<u>Югорский физико-математический лицей</u>

В.П. Чуваков

Квадратичная функция

Учебно-методическое пособие

Ханты-Мансийск
2014

В.П. Чуваков

Квадратичная функция: Учебно-методическое пособие, 4-е изд.- Ханты-Мансийск, Бюджетное общеобразовательное учреждение Ханты-Мансийского автономного округа-Югры «Югорский физико-математический лицей-интернат», 34 с.

Пособие предназначено для повторения и систематизации знаний по квадратичным функциям с целью углубленного изучения математики, подготовки к предметным и вузовским олимпиадам, ЕГЭ.

Адресовано школьникам старших классов и преподавателям.

Текст одного из изданий пособия размещен на сайте лицея: http://ugrafmsh.ru/version/ufmsh/content/page_4780.html

Введение

Квадратичная функция является одной из наиболее изученных функций школьного курса алгебры, для которой доказаны многие свойства, и задачи на которую в явном или неявном виде часто встречаются на математических олимпиадах и ЕГЭ. Это задачи с параметрами на общие свойства параболы, на существование решений и число решений, теорему Виета, расположение корней квадратного уравнения, геометрию параболы.

Для решения этих задач требуется как знание фактического материала, так и общее понимание алгебраических свойств квадратичной функции и геометрии ее графика. В ряде случаев геометрическая интерпретация может подсказать алгоритм решения или проверить логическую правильность рассуждений.

В пособии систематизированы основные знания по квадратичной функции, приведены доказательства и геометрическая интерпретация основных свойств, показаны их применения для решения задач различного уровня сложности.

Приведен список задач для самостоятельного решения, список олимпиадных задач и задач повышенного уровня сложности.

1. Общие сведения

Рассмотрим функцию $y = ax^2$.

График этой функции (рис. 1) называется параболой.

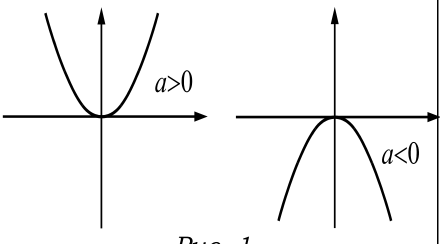


Рис. 1

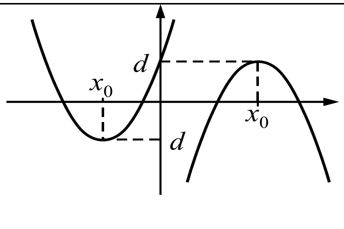


Рис.2

График функции $y=a\left(x-x_0\right)^2+d$ тоже является параболой с вершиной в точке $\left(x_0,d\right)$ и получается из графика $y=ax^2$ смещением вершины параболы на величину x_0 по оси OX и на величину d по оси OY (рис.2)

<u>Определение.</u> Квадратным трехчленом называется выражение вида $f(x)=ax^2+bx+c$.

Выражение x^2+px+q называется приведенным квадратным трехчленом.

Выделим «полный квадрат» из квадратного трехчлена

$$ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}. \qquad (1)$$

Например, $f(x)=2x^2+12x-4=2(x+3)^2-22$ – парабола с ветвями, направленными вверх, и координатами вершины $(-3,-22)$, а $f(x)=3+2x-x^2=-(x-1)^2+4$ – парабола с ветвями, направленными вниз, координатами вершины $(1;4)$ и осью симметрии $x=1$.

Свойства функции, вытекающие из формулы (1):

1. График квадратного трехчлена – парабола с вершиной в точке $(x_b;y_b)=\left(-\frac{b}{2a};-\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$.

2. График функции пересекается с осью OY в точке $y_0=f(0)=c$.

2. Если $a>0$, то функция $f(x)=ax^2+bx+c$ монотонно убывает на интервале $(-\infty;-\frac{b}{2a}]$ и монотонно возрастает на интервале $[-\frac{b}{2a};\infty)$.

3. Если $a<0$, то функция $f(x)=ax^2+bx+c$ монотонно возрастает на интервале $(-\infty;-\dfrac{b}{2a}]$ и монотонно убывает на интервале $[-\dfrac{b}{2a};\infty)$.

4. Если $a>0$, то $ax^2+bx+c\geq\dfrac{4ac-b^2}{4a}$ для любого $x\in R$.

5. Если $a<0$, то $ax^2+bx+c\leq\dfrac{4ac-b^2}{4a}$ для любого $x\in R$.

6. Парабола $f\left(x\right)=ax^2+bx+c$ симметрична относительно оси $x=\dfrac{-b}{2a}$.

7. Если существует точка p такая, что $a\cdot f\left(p\right)<0$, то $D>0$.

Пример 1.1 По виду графиков функции $f(x)=ax^2+bx+c$, представленных на рисунках 3 и 4, определите знаки коэффициентов a,b,c.

Решение. У параболы на рисунке 3 ветви направлены вверх, поэтому $a>0$. Координата вершины $x_в=\dfrac{-b}{2a}>0,$ следовательно $b<0$. Наконец, из графика видно, что значение функции в нуле $f(0)=c>0$. Таким образом, $a>0,\ b<0,\ c>0$.

