + 2x - x^2}$  является полу-

окружность  $y^2 = 3 + 2x - x^2 = -(x-1)^2 + 4$ . Область значений функции  $f(x) = \sqrt{g(x)}$  определяется условием  $0 \leq f(x) \leq \sqrt{4} = 2$ .

Ответ: Область определения  $- [-1; 3]$ , область значений  $- [0; 2]$ .

**Пример 1.5** Докажите, что для любых  $a, b, c \neq 0$  хотя бы одно из уравнений  $ax^2 + 2bx + c = 0$ ,  $bx^2 + 2cx + a = 0$ ,  $cx^2 + 2ax + b = 0$  имеет решение.

**Доказательство** «от противного». Пусть ни одно из уравнений не имеет решений. Тогда дискриминанты всех уравнений отрицательны:

$4b^2 - 4ac < 0$ ,  $4c^2 - 4ab < 0$ ,  $4a^2 - 4bc < 0$ . Отсюда,  $b^2 < ac$ ,  $c^2 < ab$ ,  $a^2 < bc$ . Перемножим эти неравенства и получим, что  $b^2 a^2 c^2 < abc abc$ . Противоречие.

**Пример 1.6** Докажите, что квадратный трехчлен  $f(x) = ax^2 + bx + c$  принимает целые значения при любом целом  $x$  тогда и только тогда, когда  $2a, a + b, c$  — целые числа.

**Доказательство.** Если для любого целого  $x$ ,  $f(x)$  — целое число, то  $f(0) = c$ ,  $f(1) = a + b + c$ ,  $f(-1) = a - b + c$  — целые числа. Отсюда следует, что  $a + b, 2a + c$  — целые.

Обратно, пусть  $2a, a + b, c$  — целые числа. Тогда,

$f(x) = ax^2 + bx + c = \frac{2ax(x-1)}{2} + (a+b)x + c$ . Если  $x$  — целое, то  $\frac{x(x-1)}{2}$

— целое, а  $f(x)$  — сумма трех целых чисел.

**Пример 1.7** Рассмотрим все функции  $y = x^2 + px + q$ , у которых  $p + q = 2010$ . Докажите, что графики всех этих функций проходят через одну точку.

**Доказательство.** Схема доказательства: возьмем две конкретные функции, найдем точку их пересечения и проверим, будет ли эта точка принадлежать остальным графикам. Найдем точку пересечения двух парабол, удовлетворяющих данному условию: например  $y = x^2 + 0 \cdot x + 2010$  и  $y = x^2 + x + 2009$ . Это точка

$(1; 1+p+q)=(1; 2011)$ . Легко проверить, что эта точка принадлежит графикам всех остальных функций этого семейства, так как по условию задачи для любой функции  $f(1)=1+p+q=2011$ .

**Пример 1.8** (Региональный этап олимпиады по математике 2010) Известно, что  $ax^2+bx+c > cx$  для любого  $x$ . Докажите, что  $cx^2-bx+a > cx-b$  для любого  $x$ .

**Доказательство.** Из условия задачи следует, что для любого  $x$   $f(x)=ax^2+(b-c)x+c > 0$ . Следовательно,  $a > 0$ ,  $f(0)=c > 0$ ,  $D=(b-c)^2-4ac < 0$ . Если  $g(x)=cx^2-(b+c)x+a+b$ , то условие задачи ( $\forall x: g(x) > 0$ ) будет выполнено если:  $c > 0, D_1=(b+c)^2-4c(a+b) < 0$ . В силу предыдущего  $c > 0$ , а  $D_1=b^2+c^2+2bc-4ca-4cb=(b-c)^2-4ac=D < 0$ .

**Пример 1.9** Докажите, что уравнение  $ax^2+bx+c=0$  имеет два различных корня, если  $a(4a+2b+c) < 0$ . Верно ли обратное?

**Доказательство.** Заметим, что  $4a+2b+c=f(2)$ . Пусть  $a < 0$ . Из условия задачи следует, что  $f(2) > 0$ , т.е. значение функции в точке  $x=2$  больше нуля. Из Следствия 1 Теоремы 4 следует, что корни уравнения  $x_1, x_2$  существуют и различны ( $x_1 < 2 < x_2$ ). Для случая  $a > 0$  доказательство аналогичное.

Обратное неверно, так как число 2 может не лежать между корнями параболы.

**Пример 1.10** Даны квадратные трехчлены  $f(x)$  и  $g(x)$ . Известно, что уравнение  $f(x) \cdot g(x)=0$  имеет ровно один корень, а уравнение  $f(x)+g(x)=0$  имеет ровно два корня. Докажите, что уравнение  $f(x)-g(x)=0$  не имеет корней.

**Доказательство.** Уравнение  $f(x) \cdot g(x)=0$  может иметь ровно один корень только в двух случаях:

- уравнение  $f(x)=0$  имеет один корень, а уравнение  $g(x)=0$  вообще не имеет корней или наоборот;

- уравнения  $f(x)=0$  и  $g(x)=0$  имеют по одному совпадающему корню.

Из свойств графиков квадратных трехчленов следует, что второй случай не удовлетворяет условию задачи, а из первого следует, что графики квадратных трехчленов  $f(x)$  и  $g(x)$  расположены в разных полуплоскостях относительно оси  $OX$ .

## 2. Теорема Виета

Связь между корнями квадратного уравнения и его коэффициентами устанавливает следующая

### ТЕОРЕМА Виета

Если  $x_1, x_2$  - корни квадратного уравнения  $ax^2 + bx + c = 0$ , то справедливы условия:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

**Следствие 1.** Используя теорему Виета, можно вычислять некоторые симметрические выражения от корней уравнения, не находя самих корней:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}, x_1^2 + x_2^2, \frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3}, \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}, x_1^3 + x_2^3.$$

Например:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{-b}{c}; \quad x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = \frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a};$$

$$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = \frac{b^2}{a^2} - \frac{4c}{a};$$

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2) = (x_1 + x_2)((x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2).$$

**ТЕОРЕМА 3.** (Обратная теорема Виета).

Если числа  $x_1, x_2$  удовлетворяют соотношениям  $x_1 + x_2 = -p$ ,  $x_1 \cdot x_2 = q$ , то  $x_1, x_2$  являются корнями приведенного уравнения  $x^2 + px + q = 0$ .

**ТЕОРЕМА 4.** (О разложении на линейные множители).

Если  $x_1, x_2$  – корни квадратного уравнения  $ax^2 + bx + c = 0$ , то  $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

**Следствие 1.** (Решение неравенств)

Пусть  $D > 0$  и  $x_1 \neq x_2$  – корни уравнения. Тогда справедливы утверждения:

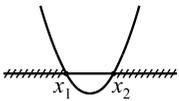
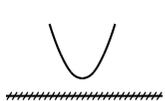
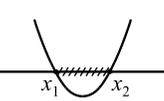
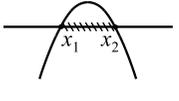
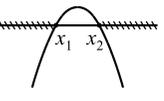
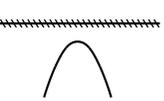
А) При  $a > 0$

- $ax^2 + bx + c \geq 0 \Leftrightarrow$  когда  $x \leq x_1$ , либо  $x \geq x_2$ .
- $ax^2 + bx + c < 0 \Leftrightarrow$  когда  $x_1 < x < x_2$ .

В) При  $a < 0$

- $ax^2 + bx + c \geq 0$  когда  $x_1 \leq x \leq x_2$ .
- $ax^2 + bx + c < 0 \Leftrightarrow$  когда  $x < x_1$  либо  $x \geq x_2$ .

Графически решения квадратичных неравенств можно представить следующим образом

	$ax^2 + bx + c > 0$		$ax^2 + bx + c < 0$	
	$D > 0$	$D < 0$	$D > 0$	$D < 0$
$a > 0$	 $x < x_1$ $x > x_2$	 $x \in R$	 $x_1 < x < x_2$	 нет решений
$a < 0$	 $x_1 < x < x_2$	 нет решений	 $x < x_1$ $x > x_2$	 $x \in R$

Следующая теорема поможет исследовать знаки корней квадратного уравнения, не вычисляя значений корней.