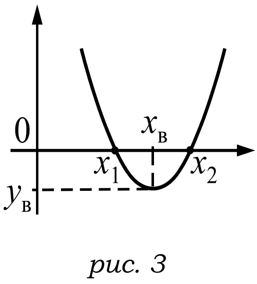


рис. 3

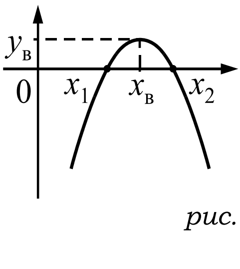


рис.4

Аналогично, из вида график на рис. 4, получаем условия $a<0,\ b>0,\ c<0$ (ветви параболы направлены вниз, $x_в = \dfrac{-b}{2a} > 0,$ и $f(0)=c<0$).

1. Решение квадратных уравнений $ax^2+bx+c=0$

<u>Определение</u> Выражение $D=b^2-4ac$ называется дискриминантом квадратного уравнения.

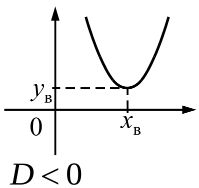
Из формулы (1) следует, что если x – корень квадратного уравнения, то

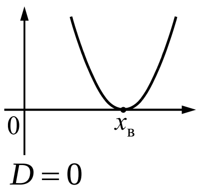
$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}. \qquad (2)$$

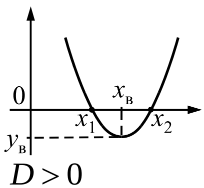
ТЕОРЕМА 1 (О существовании корней квадратного уравнения)
Если $D<0$, то уравнение $ax^2+bx+c=0$ не имеет корней.
Если $D=0$, то уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет единственный корень $x=\dfrac{-b}{2a}$.
Если $D>0$, то уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет два различных корня $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$.

Следствие. $x_2-x_1=\dfrac{\sqrt{D}}{a}$.

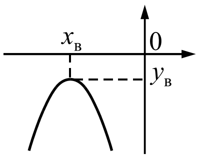
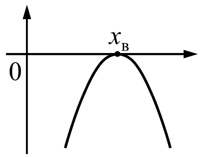
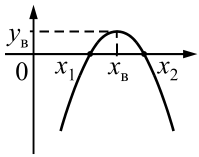
Геометрическая интерпретация теоремы

<table>
<tr><th colspan="3">$a>0$</th></tr>
<tr>
<td>

$D<0$
(нет корней)</td>
<td>

$D=0$
(один корень)</td>
<td>

$D>0$
(два корня)</td>
</tr>
</table>

$a<0$		
 $D<0$ (нет корней)	 $D=0$ (один корень)	 $D>0$ (два корня)

Пример 1.2 При каких значениях параметра b функция $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x-3b+1}$ определена при всех значениях x?

Решение. Функция $f(x)$ будет определена при всех значениях x, если $x^2+4x-3b+1\neq 0$ при всех x. Уравнение $x^2+4x-3b+1=0$ не имеет корней, если $D=16-4(1-3b)<0$. Решая последнее неравенство, получаем условие $b<-1$. *Ответ:* $b<-1$.

Пример 1.3 При каких значениях параметра a уравнение $(a+4)x^2+6x-1=0$ имеет единственное решение?

Решение. Уравнение имеет единственное решение, если $D=36+4(a+4)=52+4a=0$. *Ответ:* $a=-13$.

Пример 1.4 Укажите область определения и область значений функции $f(x)=\sqrt{3+2x-x^2}$.

Решение. Пусть $g(x)=3+2x-x^2$. Графиком функции $g(x)$ является парабола с ветвями, направленными вниз, и координатами вершины $(x_b, y_b)=(1,\ 4)$, кроме того, для любого x справедливо неравенство $g(x)\le g(1)=4$. Область определения функции $f(x)$ определяется условием $g(x)\ge 0$, которое справедливо при $-1\le x\le 3$. Графиком функции $y=\sqrt{3+2x-x^2}$ является полу-

окружность $y^2 = 3 + 2x - x^2 = -(x-1)^2 + 4$. Область значений функции $f(x) = \sqrt{g(x)}$ определяется условием $0 \le f(x) \le \sqrt{4} = 2$.
Ответ: Область определения – $[-1;3]$, область значений – $[0;2]$.

Пример 1.5 Докажите, что для любых $a, b, c \neq 0$ хотя бы одно из уравнений $ax^2 + 2bx + c = 0, bx^2 + 2cx + a = 0, \quad cx^2 + 2ax + b = 0$ имеет решение.

Доказательство «от противного». Пусть ни одно из уравнений не имеет решений. Тогда дискриминанты всех уравнений отрицательны: $4b^2 - 4ac < 0$, $4c^2 - 4ab < 0$, $4a^2 - 4bc < 0$. Отсюда, $b^2 < ac$, $c^2 < ab$, $a^2 < bc$. Перемножим эти неравенства и получим, что $b^2 a^2 c^2 < abcabc$. Противоречие.

Пример 1.6 Докажите, что квадратный трехчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ принимает целые значения при любом целом x тогда и только тогда, когда $2a,\ a+b,\ c$ – целые числа.

Доказательство. Если для любого целого x, $f(x)$ – целое число, то $f(0) = c$, $f(1) = a + b + c$, $f(-1) = a - b + c$ – целые числа. Отсюда следует, что $a + b$, $2a + c$ – целые.
Обратно, пусть $2a,\ a+b,\ c$ – целые числа. Тогда, $f(x) = ax^2 + bx + c = \dfrac{2a\,x(x-1)}{2} + (a+b)x + c$. Если x – целое, то $\dfrac{x(x-1)}{2}$ – целое, а $f(x)$ – сумма трех целых чисел.

Пример 1.7 Рассмотрим все функции $y = x^2 + px + q$, у которых $p + q = 2010$. Докажите, что графики всех этих функций проходят через одну точку.

Доказательство. Схема доказательства: возьмем две конкретные функции, найдем точку их пересечения и проверим, будет ли эта точка принадлежать остальным графикам. Найдем точку пересечения двух парабол, удовлетворяющих данному условию: например $y = x^2 + 0 \cdot x + 2010$ и $y = x^2 + x + 2009$. Это точка

$(1;\,1+p+q)=(1;2011)$. Легко проверить, что эта точка принадлежит графикам всех остальных функций этого семейства, так как по условию задачи для любой функции $f(1)=1+p+q=2011$.

Пример 1.8 (Региональный этап олимпиады по математике 2010) Известно, что $ax^2+bx+c>cx$ для любого x. Докажите, что $cx^2-bx+a>cx-b$ для любого x.

Доказательство. Из условия задачи следует, что для любого x $f(x)=ax^2+(b-c)x+c>0$. Следовательно, $a>0$, $f(0)=c>0$, $D=(b-c)^2-4ac<0$. Если $g(x)=cx^2-(b+c)x+a+b$, то условие задачи ($\forall x:\ g(x)>0$) будет выполнено если: $c>0, D_1=(b+c)^2-4c(a+b)<0$. В силу предыдущего $c>0$, а $D_1=b^2+c^2+2bc-4ca-4cb=(b-c)^2-4ac=D<0$.

Пример 1.9 Докажите, что уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет два различных корня, если $a(4a+2b+c)<0$. Верно ли обратное?

Доказательство. Заметим, что $4a+2b+c=f(2)$. Пусть $a<0$. Из условия задачи следует, что $f(2)>0$, т.е. значение функции в точке $x=2$ больше нуля. Из Следствия 1 Теоремы 4 следует, что корни уравнения x_1, x_2 существуют и различны ($x_1<2<x_2$). Для случая $a>0$ доказательство аналогичное.

Обратное неверно, так как число 2 может не лежать между корнями параболы.

2. Теорема Виета

Связь между корнями квадратного уравнения и его коэффициентами устанавливает следующая

ТЕОРЕМА Виета

Если x_1, x_2 – корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$, то справедливы условия:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{c}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Следствие 1. Используя теорему Виета, можно вычислять некоторые симметрические выражения от корней уравнения, не находя самих корней:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2},\ x_1^2 + x_2^2,\ \frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3},\ \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2},\quad x_1^3 + x_2^3.$$

Например:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{-b}{c};\quad x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = \frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a};$$

$$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = \frac{b^2}{a^2} - \frac{4c}{a};$$

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2) = (x_1 + x_2)((x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2).$$

ТЕОРЕМА 3. (Обратная теорема Виета).

Если числа $x_1,\ x_2$ удовлетворяют соотношениям $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$, то $x_1,\ x_2$ являются корнями приведенного уравнения $x^2 + px + q = 0$.

ТЕОРЕМА 4. (О разложении на линейные множители).

Если $x_1,\ x_2$ – корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то $ax^2 + bx + c = a\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right)$

Следствие 1. (Решение неравенств)

Пусть $D > 0$ и $x_1 \neq x_2$ – корни уравнения. Тогда справедливы утверждения:

А) При $a > 0$

1. $ax^2 + bx + c \geq 0 \Leftrightarrow$ когда $x \leq x_1$, либо $x \geq x_2$.

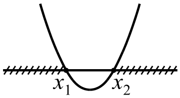
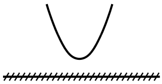
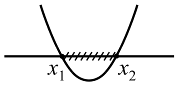
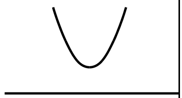
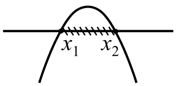
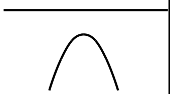
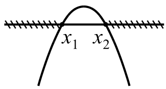
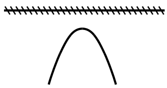
2. $ax^2 + bx + c < 0 \Leftrightarrow$ когда $x_1 < x < x_2$.

В) При $a < 0$

3. $ax^2 + bx + c \geq 0$ когда $x_1 \leq x \leq x_2$.

4. $ax^2+bx+c<0 \Leftrightarrow$ когда $x<x_1$ либо $x \geq x_2$.

Графически решения квадратичных неравенств можно представить следующим образом

	$ax^2+bx+c>0$		$ax^2+bx+c<0$	
	$D>0$	$D<0$	$D>0$	$D<0$
$a>0$	 $x<x_1$ $x>x_2$	 $x \in R$	 $x_1<x<x_2$	 нет решений
$a<0$	 $x_1<x<x_2$	 нет решений	 $x<x_1$ $x>x_2$	 $x \in R$

Следующая теорема поможет исследовать знаки корней квадратного уравнения, не вычисляя значений корней.