**ТЕОРЕМА 6.** Для того чтобы корни квадратного уравнения  $ax^2 + bx + c = 0$   $x_1, x_2$  имели одинаковые знаки необходимо и достаточно выполнение условий:  $D > 0, x_1 x_2 = \frac{c}{a} > 0$ . Более того,

если  $\frac{-b}{a} = x_1 + x_2 > 0$ , то оба корня положительны,

если  $\frac{-b}{a} = x_1 + x_2 < 0$ , то оба корня отрицательны.

Рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих возможности применения теорем 3 – 6 для решения задач.

**Пример 2.1** Найдите сумму корней всех квадратных уравнений вида  $x^2 + px - 2010 = 0$ , где  $p$  принимает все целые значения от  $-100$  до  $100$ .

**Решение.** Заметим, что это уравнение при любом значении имеет два вещественных корня ( $D = p^2 + 4 \cdot 2010 > 0$ ). По теореме Виета сумма двух корней каждого уравнения равна  $p$ , а сумма корней всех уравнений равна сумме всех целых чисел от  $-100$  до  $100$ . Ответ:  $0$ .

**Пример 2.2** При каких значениях  $d$  оба корня уравнения  $2x^2 + 3x + d = 0$  отрицательны?

**Решение.** По условию задачи сумма корней меньше нуля, а произведение – больше нуля:  $D = 9 - 8d > 0, \frac{c}{a} = \frac{d}{2} > 0$ ,

$$\frac{-b}{a} = \frac{-3}{2} < 0. \text{ Ответ: } 0 < d < \frac{9}{8}.$$

**Пример 2.3** Известно, что  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{2}$ , где  $x_1, x_2$  – корни уравнения  $x^2 + x + b = 0$ . Найдите  $b$ .

**Решение.**  $\frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2(x_1 + x_2) = x_1 \cdot x_2$ . По теореме Виета

$x_1 + x_2 = -1$ ,  $x_1 \cdot x_2 = b$ . *Ответ:*  $b = -2$ .

**Пример 2.4** Известно, что  $x_1 = 5x_2$ , где  $x_1, x_2$  – корни уравнения  $x^2 - (a+1)x + a = 0$ . Найдите  $a$ .

**Решение.** По теореме Виета  $x_1 + x_2 = 5x_2 + x_2 = 6x_2 = a + 1$ ,  
 $x_1 \cdot x_2 = 5x_2^2 = a$ . Отсюда  $x_2 = \frac{a+1}{6}$ ,  $\frac{5 \cdot (a+1)^2}{36} = a$ ,  $5(a+1)^2 = 36a$ .

Квадратное уравнение  $5a^2 - 26a + 5 = 0$  имеет два корня

$a_1 = \frac{1}{5}$ ,  $a_2 = 5$ . *Ответ:*  $a = \frac{1}{5}$ ,  $a = 5$ .

**Пример 2.5** Все коэффициенты квадратного трехчлена – целые нечетные числа. Может ли он иметь два целых корня?

**Доказательство** «от противного». Пусть уравнение  $ax^2 + bx + c = 0$  имеет два целых корня  $x_1, x_2$ . Тогда, по теореме

Виета,  $-\frac{b}{a} = x_1 + x_2$  и  $\frac{c}{a} = x_1 \cdot x_2$  – целые числа. Если  $a, b, c$  – це-

лые нечетные числа, то оба числа  $\frac{b}{a}, \frac{c}{a}$  – целые нечетные, однако

одно из чисел  $x_1 \cdot x_2, x_1 + x_2$  всегда будет четным. Противоречие. *Ответ:* не может.

**Пример 2.6** Пусть  $x_1, x_2$  – корни уравнения  $ax^2 + bx + c = 0$ .

Если  $a + b + c = 0$ , то  $x_1 = 1, x_2 = \frac{c}{a}$ . Если  $a - b + c = 0$ , то

$x_1 = -1, x_2 = \frac{-c}{a}$ .

**Доказательство.** Заметим, что  $f(1) = a + b + c$ ,  $f(-1) = a - b + c$

и по теореме Виета  $x_2 \cdot 1 = \frac{c}{a}$  или  $x_2 \cdot (-1) = \frac{c}{a}$ . Утверждение

доказано.

**Пример 2.7** Известно, что график квадратичной функции  $f(x) = ax^2 + bx + c$  проходит через точки  $A(4;0)$ ,  $B(6;0)$ ,  $C(5;-2)$ . Найдите  $a, b, c$ .

**Первое решение.** Подставим координаты точек  $A, B, C$  в уравнение функции и получим три уравнения

$14a + 4b + c = 0$ ,  $36a + 3b + c = 0$ ,  $25a + 5b + c = -1$ , решив которые можно найти коэффициенты  $a, b, c$ .

**Второе решение.** Из условия задачи следует, что точки  $x=4, x=6$  являются корнями уравнения  $ax^2 + bx + c = 0$ . Поэтому,  $f(x)$  можно разложить на линейные множители  $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x-4)(x-6)$ . Так, как  $f(5) = -2$ , то  $a = 2$ . Наконец  $ax^2 + bx + c = 2(x-4)(x-6) = 2x^2 - 20x + 48$ .

*Ответ:*  $a = 2, b = -20, c = 48$ .

**Пример 2.8** При каких значениях параметра  $b$  среди решений неравенства  $x^2 + 2x + b < 0$  содержится только три целых числа?

**Решение.** Вершина параболы имеет координаты  $(-1; b-1)$ , поэтому одна точка с целыми координатами  $x = -1$  точно находится среди решений исходного неравенства. Ближайшие к точке  $x = -1$  целые числа – это точки  $x = 0, x = -2$ , симметричные относительно вершины и либо одновременно лежат между корнями, либо одновременно не лежат. По условию задачи всего три целых лежат между корнями, поэтому это могут быть только числа  $-2, -1, 0$ , а числа  $x = -3, x = 1$  уже не удовлетворяют исходному неравенству. Таким образом, условие задачи будет выполнено, если будут выполнены условия:  $f(0) < 0, f(1) \geq 0$ . Отсюда  $b < 0, 3 + b > 0$ .

*Ответ:*  $-3 \leq b < 0$ .

**Пример 2.9** Пусть  $P(x)$  и  $Q(x)$  – приведенные квадратные трехчлены, имеющие по два корня. Оказалось, что сумма двух чисел, полученных при подстановке корней трехчлена  $P(x)$  в трехчлен  $Q(x)$  равна сумме двух чисел, полученных при подстановке двух корней  $Q(x)$  в трехчлен  $P(x)$ . Докажите, что дискриминанты квадратных трехчленов  $P(x)$  и  $Q(x)$  равны.

**Доказательство.** Пусть  $P(x) = x^2 + ax + p$ ,

$Q(x) = x^2 + bx + q$ ,  $e, f$  – корни  $P(x)$ ,  $m, n$  – корни  $Q(x)$ .

Из условия задачи

$$m^2 + am + p + n^2 + an + p = e^2 + be + q + f^2 + bf + q \Rightarrow$$

$$m^2 + n^2 + a(m+n) + 2p = e^2 + f^2 + b(e+f) + 2q = (m+n)^2 - 2mn +$$

$$a(m+n) + 2p = (e+f)^2 - 2ef + b(e+f) + 2q.$$

По теореме Виета  $e+f = -a, ef = p, m+n = -b, mn = q$ . Подставим эти значения в предыдущее выражение и получим

$$b^2 - 2q - ab + 2p = a^2 - 2p - ba + 2q \Rightarrow b^2 - 4q = a^2 - 4p. \text{ Т.е.}$$

$$D_1 = D_2.$$

**Пример 2.10**

Даны квадратные трехчлены

$f_1(x), f_2(x), \dots, f_{100}(x)$  с одинаковыми коэффициентами при  $x^2$ , с одинаковыми коэффициентами при  $x$ , но различными свободными членами; у каждого из них есть по два корня. У каждого трехчлена  $f_k(x)$  выбрали по одному корню и обозначили его через  $x_k$ . Какое значение может принимать сумма

$$f_2(x_1) + f_3(x_2) + \dots + f_{100}(x_{99}) + f_1(x_{100})?$$

**Доказательство.** Пусть  $x_1, x_2, \dots, x_{100}$  – корни трехчленов

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_{100}(x),$$

т.е.	Запишем требуемую сумму
$ax_1^2 + bx_1 + c_1 = 0,$	$ax_1^2 + bx_1 + c_2 +$
$ax_2^2 + bx_2 + c_2 = 0,$	$ax_2^2 + bx_2 + c_3 +$
.	.
.	.
$ax_{99}^2 + bx_{99} + c_{99} = 0,$	$ax_{99}^2 + bx_{99} + c_{100} +$
$ax_{100}^2 + bx_{100} + c_{100} = 0,$	$ax_{100}^2 + bx_{100} + c_1$

Легко заметить, что эта сумма состоит из тех же слагаемых, что и сумма слева, только свободные члены стоят не на своих местах.