ТЕОРЕМА 6. Для того чтобы корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ x_1, x_2 имели одинаковые знаки необходимо и достаточно выполнение условий: $D>0,\ x_1\,x_2=\dfrac{c}{a}>0.$ Более того,

если $\dfrac{-b}{a}=x_1+x_2>0,$ то оба корня положительны,

если $\dfrac{-b}{a}=x_1+x_2<0,$ то оба корня отрицательны.

Рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих возможности применения теорем 3 – 6 для решения задач.

Пример 2.1 Найдите сумму корней всех квадратных уравнений вида $x^2+px-2010=0$, где p принимает все целые значения от -100 до 100.

Решение. Заметим, что это уравнение при любом значении имеет два вещественных корня $(D=p^2+4\cdot 2010>0)$. По теореме Виета сумма двух корней каждого уравнения равна p, а сумма корней всех уравнений равна сумме всех целых чисел от -100 до 100. Ответ: 0.

Пример 2.2 При каких значениях d оба корня уравнения $2x^2+3x+d=0$ отрицательны?

Решение. По условию задачи сумма корней меньше нуля, а произведение – больше нуля: $D=9-8d>0$, $\frac{c}{a}=\frac{d}{2}>0$, $\frac{-b}{a}=\frac{-3}{2}<0$. *Ответ:* $0<d<\frac{9}{8}$.

Пример 2.3 Известно, что $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{1}{2}$, где x_1, x_2 – корни уравнения $x^2+x+b=0$. Найдите b.

Решение. $\frac{x_1+x_2}{x_1\cdot x_2}=\frac{1}{2}\Rightarrow 2(x_1+x_2)=x_1\cdot x_2$. По теореме Виета $x_1+x_2=-1$, $x_1\cdot x_2=b$. *Ответ:* $b=-2$.

Пример 2.4 Известно, что $x_1=5x_2$, где x_1, x_2 – корни уравнения $x^2-(a+1)x+a=0$. Найдите a.

Решение. По теореме Виета $x_1+x_2=5x_2+x_2=6x_2=a+1$, $x_1\cdot x_2=5x_2^2=a$. Отсюда $x_2=\frac{a+1}{6}$, $\frac{5\cdot(a+1)^2}{36}=a$, $5(a+1)^2=36a$.

Квадратное уравнение $5a^2-26a+5=0$ имеет два корня $a_1=\frac{1}{5}, a_2=5$. *Ответ*: $a=\frac{1}{5}$, $a=5$.

Пример 2.5 Все коэффициенты квадратного трехчлена – целые нечетные числа. Может ли он иметь два целых корня?

Доказательство «от противного». Пусть уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет два целых корня x_1, x_2. Тогда, по теореме Виета, $-\frac{b}{a}=x_1+x_2$ и $\frac{c}{a}=x_1\cdot x_2$ – целые числа. Если a,b,c – целые нечетные числа, то оба числа $\frac{b}{a}, \frac{c}{a}$ – целые нечетные, однако одно из чисел $x_1\cdot x_2$, x_1+x_2 всегда будет четным. Противоречие. *Ответ*: не может.

Пример 2.6 Пусть x_1, x_2 – корни уравнения $ax^2+bx+c=0$.

Если $a+b+c=0$, то $x_1=1$, $x_2=\frac{c}{a}$. Если $a-b+c=0$, то $x_1=-1$, $x_2=\frac{-c}{a}$.

Доказательство. Заметим, что $f(1)=a+b+c$, $f(-1)=a-b+c$ и по теореме Виета $x_2\cdot 1=\frac{c}{a}$ или $x_2\cdot(-1)=\frac{c}{a}$. Утверждение доказано.

Пример 2.7 Известно, что график квадратичной функции $f(x)=ax^2+bx+c$ проходит через точки $A(4;0)$, $B(6;0)$, $C(5;-2)$. Найдите a, b, c.

Первое решение. Подставим координаты точек A,B,C в уравнение функции и получим три уравнения

$14a+4b+c=0$, $36a+3b+c=0$, $25a+5b+c=-1$, решив которые можно найти коэффициенты a,b,c.

Второе решение. Из условия задачи следует, что точки $x=4, x=6$ являются корнями уравнения $ax^2+bx+c=0$. Поэтому, $f(x)$ можно разложить на линейные множители $f(x)=ax^2+bx+c=a(x-4)(x-6)$. Так, как $f(5)=-2$, то $a=2$. Наконец $ax^2+bx+c=2(x-4)(x-6)=2x^2-20x+48$.

Ответ: $a=2, b=-20, c=48$.

Пример 2.8 При каких значениях параметра b среди решений неравенства $x^2+2x+b<0$ содержится только три целых числа?

Решение. Вершина параболы имеет координаты $(-1;b-1)$, поэтому одна точка с целыми координатами $x=-1$ точно находится среди решений исходного неравенства. Ближайшие к точке $x=-1$ целые числа – это точки $x=0, x=-2$, симметричные относительно вершины и либо одновременно лежат между корнями, либо одновременно не лежат. По условию задачи всего три целых лежат между корнями, поэтому это могут быть только числа $-2,-1,0$, а числа $x=-3, x=1$ уже не удовлетворяет исходному неравенству. Таким образом, условие задачи будет выполнено, если будут выполнены условия: $f(0)<0,\ f(1)\geq 0$. Отсюда $b<0,\ 3+b>0$.