Если мы переставим свободные члены на одно уравнение вниз, а  $c_1$  - в первое уравнение, то сумма справа будет равна сумме слева, т.е. равна нулю.

### 3. Расположение корней квадратного уравнения

Пусть  $x_1, x_2$  - корни квадратного уравнения  $ax^2 + bx + c = 0$ ,  $p$  - некоторое действительное число.

Сформулируем следующие вопросы:

- 1) При каких условиях на коэффициенты  $a, b, c$  оба корня уравнения различны и больше числа  $p$  (рис. 5);
- 2) При каких условиях на коэффициенты  $a, b, c$  оба корня уравнения различны и меньше числа  $p$  (рис. 6);
- 3) При каких условиях на коэффициенты  $a, b, c$  один корень уравнения больше числа  $p$ , а другой меньше числа  $p$  (рис. 7).

Ответы на эти вопросы дают теоремы "о расположении корней квадратного уравнения".

Ответ на первый вопрос дает следующая теорема.

**ТЕОРЕМА 7.** Для того чтобы корни квадратного уравнения  $ax^2 + bx + c = 0$  были различны и оба больше заданного числа  $p$  (рис. 5), необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$\left\{ \begin{array}{l} a > 0 \\ D > 0 \\ x_b = \frac{-b}{2a} > p \\ f(p) > 0 \end{array} \right. \quad \text{или} \quad \left\{ \begin{array}{l} a < 0 \\ D > 0 \\ x_b = \frac{-b}{2a} > p \\ f(p) < 0 \end{array} \right.$$

**Достаточность.** Пусть эти условия выполнены. Так как  $D > 0$ , то уравнение имеет различные корни -  $x_1, x_2$  ( $x_1 < x_2$ ).

Если  $a > 0$  и  $f(p) > 0$ , то  $p < x_1$  либо  $p > x_2$ , а из условия  $x_b < p$  следует, что  $p < x_1$ .

Если  $a < 0$  и  $f(p) < 0$ , то  $p < x_1$  либо  $p > x_2$ , а из условия  $x_b > p$  следует, что  $p < x_1$ . Т.е. оба корня различны и больше числа  $p$ .

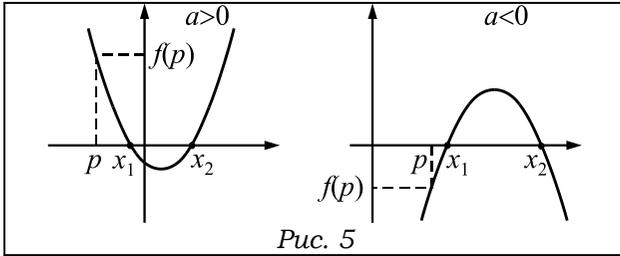


Рис. 5

**Необходимость.** Так как оба корня различны, то  $D > 0$ . Если  $x_1 > p$ ,  $x_2 > p$ , то  $x_B = \frac{x_1 + x_2}{2} > p$ . Наконец если  $a > 0$ , то  $f(p) > 0$ , а если  $a < 0$ , то  $f(p) < 0$ .

Ответ на второй вопрос дает Теорема 8, которая доказывается аналогично.

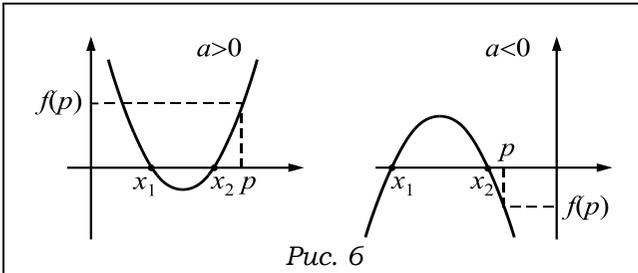


Рис. 6

**ТЕОРЕМА 8.** Для того чтобы корни квадратного уравнения  $ax^2 + bx + c = 0$  были различны и оба меньше числа  $p$  (рис. 6), необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

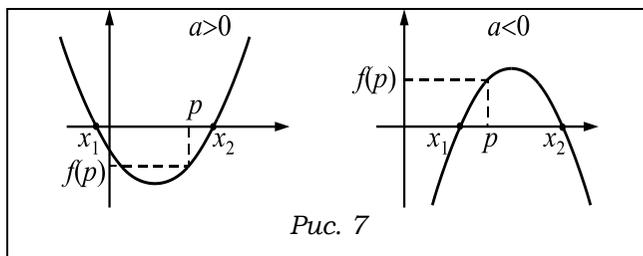
$$\left\{ \begin{array}{l} a > 0 \\ D > 0 \\ x_b = \frac{-b}{2a} < p \\ f(p) > 0 \end{array} \right. \quad \text{или} \quad \left\{ \begin{array}{l} a < 0 \\ D > 0 \\ x_b = \frac{-b}{2a} < p \\ f(p) < 0 \end{array} \right.$$

Ответ на третий вопрос дает

**ТЕОРЕМА 9.** Для того чтобы корни квадратного уравнения  $ax^2 + bx + c = 0$  были расположены по разные стороны от числа  $p$  (рис. 7), необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$\left\{ \begin{array}{l} a > 0 \\ f(p) < 0 \end{array} \right. \quad \text{или} \quad \left\{ \begin{array}{l} a < 0 \\ f(p) > 0 \end{array} \right.$$

**Необходимость.** Если  $x_1, x_2$  – корни уравнения, причем  $x_1 < p < x_2$ , то из свойств параболы следует, что  $a \cdot f(p) < 0$ .



**Достаточность.** Пусть  $a < 0$ ,  $f(p) = a \left( p + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} < 0$ .

Тогда  $\frac{D}{4a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a} > a \left( p + \frac{b}{2a} \right)^2$ , т.е.  $D > 0$ , а из условия  $f(p) < 0$

следует, что  $x_1 < p < x_2$ .

Теорема доказана.

**Алгоритмическая простота и наглядность геометрического представления теорем о расположении корней квадратного уравнения делает их применение эффективным способом решения задач с параметрами.**

**Пример 3.1** При каких значениях параметра  $a$  число 2 находится между корнями уравнения  $x^2 + (4a + 5)x + 3 - 2a = 0$ ?

**Решение.** Так как ветви параболы направлены вверх, то условие задачи будет выполнено, если

$$f(2) = 4 + 2 \cdot (4a + 5) + 3 - 2a = 6a + 17 < 0. \quad \text{Ответ: } a < -\frac{17}{6}.$$

**Пример 3.2** При каких значениях параметра  $b$  оба корня уравнения  $x^2 - 6bx + (2 - 2b + 9b^2) = 0$  больше 3?

**Решение.** Из теоремы 6 получаем условия

$$\begin{cases} D = 8b - 8 > 0 \\ x_b = \frac{6b}{2} > 3 \\ f(3) = 9b^2 - 20b + 11 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b > 1 \\ b > \frac{11}{9} \end{cases} \Rightarrow b > \frac{11}{9}.$$

**Пример 3.3** При каких значениях параметра  $p$  уравнение  $px^2 - 4x + 1 = 0$  имеет только одно положительное решение?

**Решение.** Возможны три случая, в которых исходное уравнение может иметь только одно положительное решение:

1)  $p = 0$  – квадратное уравнение превращается в линейное и оно имеет одно положительное решение.

2)  $D = 0$  – квадратное уравнение имеет один положительный корень.

3)  $D > 0$  – квадратное уравнение имеет два корня, однако положительный корень только один.

Рассмотрим все случаи:

$$1) p = 0, x_0 = \frac{1}{4} > 0. \quad 2) D = 16 - 4p = 0, p = 4, x_0 = \frac{1}{2} > 0.$$

$$3) D = 16 - 4p > 0, p \cdot f(0) < 0;$$

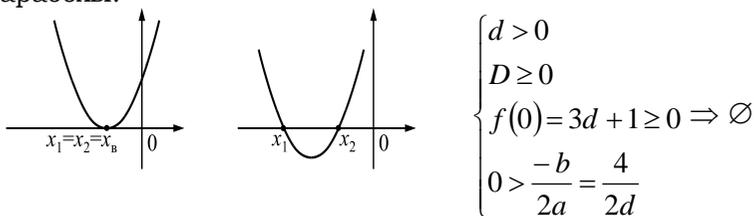
$f(0)=1$ , поэтому  $p \cdot f(0) < 0$  при  $p < 0$ . Ответ:  $p \leq 0, p=4$ .

**Пример 3.4** При каких значениях параметра  $d$  неравенство  $dx^2 - 4x + 3d + 1 > 0$  выполняется при всех значениях  $x > 0$ ?

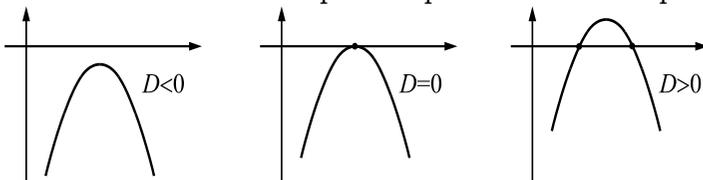
**Решение.**  $D = 16 - 4d(3d + 1) = 16 - 12d^2 - 4d = -4(3d + 4)(d - 1)$

Если  $d > 0, D < 0$ , то неравенство  $f(x) > 0$  выполняется при всех  $x$ , в том числе, и при  $x > 0$ . Следовательно, при  $d > 1$  условие задачи выполнено.

Если  $d > 0, D \geq 0$ , то возможны два варианта расположения параболы.



Если  $d < 0$  возможны 3 варианта расположения параболы.



Во всех трех случаях парабола либо не больше нуля для любого  $x$ , либо больше нуля только на ограниченном отрезке  $(x_1, x_2)$ . Следовательно, условие задачи не может быть выполнено при всех  $d < 0$ . Ответ:  $d > 1$ .

**Пример 3.5** При каких значениях  $a$  все решения неравенства  $ax^2 - x + 1 - a < 0$  удовлетворяют условию  $0 < x < 1$ ?

**Решение.**

Если  $a < 0$  (ветви параболы направлены вниз), то неравенство  $f(x) < 0$  выполняется либо на всей числовой прямой (при  $D < 0$ ), либо на двух бесконечных лучах (при  $D \geq 0$ ), а по условию задачи

неравенство должно выполняться на ограниченном интервале  $(0;1)$ . Таким образом, при  $a < 0$  задача не имеет решений.

Пусть  $a > 0$ ,  $x_1, x_2$  – корни уравнения  $ax^2 - x + 1 - a = 0$ . Из условия задачи следует, что множество решений неравенства  $ax^2 - x + 1 - a < 0$  – множество  $(x_1; x_2)$  содержится в интервале  $(0;1)$ . Графическое изображение параболы в этом случае будет следующим:



Из теорем 7, 8 получаем условия:

$$\begin{cases} a > 0 \\ D = 1 - 4(1-a) \cdot a = 4a^2 - 4a + 1 > 0 \\ f(0) = 1 - a \geq 0 \\ f(1) = a - 1 + 1 - a \geq 0 \\ 0 < x_b = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{2a} < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \\ 2a \neq 1 \\ a \leq 1 \\ a \in \mathbb{R} \\ a > \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2} < a \leq 1.$$

**Пример 3.6** При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $4x^2 - 4x - 3a = 0$  имеет хотя бы одно решение по модулю меньше 1?

**Решение.** Условие задачи будет выполнено, если хотя бы один из корней принадлежит интервалу  $[-1; 1]$ , т.е. в одном из следующих случаев:

- 1) только один корень уравнения принадлежит отрезку  $[-1; 1]$  ( $-1 < x_1 < 1 < x_2$ ) или ( $x_1 < -1 < x_2 < 1$ );
- 2) оба корня уравнения принадлежат отрезку  $[-1; 1]$  ( $-1 < x_1 < x_2 < 1$ );

В первом случае получаем условие  $f(-1) \cdot f(1) < 0$ . Откуда следует, что  $0 \leq a \leq \frac{8}{3}$ .

Второй случай описывается системой неравенств:  
 $D \geq 0$ ,  $f(-1) \geq 0$ ,  $f(1) \geq 0$ ,  $-1 \leq x_b \leq 1$ .

$$\begin{cases} D = 16 + 48a \geq 0 \\ f(-1) = 8 - 3a \geq 0 \\ f(1) = -3a \geq 0 \\ -1 < x_b = -\frac{b}{2a} = \frac{4}{8} < 1 \end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{3} \leq a \leq 0.$$

Ответ:  $-\frac{1}{3} \leq a \leq \frac{3}{8}$ .

#### 4. Решение задач повышенной сложности

**Пример 4.1** Значение квадратного трехчлена в двух последовательных целых числах равны соответственно квадратам двух последовательных натуральных чисел. Докажите, что значения трехчлена во всех целых точках – точные квадраты.

**Доказательство.** Пусть  $f(x) = x^2 + bx + c$ ,  $m, k$  – исходные натуральные числа, т.е.,  $m^2 + bm + c = k^2$ ,

$(m+1)^2 + b(m+1) + c = (k+1)^2$ . Вычтем первое уравнение из второго и получим  $b = 2(k-m)$ . Тогда из первого уравнения получаем  $c = k^2 - m^2 - bm = k^2 - m^2 - 2(k-m)m = (k-m)^2$ . Пусть теперь  $p$  – произвольное целое число. В силу предыдущего,  
 $f(p) = p^2 + bp + c = p^2 + 2(k-m)p + (k-m)^2 = (p - (k-m))^2$ .

**Пример 4.2** График линейной функции касается графика квадратичной функции  $y = f(x)$ , а график квадрата этой линейной функции получается из графика функции  $f(x)$  сдвигом вниз на величину  $p$ . Найдите число  $p$ . (Докажите, что число  $p$  для всех таких функций единственное)

**Доказательство.** Пусть  $g(x)=kx+d$ ,

$f(x)=ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a}$  – исходные функции. Тогда

$g^2(x)=(kx+d)^2=k^2\left(x+\frac{d}{k}\right)^2$  – парабола со старшим коэффициентом

$k^2$  и координатами вершины  $\left(-\frac{d}{k}; 0\right)$ . По условию задачи

эта парабола получается из  $f(x)$  сдвигом вниз на величину  $p$ :

$f(x)-p=g^2(x)$ . Учитывая свойства вертикального переноса параболы, получаем условия:

$$a=k^2, -\frac{b}{2a}=-\frac{d}{k}, c-\frac{b^2}{4a}-p=0. \text{ Т.е., } k^2=a, bk=2ad, p=c-\frac{b^2}{4a}.$$

Условие касания линейной функции и параболы равносильно условию: уравнение  $ax^2+bx+c=kx+d$  имеет единственное решение, т.е.  $D=(b-k)^2-4a(c-d)=0$ .