Ответ: $-3\leq b<0$.

Пример 2.9 Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ – приведенные квадратные трехчлены, имеющие по два корня. Оказалось, что сумма двух чисел, полученных при подстановке корней трехчлена $P(x)$ в трехчлен $Q(x)$ равна сумме двух чисел, полученных при подстановке двух корней $Q(x)$ в трехчлен $P(x)$. Докажите, что дискриминанты квадратных трехчленов $P(x)$ и $Q(x)$ равны.

Доказательство. Пусть $P(x)=x^2+ax+p$,

$Q(x)=x^2+bx+q$, e, f – корни $P(x)$, m,n – корни $Q(x)$.

Из условия задачи

$$m^2+am+p+n^2+an+p=e^2+be+q+f^2+bf+q \Rightarrow$$

$$m^2+n^2+a(m+n)+2= e^2+f^2+b(e+f)+2q=(m+n)^2-2mn+$$

$$a(m+n)+2p=(e+f)^2-2ef+b(e+f)+2q.$$

По теореме Виета $e+f=-a, ef=p,\ m+n=-b, mn=q$. Подставим эти значения в предыдущее выражение и получим

$b^2-2q-ab+2p=a^2-2p-ba+2q \Rightarrow b^2-4q=a^2-4p.$ Т.е.

$D_1=D_2$.

3. Расположение корней квадратного уравнения

Пусть x_1, x_2 – корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$, p – некоторое действительное число.

Сформулируем следующие вопросы:

1) При каких условиях на коэффициенты a, b, c оба корня уравнения различны и больше числа p (рис. 5);
2) При каких условиях на коэффициенты a, b, c оба корня уравнения различны и меньше числа p (рис. 6);

3) При каких условиях на коэффициенты a, b, c один корень уравнения больше числа р, а другой меньше числа p (рис. 7).

Ответы на эти вопросы дают теоремы "о расположении корней квадратного уравнения".
Ответ на первый вопрос дает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 7. Для того чтобы корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ были различны и оба больше заданного числа p (рис. 5), необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$\begin{cases} a>0 \\ D>0 \\ x_b=\dfrac{-b}{2a}>p \\ f(p)>0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a<0 \\ D>0 \\ x_b=\dfrac{-b}{2a}>p \\ f(p)<0 \end{cases}.$$

Достаточность. Пусть эти условия выполнены. Так как $D>0$, то уравнение имеет различные корни – x_1, x_2 $(x_1<x_2)$.

Если $a>0$ и $f(p)>0$, то $p<x_1$ либо $p>x_2$, а из условия $x_b<p$ следует, что $p<x_1$.

Если $a<0$ и $f(p)<0$, то $p<x_1$ либо $p>x_2$, а из условия $x_b>p$ следует, что $p<x_1$. Т.е. оба корня различны и больше числа p.

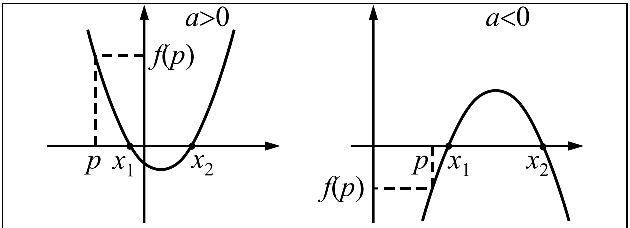


Рис. 5

Необходимость. Так как оба корня различны, то $D>0$. Если $x_1>p$, $x_2>p$, то $x_B=\dfrac{x_1+x_2}{2}>p$. Наконец если $a>0$, то $f(p)>0$, а если $a<0$, то $f(p)<0$.

Ответ на второй вопрос дает Теорема 8, которая доказывается аналогично.

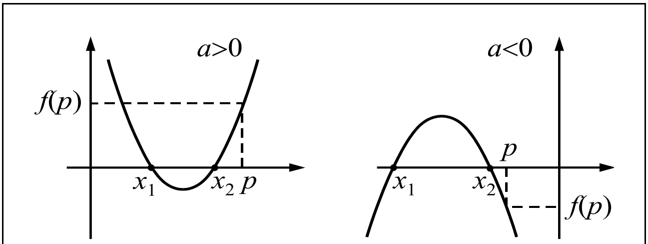


Рис. 6

ТЕОРЕМА 8. Для того чтобы корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ были различны и оба меньше числа p (рис. 6), необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$\begin{cases} a>0 \\ D>0 \\ x_b=\dfrac{-b}{2a}<p \\ f(p)>0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a<0 \\ D>0 \\ x_b=\dfrac{-b}{2a}<p \\ f(p)<0 \end{cases}$$

Ответ на третий вопрос дает

ТЕОРЕМА 9. Для того чтобы корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ были расположены по разные стороны от числа p (рис. 7), необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$\begin{cases} a>0 \\ f(p)<0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a<0 \\ f(p)>0 \end{cases}$$

Необходимость. Если x_1, x_2 – корни уравнения, причем $x_1<p<x_2$, то из свойств параболы следует, что $a\cdot f(p)<0$..