Отсюда получаем, что  $c=\frac{b^2+k^2}{4a}$ . В силу предыдущего,

$$p=c-\frac{b^2}{4a}=\frac{b^2+k^2}{4a}-\frac{b^2}{4a}=\frac{k^2}{4a}=\frac{1}{4}. \text{ Ответ: } p=\frac{1}{4}.$$

**Пример 4.3** При каких значениях параметра  $p$  уравнение  $(8p-23)x^2+(11p-38)x+13-3p=0$  имеет ровно  $(2-p)(p-4)$  различных положительных решений.

**Решение.** Пусть  $(2-p)(p-4)=n$  – число решений исходного уравнения. Так как уравнение квадратное, то может иметь два корня, один или не иметь корней (иметь ноль корней).

Случай  $n=2$  невозможен, так как уравнение  $(2-p)(p-4)=2$  не имеет действительных решений ( $D<0$ ).

Если  $n=1$ , то уравнение  $(2-p)(p-4)=1$  имеет один корень  $p=3$ . Однако при  $p=3$  исходное уравнение превращается в уравнение  $x^2-5x+4=0$ , которое имеет два корня  $x=1, x=4$ . Противоречие (мы рассматриваем случай  $n=1$ ).

Если исходное уравнение не имеет корней, то уравнение  $(2-p)(p-4)=0$  имеет два корня  $p=2, p=4$ .

При  $p=2$  исходное уравнение  $-7x^2-16x+7=0$  точно имеет один положительный корень и один отрицательный ( $f(0) > 0$ ). Следовательно, в этом случае рассматриваемое условие (ноль корней) не выполняется.

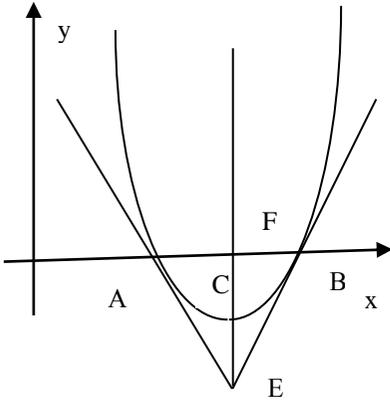
При  $p=4$  исходное уравнение  $9x^2+6x+1=0$  имеет только один отрицательный корень  $x=-\frac{1}{3}$ , т.е. имеет ноль положительных. *Ответ:*  $p=4$ .

**Пример 4.4** Парабола  $y=x^2+px+q$  пересекает ось абсцисс в точках  $A, B$ . Известно, что угол между касательными к параболе, проведенным в точках  $A, B$ , равен  $90^\circ$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , где  $C$  – вершина параболы.

**Решение.** Пусть  $x_1, x_2$  – корни уравнения  $x^2+px+q=0$ ,  $x_2-x_1=\sqrt{D}$ ,  $A(x_1; 0)$  и  $B(x_2; 0)$  – точки пересечения параболы с осью  $OX$ ,  $C(\frac{-p}{2}; \frac{-D}{4})$  – вершина параболы,  $E$  – точка пересечения касательных  $EA$  и  $EB$ .

Площадь треугольника  $ABC$  можно вычислить по формуле

$$S = \frac{1}{2}|AB||EF| = \frac{1}{2}(x_2-x_1) \cdot \frac{D}{4} = \frac{D\sqrt{D}}{8}.$$



Точки  $A, B$  симметричны относительно оси параболы  $x = \frac{-p}{2}$ , точка  $E$  также лежит на оси симметрии. Следовательно,  $ABC$  – равнобедренный прямоугольный треугольник, в котором  $\angle ABE = \angle BAE = 45^\circ$ . Уравнение касательной  $BE$ , с угловым коэффициентом 1 (угол  $45^\circ$ ) проходящей через точку  $(x_2; 0)$  имеет вид  $Y_2 = x - x_2$ .

Условие касания прямой  $Y = x - x_2$  и параболы  $y = x^2 + px + q$  можно сформулировать следующим образом: уравнение  $x^2 + px + q = x - x_2$  имеет единственное решение (т.е. дискриминант равен нулю):

$$0 = D = (p - 1)^2 - 4(q + x_2) = p^2 - 2p + 1 - 4q + x_2 =$$

$$p^2 - 2p + 1 - 4q - 4 \cdot \frac{-p + \sqrt{D}}{2} = p^2 - 4q + 1 - 2\sqrt{D} = (\sqrt{D} - 1)^2.$$

Таким образом,  $\sqrt{D} = 1$ ,  $S = \frac{D\sqrt{D}}{8} = \frac{1}{8}$ . Ответ:  $S = \frac{1}{8}$ .

**Пример 4.5** Найдите все значения параметра  $a$ , при которых наименьшее значение функции  $f(x) = 2ax + |x^2 - 8x + 7|$  меньше 1.

**Решение.** "Раскроем модуль": Если  $x^2 - 8x + 7 \geq 0$ , то  $f(x) = x^2 + 2(a - 4)x + 7$  - парабола с ветвями, направленными вверх и координатами вершины  $x_b = 4 - a$ . А если  $x^2 - 8x + 7 < 0$ , то график  $f(x) = -x^2 + 2(a + 4)x + 7$  - парабола с ветвями, направленными вниз. Возможны два варианта расположения вершины первой параболы:

1)  $4 - a \in [1; 7]$ , т.е.  $-3 \leq a \leq 3$ , тогда наименьшее значение будет достигаться в той точке, которая находится дальше от вершины параболы. При  $0 \leq a \leq 3$  наименьшее значение функции будет достигаться в точке  $x=1$  и  $f(1) = 2a < 1 \Rightarrow 0 \leq a < \frac{1}{2}$ . При  $-3 \leq a \leq 0$  наименьшее значение функции будет достигаться в точке  $x=7$  и  $f(7) = 14a < 1 \Rightarrow -3 \leq a \leq 0$ . В итоге в первом случае получаем условие:  $-3 \leq a < \frac{1}{2}$ .

2)  $4 - a \notin [1; 7]$ , т.е.  $a < -3$  или  $a > 3$ . Тогда наименьшее значение будет достигаться в вершине параболы  $x_b = 4 - a$  и  $f(4 - a) = (4 - a)^2 + 2(a - 4)(4 - a) + 7 = 8a - 9 - a^2 < 1$ . Отсюда получаем условие  $a^2 - 8a + 10 > 0 \Rightarrow a < 4 - \sqrt{6}$  или  $a > 4 + \sqrt{6}$ . Т.е. во втором случае получим условие  $a < -3$  или  $a > 4 + \sqrt{6}$ . Объединим оба варианта. *Ответ:*  $a < \frac{1}{2}; a > 4 + \sqrt{6}$ .

**Пример 4.6** Найдите все квадратные трехчлены  $p(x)$  с целыми коэффициентами, удовлетворяющие неравенству  $x^2 + x + 1 \leq p(x) \leq 2x^2 + 2x + 2$  для любых значений  $x$ .

**Решение.** Пусть  $p(x) = ax^2 + bx + c$ . Из свойств параболы следует, что если  $p(x) \geq x^2 + x + 1$ , то  $(a - 1)x^2 + (b - 1)x + c - 1 \geq 0$  для всех  $x$  и должно выполняться условие  $a - 1 \geq 0$ . Аналогично, если  $p(x) \leq 2x^2 + 2x + 2$ , то  $(2 - a)x^2 + (2 - b)x + 2 - c \geq 0$  для всех  $x$  и  $2 - a \geq 0$ . Таким образом, справедливы неравенства  $1 \leq a \leq 2$ . Если  $a$  — целое, то  $a = 1$  либо  $a = 2$ .

Если  $a = 1$ , то неравенство  $(b - 1)x + c - 1 \geq 0$  выполняется для любого  $x$ , а это возможно только при условии  $b = 1, c \geq 1$ .

Если  $a = 2$ , то неравенство  $(2 - b)x + 2 - c \geq 0$  выполняется для любого  $x$ , а это возможно только при условии  $b = 2, 2 \geq c$ .

Таким образом, исходным условиям удовлетворяют следующие варианты  $p(x)$ :  $x^2 + x + 1$ ,  $x^2 + x + 2$ ,  $2x^2 + 2x + 1$ ,  $2x^2 + 2x + 2$ .

Очевидно, что первый и четвертый варианты удовлетворяют условию задачи. Если  $p(x) = x^2 + x + 2$ , то неравенства  $x^2 + x + 1 \leq x^2 + x + 2 \leq 2x^2 + 2x + 2$  должны выполняются для всех  $x$ . Тогда неравенство  $0 \leq x^2 + x$  должно выполняться для любого  $x$ , а это неверно. Если  $p(x) = 2x^2 + 2x + 1$ , то неравенства  $x^2 + x + 1 \leq 2x^2 + 2x + 1 \leq 2x^2 + 2x + 2$  должны выполняются для всех  $x$ . Тогда неравенство  $0 \leq x^2 + x$  должно выполняться для любого  $x$ , а это опять неверно.

Ответ:  $p(x) = x^2 + x + 1$  или  $p(x) = 2x^2 + 2x + 2$ .

**Пример 4.7** Квадратный трехчлен  $x^2 + ax + b$  имеет целые корни по модулю больше 2. Докажите, что число  $a + b + 1$  – составное.

**Решение.** Пусть  $f(x) = x^2 + ax + b$  имеет целые корни. Тогда  $f(x) = (x - p)(x - q)$ , где  $p, q$  – целые числа, по модулю больше 2. Что за число  $1 + a + b$ ? Легко заметить, что  $1 + a + b$  – значение трехчлена при  $x = 1$ . Тогда  $1 + a + b = f(1) = (1 - p)(1 - q)$ , причем каждое из чисел  $1 - p$  и  $1 - q$  – целое число, не равное единице. Следовательно,  $1 + a + b$  раскладывается в произведение целых чисел, не равных единице, т.е. является составным.

**Пример 4.8** Рассматриваются многочлены  $x^2 + px + q$  с целыми коэффициентами, при этом  $p + q = 30$ . Сколько таких многочленов имеют целые корни?

**Решение.** Так как многочлен имеет целые корни, то  $f(x) = (x - n)(x - m)$ , где  $n, m$  – целые числа. Тогда из разложения на линейные множители и условия задачи получаем, что простое число 31 раскладывается в произведение целых чисел:  $f(1) = (1 - x_1)(1 - x_2) = 1 + p + q = 31$ . Отсюда, например,  $x_1 - 1 = 1, x_2 - 1 = 31 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 32$ , а по теореме Виета

$p = -(x_1 + x_2) = -34, q = x_1 \cdot x_2 = 64$ , т.е. условию задачи отвечает только один многочлен. Ответ:  $x^2 - 34x + 64$ .

**Пример 4.9** Оба корня многочлена  $f(x) = x^2 + (3a + 10)x + 5b - 14$  и значение  $f(1)$  являются простыми числами. Найдите корни многочлена и значения параметров  $a$  и  $b$ .

**Решение.** По условию задачи  $f(x) = (x - p)(x - q)$ , где  $p, q$  — простые числа. Известно, что  $f(1) = (1 - x_1)(1 - x_2)$ ,  $x_1, x_2$  — три простых числа. Если  $x_1 - 1 = 1$ , то  $x_2$  и  $x_2 - 1$  одновременно являются простыми числами, что возможно только в случае  $x_2 - 1 = 2, x_2 = 3$ . Тогда  $f(x) = (x - 2)(x - 3) = x^2 - 5x + 6$ . Следовательно,  $3a + 10 = -5, 5b - 14 = 6$  и  $a = -5, b = 4$ .

Ответ:  $a = -5, b = 4$ .

## 6. Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислите  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ , где  $x_1, x_2$  — корни уравнения

$$3x^2 - 2x - 6 = 0.$$

2. Вычислите  $x_1^3 + x_2^3$ , где  $x_1, x_2$  — корни уравнения  $x^2 + 2x - 9 = 0$ .

3. Известно, что  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{2}$ , где  $x_1, x_2$  — корни уравнения

$$x^2 + x + a = 0. \text{ Найдите } a.$$

4. При каких значениях  $a$  функция  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 2ax - 4a}$  определена при всех значениях  $x$ ?

5. При каких  $a$  уравнение  $\frac{x^2 - ax + 1}{x + 5} = 0$  имеет единственное решение?

6. При каких  $k$  условие  $\frac{x^2 + kx - 2}{x^2 - x + 1} < 2$  выполняется для всех  $x$ ?

7. Для всякого  $a$  определите число решений уравнения  $|x^2 - 2x - 3| = a$ .
8. При каком значении параметра  $p$  уравнение имеет два различных положительных корня  $(1-p)x^2 + 2px - (p+2) = 0$ ?
9. Найдите все значения  $m$ , при которых неравенство  $x^2 + mx + m^2 + 6m < 0$  выполняется для всех  $1 \leq x \leq 2$ ?
10. При каком значении параметра  $a$  любое значение  $x$ , удовлетворяющее неравенству  $ax^2 + (1-a^2)x - a > 0$ , по модулю меньше 2?
11. При каком значении параметра  $a$  только один корень уравнения  $x^2 + 2(a-4)x + 16 - 5a = 0$  удовлетворяет условию  $x > 3$ ?
12. При каких значениях  $a$  из неравенства  $0 \leq x \leq 1$  следует неравенство  $(a^2 + a - 2)x^2 - (a+5)x - 2 \leq 0$ ?
13. При каких значениях  $p$  корни уравнения  $5x^2 - 4(p+3)x + 4 - p^2 = 0$  противоположны по знаку?
14. При каких значениях  $a$  ровно один корень уравнения  $x^2 + 2ax + 3a - 2 = 0$  удовлетворяет условию  $x < -1$ ?
15. Найдите области определения и области значений функций  $y = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$ ,  $y = \sqrt{2 - x - x^2}$ .
16. Найдите корни квадратного трехчлена, если известно, что сумма его коэффициентов равна 2, а  $(4; -2,5)$  – координаты его вершины.
17. Найдите все значения  $a$ , при которых функции  $y = x^2 - ax - a$  и  $y = (1+a)x^2 + 2x$  имеют не более одной общей точки.
18. Найдите все значения  $a$ , при которых графики функций  $y = (a+5)x^2 - 7$ ,  $y = (3a+15)x - 4$  не имеют общих точек.
19. Найдите все значения параметра  $a$ , при которых  $\min_{[0;2]} (4x^2 - 4ax + a^2 - 2a + 2) = 3$ .

20. Найдите все значения параметра  $a$ , при которых  $\max_{[0;1]}(-x^2 + 2ax - a^2 - 2a - 3) = -2$ .
21. Найдите все значения параметра  $a$ , при которых значения квадратного трехчлена  $f(x) = x^2 - 2ax + a^2 + a - 2$  положительны при любом  $x \in [-1; 1]$ .
22. Найдите все значения параметра  $a$ , при которых уравнение  $x^2 - 4ax + 2a + 2 = 0$  имеет хотя бы одно положительное решение.
23. При каких значениях параметра  $a$  множество решений системы 
$$\begin{cases} x^2 + (a+4)x + 4a \leq y \\ 3x + y - (2a+4) \leq 0 \end{cases}$$
 содержит отрезок  $[-2; -1]$  оси  $OX$ ?
24. При каких значениях параметра  $k$  один из корней уравнения  $x^2 - (2k+1)x + k^2 + 2 = 0$  вдвое больше другого?
25. При каком целом значении параметра  $a$  сумма квадратов корней уравнения  $x^2 + ax + a - 2 = 0$  будет наименьшей?
26. При каких значениях параметра  $a$  неравенство  $\frac{2-ax-x^2}{1-x+x^2} \leq 3$  справедливо для всех  $x$ ?
27. При каких значениях параметра  $m$  квадратный трехчлен  $f(x) = (6m-5)x^2 - 5(m-1)x + 2m - 6$  есть полный квадрат?
28. При каких значениях параметра  $p$  оба корня уравнения  $x^2 + px + p^2 - 1 = 0$  принадлежат интервалу  $[0; 4]$ ?
29. При каких значениях параметра  $a$  только один корень уравнения  $x^2 - 4x + a = 0$  принадлежит интервалу  $[0; 1]$ ?
30. Найдите все значения параметра  $a$ , при которых уравнение  $ax^2 + (3+4a)x + 2a^2 + 4a + 3 = 0$  имеет только целые корни.
31. Квадратное уравнение  $x^2 - 6px + q = 0$  имеет два различных корня  $x_1, x_2$ . Известно, что числа  $p, x_1, x_2, q$  – последовательные члены геометрической прогрессии. Найдите  $x_1, x_2$ .
32. График параболы проходит через точки  $(1; 0), (-5; 0), (0; 10)$ . Найдите значение параболы при  $x = 2$ .