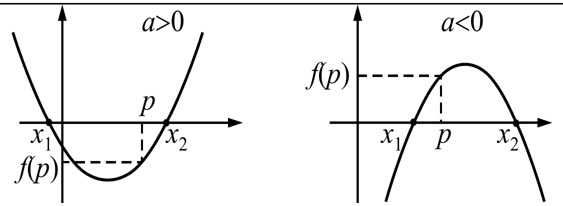


Рис. 7

Достаточность. Пусть $a<0$, $f(p)=a\left(p+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a}<0.$

Тогда $\dfrac{D}{4a}=\dfrac{b^2-4ac}{4a}>a\left(p+\dfrac{b}{2a}\right)^2$, т.е. $D>0$, а из условия $f(p)<0$ следует, что $x_1<p<x_2$.

Теорема доказана.

Алгоритмическая простота и наглядность геометрического представления теорем о расположении корней квадратного уравнения делает их применение эффективным способом решения задач с параметрами.

Пример 3.1 При каких значениях параметра a число 2 находится между корнями уравнения $x^2+(4a+5)x+3-2a=0$?

Решение. Так как ветви параболы направлены верх, то условие задачи будет выполнено, если

$f(2)=4+2\cdot(4a+5)+3-2a=6a+17<0.$ *Ответ:* $a<-\dfrac{17}{6}$.

Пример 3.2 При каких значениях параметра b оба корня уравнения $x^2-6bx+\left(2-2b+9b^2\right)=0$ больше 3?

Решение. Из теоремы 6 получаем условия

$$\begin{cases} D=8b-8>0 \\ x_b=\dfrac{6b}{2}>3 \\ f(3)=9b^2-20b+11>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b>1 \\ b>\dfrac{11}{9} \end{cases} \Rightarrow b>\frac{11}{9}.$$

Пример 3.3 При каких значениях параметра p уравнение $px^2-4x+1=0$ имеет только одно положительное решение?

Решение. Возможны три случая, в которых исходное уравнение может иметь только одно положительное решение:

1) $p=0$ – квадратное уравнение превращается в линейное и оно имеет одно положительное решение.

2) $D=0$ – квадратное уравнение имеет один положительный корень.

3) $D>0$ – квадратное уравнение имеет два корня, однако положительный корень только один.

Рассмотрим все случаи:

1) $p=0,\ x_0=\dfrac{1}{4}>0.$ 2) $D=16-4p=0,\ p=4,\ x_0=\dfrac{1}{2}>0.$

3) $D=16-4p>0,\ p\cdot f(0)<0;$

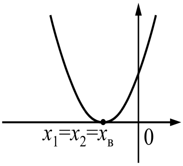
$f(0)=1$, поэтому $p\cdot f(0)<0$ при $p<0$. Ответ: $p\le 0,\ p=4$.

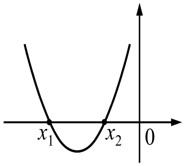
Пример 3.4 При каких значениях параметра d неравенство $dx^2-4x+3d+1>0$ выполняется при всех значениях $x>0$?

Решение. $D=16-4d(3d+1)=16-12d^2-4d=-4(3d+4)(d-1)$

Если $d>0$, $D<0$, то неравенство $f(x)>0$ выполняется при всех x, в том числе, и при $x>0$. Следовательно, при $d>1$ условие задачи выполнено.

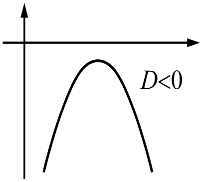
Если $d>0$, $D\ge 0$, то возможны два варианта расположения параболы.

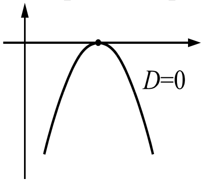


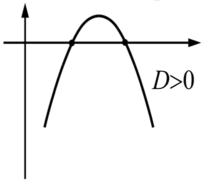


$$\begin{cases} d > 0 \\ D \geq 0 \\ f(0) = 3d + 1 \geq 0 \Rightarrow \varnothing \\ 0 > \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{4}{2d} \end{cases}$$

Если $d < 0$ возможны 3 варианта расположения параболы.







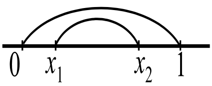
Во всех трех случаях парабола либо не больше нуля для любого x, либо больше нуля только на ограниченном отрезке $(x_1,\ x_2)$. Следовательно, условие задачи не может быть выполнено при всех $d < 0$. *Ответ:* $d > 1$.

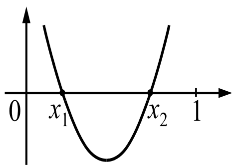
Пример 3.5 При каких значениях a все решения неравенства $ax^2 - x + 1 - a < 0$ удовлетворяют условию $0 < x < 1$?

Решение.

Если $a < 0$ (ветви параболы направлены вниз), то неравенство $f(x) < 0$ выполняется либо на всей числовой прямой (при $D < 0$), либо на двух бесконечных лучах (при $D \geq 0$), а по условию задачи неравенство должно выполняться на ограниченном интервале $(0;1)$. Таким образом, при $a < 0$ задача не имеет решений.

Пусть $a > 0$, x_1, x_2 – корни уравнения $ax^2 - x + 1 - a = 0$. Из условия задачи следует, что множество решений неравенства $ax^2 - x + 1 - a < 0$ – множество $(x_1;\ x_2)$ содержится в интервале $(0;1)$. Графическое изображение параболы в этом случае будет следующим:





Из теорем 7, 8 получаем условия:

$$\begin{cases} a>0 \\ D=1-4(1-a)\cdot a=4a^2-4a+1>0 \\ f(0)=1-a\ge 0 \\ f(1)=a-1+1-a\ge 0 \\ 0<x_b=-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{1}{2a}<1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a>0 \\ 2a\ne 1 \\ a\le 1 \\ a\in R \\ a>\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2}<a\le 1.$$

Пример 3.6 При каких значениях параметра a уравнение $4x^2-4x-3a=0$ имеет хотя бы одно решение по модулю меньше 1?

Решение. Условие задачи будет выполнено, если хотя бы один из корней принадлежит интервалу $[-1;\,1]$, т.е. в одном из следующих случаев:

1) только один корень уравнения принадлежит отрезку $[-1;\,1]$ ($-1<x_1<1<x_2$) или ($x_1<-1<x_2<1$);

2) оба корня уравнения принадлежат отрезку $[-1;1]$ ($-1<x_1<x_2<1$);

В первом случае получаем условие $f(-1)\cdot f(1)<0$. Откуда следует, что $0\le a\le \dfrac{8}{3}$.

Второй случай описывается системой неравенств:
$D\ge 0$, $f(-1)\ge 0$, $f(1)\ge 0$, $-1\le x_b\le 1$.

$$\begin{cases} D=16+48a\ge 0 \\ f(-1)=8-3a\ge 0 \\ f(1)=-3a\ge 0 \\ -1<x_b=-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{4}{8}<1 \end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{3}\le a\le 0.$$

Ответ: $-\dfrac{1}{3}\le a\le \dfrac{3}{8}$.

4. Решение задач повышенной сложности

Пример 4.1 Значение квадратного трехчлена в двух последовательных целых числах равны соответственно квадратам двух последовательных натуральных чисел. Докажите, что значения трехчлена во всех целых точках – точные квадраты.

Доказательство. Пусть $f(x)=x^2+bx+c$, m, k – исходные натуральные числа, т.е., $m^2+bm+c=k^2$, $(m+1)^2+b(m+1)+c=(k+1)^2$. Вычтем первое уравнение из второго и получим $b=2(k-m)$. Тогда из первого уравнения получаем $c=k^2-m^2-bm=k^2-m^2-2(k-m)m=(k-m)^2$. Пусть теперь p – произвольное целое число. В силу предыдущего, $f(p)=p^2+bp+c=p^2+2(k-m)p+(k-m)^2=(p-(k-m))^2$.

Пример 4.2 График линейной функции касается графика квадратичной функции $y=f(x)$, а график квадрата этой линейной функции получается из графика функции $f(x)$ сдвигом вниз на величину p. Найдите число p. (Докажите, что число p для всех таких функций единственное)

Доказательство. Пусть $g(x)=kx+d$,

$f(x)=ax^2+bx+c=a(x+\frac{b}{2a})^2+c-\frac{b^2}{4a}$ – исходные функции. Тогда

$g^2(x)=(kx+d)^2=k^2(x+\frac{d}{k})^2$ – парабола со старшим коэффициентом k^2 и координатами вершины $(-\frac{d}{k};0)$. По условию задачи эта парабола получается из $f(x)$ сдвигом вниз на величину p: $f(x)-p=g^2(x)$. Учитывая свойства вертикального переноса параболы, получаем условия:

$a=k^2, -\frac{b}{2a}=-\frac{d}{k}, c-\frac{b^2}{4a}-p=0$. Т.е., $k^2=a$, $bk=2ad$, $p=c-\frac{b^2}{4a}$.

Условие касания линейной функции и параболы равносильно условию: уравнение $ax^2+bx+c=kx+d$ имеет единственное решение, т.е. $D=(b-k)^2-4a(c-d)=0.$

Отсюда получаем, что $c=\dfrac{b^2+k^2}{4a}$. В силу предыдущего, $p=c-\dfrac{b^2}{4a}=\dfrac{b^2+k^2}{4a}-\dfrac{b^2}{4a}=\dfrac{k^2}{4a}=\dfrac{1}{4}$. *Ответ:* $p=\dfrac{1}{4}$.

Пример 4.3 При каких значениях параметра p уравнение $(8p-23)x^2+(11p-38)x+13-3p=0$ имеет ровно $(2-p)(p-4)$ различных положительных решений.

Решение. Пусть $(2-p)(p-4)=n$ – число решений исходного уравнения. Так как уравнение квадратное, то может иметь два корня, один или не иметь корней (иметь ноль корней).

Случай $n=2$ невозможен, так как уравнение $(2-p)(p-4)=2$ не имеет действительных решений $(D<0)$.

Если $n=1$, то уравнение $(2-p)(p-4)=1$ имеет один корень $p=3$. Однако при $p=3$ исходное уравнение превращается в уравнение $x^2-5x+4=0$, которое имеет два корня $x=1$, $x=4$. Противоречие (мы рассматриваем случай $n=1$).

Если исходное уравнение не имеет корней, то уравнение $(2-p)(p-4)=0$ имеет два корня $p=2, p=4$.

При $p=2$ исходное уравнение $-7x^2-16x+7=0$ точно имеет один положительный корень и один отрицательный ($f(o)>0$). Следовательно, в этом случае рассматриваемое условие (ноль корней) не выполняется.