**33.** При каких значениях параметра  $a$  среди решений неравенства  $x^2 - (2a - 1)x - 2a < 0$  содержится только три целых положительных числа?

**34.** При каких значениях параметра  $a$  неравенство  $\frac{x + 3a - 5}{x + a} > 0$  справедливо для всех  $x$  таких, что  $1 \leq x \leq 4$ ?

**35.** Найдите все значения параметра  $a$ , при которых уравнение  $ax^2 + (2a - 5)x + a - 6 = 0$  имеет на отрезке  $[0; 2]$  единственный корень.

**36.** Пусть  $f(x) = x^2 + (3a + 10)x + 5b - 14$ . Оба корня уравнения  $f(x) = 0$  и значение  $f(1)$  являются простыми числами. Найдите значения параметров  $a, b$  и корни уравнения.

**37.** Найдите целые значения параметров  $a$  и  $b$ , при которых корни уравнения  $x^2 + (2a + 9)x + 3b + 5 = 0$  являются различными целыми числами, а коэффициенты  $2a + 9$  и  $3b + 5$  – простые числа.

**38.** Найдите все значения параметра  $a$ , при которых уравнение  $x^2 - (a + 1)x + a - 1 = 0$  имеет два корня, разность которых равна их произведению.

**39.** Найдите все значения параметра  $a$ , при которых уравнение  $3x^2 - 2a(x - 1) - 2 = 0$  имеет два корня, сумма квадратов которых равна их произведению.

**40.** Найдите все значения параметра  $a$ , при которых график функции  $y = (a - 1)x^2 + 2ax + 3a - 2$  касается оси абсцисс.

**41.** Найдите все значения  $a$ , при которых уравнение  $\frac{x^2 + 3(2 - a)x + 2a^2 - 7a + 5}{x^2 - x - 6} = 0$  имеет единственное решение.

**42.** Найдите все значения  $a$ , при которых неравенство  $\frac{x^2 - 8x + 20}{ax^2 + 2(a + 1)x + 9a + 4} < 0$  выполняется при всех значениях  $x$ .

**43.** Найдите все значения параметра  $a$ , при которых из неравенства  $x \geq 1$  следует неравенство  $2x^2 + (a - 1)x - (a^2 - 11a + 28) \geq 0$

- 44.** Найдите все значения параметра  $a$ , при которых из неравенства  $x^2 - (3a+1)x + a > 0$  следует неравенство  $x > 1$ .
- 45.** Найдите все значения параметра  $a$ , при которых все корни уравнения  $x^2 - 2ax + a^2 - a = 0$  больше  $-2$  и меньше  $6$ .
- 46.** Найдите все значения параметра  $a$ , при которых один из корней уравнения  $x^2 + 2(a-2)x + 9 = 0$  принадлежит интервалу  $(1; 2)$ , а другой – нет.
- 47.** Ветви параболы  $y = 4ax^2 + 12ax + 9a - 1$  направлены вниз. Докажите, что парабола не пересекает ось абсцисс.
- 48.** Квадратный трехчлен  $f(x) = x^2 + bx + c$  имеет один корень. Кроме того, уравнение  $f(2x-3) + f(3x+1) = 0$  имеет ровно один корень. Найдите корень уравнения  $f(x) = 0$ .
- 49.** Квадратный трехчлен  $f(x)$  имеет один корень. Кроме того, уравнение  $f(2x-3) + f(3x+1) = 0$  имеет ровно один корень. Найдите коэффициенты  $b$  и  $c$ .
- 50.** Ветви параболы  $y = 9ax^2 + 12ax + 4a - 1$  направлены вверх. Докажите, что парабола пересекает ось абсцисс в двух точках.
- 51.** При каком целом значении  $a$  уравнения  $4x^2 - (2a+1)x - 2 = 0$  и  $7x^2 + (3a-1)x - 44 = 0$  имеют общий корень?
- 52.** При каком целом значении  $m$  уравнения  $x^2 + mx + 1 = 0$  и  $x^2 + x + m = 0$  имеют общий корень?
- 53.** Найдите все значения параметра  $a$ , для которых неравенство  $\frac{ax^2 + 6x - 9a - 9}{x - 4} > 0$  выполняется при всех  $x < -1$ ?
- 54.** Две параболы: первая вида  $y = x^2 + ax + b$ , а вторая вида  $y = -x^2 + cx + d$  касаются в начале координат – точке  $O$ . Через точку  $D$  – вторую точку пересечения первой параболы с осью  $Ox$ , проведена вертикальная прямая, которая пересекает вторую параболу в точке  $A$ , а общую касательную к параболам – в точке  $B$ .

Докажите, что отношение  $DA:DB$  не зависит от коэффициентов  $a, b, c, d$  и найдите это отношение.

**55.** Известно, что для трех последовательных натуральных значений аргумента квадратичная функция  $f(x)$  принимает соответственно значения  $6, 5, 5$  найдите наименьшее возможное значение  $f(x)$ .

**Ответы к задачам 1-53:**

1.  $-\frac{1}{3}$  \ 2.  $-62$  \ 3.  $-2$  \ 4.  $(-4; 0)$  \ 5.  $\pm 2, \frac{26}{5}$  \ 6.  $(-2; 6)$  \ 7. 2 при  $a > 4$ , 3 при  $a = 4$ , 4 при  $0 < a < 4$ , 2 при  $a = 0$ , нет при  $a < 0$
8.  $p < -2, p \in (1; 2)$  \ 9.  $\frac{-7+3\sqrt{5}}{2} < m < -4+2\sqrt{3}$  \ 10.  $(-2; -0.5)$  \
11.  $a \leq -1$  \ 12.  $(-3; 3)$  \ 13.  $|p| > 2$  \ 14.  $a \leq 1$  \
15.  $[-1; 3], [0; \infty); [-2; 1], [0; 1.5]$  \ 16.  $4 \pm \sqrt{5}$  \ 17.  $a \leq -\frac{2}{3}, a \geq 2$  \
18.  $\frac{-19}{3} < a < -5$  \ 19.  $a = 1 - \sqrt{2}, a = 5 + \sqrt{10}$  \ 20.  $a = -1$  \
21.  $a < \frac{-3 - \sqrt{13}}{2}, \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \leq a \leq 2$  \ 22.  $a < -1, a \geq 0$  \ 23.  $-3.5 \leq a \leq 1$  \
24.  $k = 4$  \ 25.  $a = 1$  \ 26.  $-1 < a < 7$  \ 27.  $m = 5$  \ 28.  $-\frac{4}{3} \leq p \leq -1$  \
29.  $0 < a < 3$  \ 30.  $a = 0, a = -\frac{1}{2}, a = \frac{3}{2}$  \
31.  $x_1 = -3, x_2 = 9, x_1 = 2, x_2 = 4$  \ 32.  $-14$  \ 33.  $1 < a \leq \frac{3}{2}$  \
34.  $a \in (-\infty; -4) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$  \ 35.  $\frac{16}{9} \leq a < 6$  \ 36.  $x_1 = 2; x_2 = 3; a = -5; b = 4$  \
37.  $a = -3; b = -1.38. a = 2$  \ 39.  $\emptyset$  \ 40.  $a = 0.5$  \ 41.  $a = 1, a = 1.5$  \ 42.  $a < -0.5$  \ 43.  $[3; 9]$  \ 44.  $\emptyset$  \ 45.  $[0; 4]$  \ 46.  $(1.2; 2]$  \ 48.  $x = -11$  \ 49.  $b = 22, c = 121$  \ 51.  $a = 3$  \ 52.  $m = -2$  \ 53.  $[-4.2; 0]$  \ 54.  $2:1$  \ 55.  $\frac{39}{8}$  \

## 7. Задачи повышенной сложности<sup>1</sup>

1. Даны числа  $a, b, c$ . Известно, что для любого  $x$  выполняются неравенства  $ax^2 + bx + c \geq bx^2 + cx + a \geq cx^2 + ax + b$ . Докажите, что  $a = b = c$ .
2. Пусть  $f(x), g(x), h(x)$  – три квадратных трехчлена с положительными коэффициентами. Известно, что каждый из них имеет хотя бы один общий корень с суммой других. Докажите, что многочлены  $f(x), g(x), h(x)$  имеют общий корень.
3.  $ax^2 + 2bx + c, bx^2 + 2cx + a, cx^2 + 2ax + b$  – квадратные трехчлены с положительными коэффициентами, причем любые два из них имеют общий корень. Докажите, что  $a = b = c$ .
4. На параболе  $y = x^2$  выбраны четыре точки  $A, B, C, D$  так, что прямые  $AB$  и  $CD$  пересекаются на оси ординат. Найдите абсциссу точки  $D$ , если абсциссы точек  $A, B, C$  равны соответственно  $a, b, c$ .
5. Найдите все целые значения  $a$ , при которых уравнение  $x^2 + ax + a = 0$  имеет целые корни.
6. Из квадратного трехчлена  $ax^2 + bx + c$  получили три квадратных трехчлена:  $(a+1)x^2 + bx + c, ax^2 + (b+1)x + c, ax^2 + bx + c + 1$ . Оказалось, что любые два из них имеют общий корень. Докажите, что сумма коэффициентов квадратного трехчлена – целое число.
7. Решите уравнение  $f(f(f(f(f(x)))))) = 0$ , где  $f(x) = x^2 + 12x + 30$ .
8. Пусть уравнение  $x^2 + px + q = 0$  имеет корни. Сколько корней имеет уравнение  $f(x) + f(x + \sqrt{D}) = 0$ ?
9. При каких значениях параметра  $a$  сумма корней уравнения  $ax^2 + x - 8a + 4 = 0$  меньше 1, а произведение больше 3?
10. Произведение четырех корней уравнений  $x^2 + 2bx + c = 0, x^2 + 2cx + b = 0$  равно единице. Найдите  $b, c$ .

---

❖ <sup>1</sup> Задачи из сборников олимпиадных задач [1, 13], вариантов вступительных экзаменов в вузы, вариантов ЕГЭ, других источников, авторские задачи.

**11.** Парабола  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a > 0$ ) пересекает ось абсцисс в точках  $A, B$ ,  $C$  – вершина параболы. Известно, что угол между касательными к параболе, проведенным в точках  $A, B$ , равен  $90^\circ$ . Найдите  $a$ , если площадь треугольника равна 32.

**12.** Касательная к графику  $y = -x^2 + 4x - 2$  пересекает координатные оси в точках  $A, B$ , причем  $2OA = OB$ . Найдите длину отрезка  $AB$ .

**13.** Числа  $x_1, x_2, x_3, x_4$  – последовательные члены арифметической прогрессии. Известно, что  $x_1, x_2$  – корни уравнения  $x^2 - 3x + a = 0$ , а  $x_3, x_4$  – корни уравнения  $x^2 - 12x + b = 0$ . Найдите  $a, b$ .

**14.** Найдите все значения параметра  $a$ , при которых множество решений неравенства  $(6a + 3)x - 2x^2 \geq 3a + 1$  содержит единственное целое число.

**15.** Найдите все значения параметра  $a$ , для которых при каждом  $x$  из промежутка  $(-3; -1]$  выражение  $ax^2$  не равно значению выражения  $x^4 - 8x^2 - 2$ .

**16.** Найдите все значения параметра  $a$ , для которых при каждом  $x$  из промежутка  $[-6; -1]$  выражение  $x^2 - 5|x|$  не равно значению выражения  $a|x| + 4$ .

**17.** Найдите все значения параметра  $a$ , для которых при каждом  $x$  из промежутка  $(1; 3]$  выражение  $x^2 - 5x + 7$  не равно значению выражения  $a\sqrt{x^2 - 5x + 10}$ .

**18.** Квадратный трехчлен  $f(x) = x^2 + px + q$  имеет два различных целых корня. Один из корней и значение  $f(11)$  являются простыми числами. Найдите корни многочлена и значения параметров  $p$  и  $q$ .

**19.** Квадратный трехчлен  $f(x) = ax^2 + bx + c$  не имеет корней. Кроме того, известно, что коэффициент  $b$  является рациональным числом, а среди чисел  $c$  и  $f(c)$  ровно одно иррационально. Мо-

жет ли дискриминант квадратного трехчлена быть рациональным числом?

**20.** Если к квадратному трехчлену  $f(x)$  прибавить  $x^2$ , то его наименьшее значение увеличится на 1, а если из него вычесть  $x^2$ , то его наименьшее значение уменьшится на 3. Как изменится наименьшее значение трехчлена  $f(x)$ , если к нему прибавить  $2x^2$  ?

**21.** Существует ли такой квадратный трехчлен  $f(x)$  с вещественными коэффициентами, что каждое из уравнений  $f(x) = f(6x - 1)$  и  $f(t) = f(3 - 5t)$  имеет (хотя бы одно) целочисленное решение?

**22.** Значение квадратного трехчлена в трех последовательных натуральных числах равны 6, 5, 5. Найдите наименьшее возможное значение  $f(x)$ .

## **Список дополнительной литературы**

1. Агаханов Н., Поддипский О. Математические олимпиады Московской области, –М.: Физматкнига, 2006
2. Агаханов Н.К. и др. Математика. Всероссийские олимпиады. Вып 1. М.: Просвещение, 2008
3. Белоносов В.С., Фокин, М.В. Задачи вступительных экзаменов, Новосибирск: Сиб. Унив. Из-во, 2003
4. Дорофеев Г.В., Потапов М.К., Розов Н.Х. Пособие по математике для поступающих в вузы, –М.: Дрофа, 2002
5. Григорян А.А., Шикин Е.В, Шикина Г.Е. Математика. Пособие для абитуриентов, –М.: Аспект Пресс, 2002
6. Потапов М.К., Олехник С.Н., Нестеренко Ю.В., Конкурсные задачи по математике, –М.: Физматлит, 2001.
7. Родионов Е.М. Математика. Решение задач с параметрами, – М.: Из-во НЦ ЭНАС, 2006
8. Ткачук В.В. Математика абитуриенту, –М.: МЦНМО, 2008
9. Шабунин М. Математика для поступающих в вузы, –М.: Бином. Лаборатория знаний, 2004
10. Черкасов О.Ю, Якушев А.Г. Математика. Справочник для старшеклассников и поступающих в вузы, М.: Аст–Пресс Школа, 2004
11. Федоров Р.М. и др. Московские математические олимпиады 1993–2005г. М.: МЦНМО, 2006
12. Чуваков В.П. Квадратичная функция, Н-ск: Редакционно-издательский центр НГУ, 2008
13. Задачи Санкт-Петербургской олимпиады школьников по математике 2011-2016, М.: МЦНМО

## Содержание

Введение .....	3
Общие сведения .....	3
Решение квадратных уравнений .....	6
Теорема Виета.....	9
Расположение корней квадратного уравнения .....	16
Решение задач повышенной сложности .....	22
Задачи для самостоятельного решения .....	25
Задачи повышенной сложности.....	31
Список дополнительной литературы .....	34
Содержание .....	35

*Учебное издание*

## **Квадратичная функция**

Составитель

*Чуваков Валерий Петрович*  
([chv@uriit.ru](mailto:chv@uriit.ru))

Бюджетное общеобразовательное учреждение Ханты-Мансийского автономного округа-Югры «Югорский физико-математический лицей-интернат»,  
г. Ханты-Мансийск, ул. Мира, 151,  
сайт лицея: [ugrafmsh.ru](http://ugrafmsh.ru)