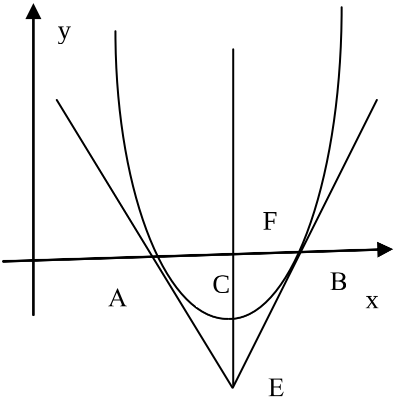
При $p=4$ исходное уравнение $9x^2+6x+1=0$ имеет только один отрицательный корень $x=-\dfrac{1}{3}$, т.е. имеет ноль положительных. *Ответ:* $p=4$.

Пример 4.4 Парабола $y=x^2+px+q$ пересекает ось абсцисс в точках A, B. Известно, что угол между касательными к паработе, проведенным в точках $A, B,$ равен $90°$. Найдите площадь треугольника ABC, где C – вершина параболы.

Решение. Пусть x_1, x_2 – корни уравнения $x^2+px+q=0$, $x_2-x_1=\sqrt{D}$, $A(x_1;0)$ и $B(x_2;0)$ – точки пересечения параболы с осью OX, $C(\frac{-p}{2};\frac{-D}{4})$ – вершина параболы, E – точка пересечения касательных EA и EB.

Площадь треугольника ABC можно вычислить по формуле

$$S=\frac{1}{2}|AB||EF|=\frac{1}{2}(x_2-x_1)\cdot\frac{D}{4} = \frac{D\sqrt{D}}{8}.$$



Точки A, B симметричны относительно оси параболы $x=\frac{-p}{2}$, точка E также лежит на оси симметрии. Следовательно, ABC – равнобедренный прямоугольный треугольник, в котором $\angle ABE=\angle BAE=45°$.

Уравнение касательной BE, с угловым

том 1 (угол $45°$) проходящей через точку $(x_2;0)$ имеет вид $Y_2=x-x_2$.

Условие касания прямой $Y=x-x_2$ и параболы $y=x^2+px+q$ можно сформулировать следующим образом: уравнение $x^2+px+q=x-x_2$ имеет единственное решение (т.е. дискриминант равен нулю):

$$0=D=(p-1)^2-4(q+x_2)=p^2-2p+1-4q+x_2=$$

$$p^2-2p+1-4q-4\cdot\frac{-p+\sqrt{D}}{2}=p^2-4q+1-2\sqrt{D}=(\sqrt{D}-1)^2.$$

Таким образом, $\sqrt{D}=1$, $S=\frac{D\sqrt{D}}{8}=\frac{1}{8}$. *Ответ:* $S=\frac{1}{8}$.

Пример 4.5 Найдите все значения параметра a, при которых наименьшее значение функции $f(x)=2ax+\left|x^2-8x+7\right|$ меньше 1.

Решение. "Раскроем модуль": Если $x^2-8x+7\geq 0$, то $f(x)=x^2+2(a-4)x+7$ - парабола с ветвями, направленными вверх и координатами вершины $x_b=4-a$. А если $x^2-8x+7<0$, то график $f(x)=-x^2+2(a+4)x+7$ - парабола с ветвями, направленными вниз. Возможны два варианта расположения вершины первой параболы:

1) $4-a\in[1;7]$, т.е. $-3\leq a\leq 3$, тогда наименьшее значение будет достигаться в той точке, которая находится дальше от вершины параболы. При $0\leq a\leq 3$ наименьшее значение функции будет достигаться в точке $x=1$ и $f(1)=2a<1\Rightarrow 0\leq a<1/2$. При $-3\leq a\leq 0$ наименьшее значение функции будет достигаться в точке $x=7$ и $f(7)=14a<1\Rightarrow -3\leq a\leq 0$. В итоге в первом случае получаем условие: $-3\leq a<1/2$.

2) $4-a\notin[1;7]$, т.е. $a<-3$ или $a>3$. Тогда наименьшее значение будет достигаться в вершине параболы $x_b=4-a$ и $f(4-a)=(4-a)^2+2(a-4)(4-a)+7=8a-9-a^2<1$. Отсюда получаем условие $a^2-8a+10>0\Rightarrow a<4-\sqrt{6}$ или $a>4+\sqrt{6}$. Т.е. во втором случае получим условие $a<-3$ или $a>4+\sqrt{6}$. Объединим оба варианта. *Ответ:* $a<1/2$; $a>4+\sqrt{6}$.

Пример 4.6 Найдите все квадратные трехчлены $p(x)$ с целыми коэффициентами, удовлетворяющие неравенству $x^2+x+1\leq p(x)\leq 2x^2+2x+2$ для любых значений x.

Решение. Пусть $p(x)=ax^2+bx+c$. Из свойств параболы следует, что если $p(x)\geq x^2+x+1$, то $(a-1)x^2+(b-1)x+c-1\geq 0$ для всех x и должно выполняться условие $a-1\ge 0$. Аналогично, если $p(x)\le 2x^2+2x+2$, то $(2-a)x^2+(2-b)x+2-c\ge 0$ для всех x и $2-a\ge 0$. Таким образом, справедливы неравенства $1\le a\le 2$. Если $a-$ целое, то $a=1$ либо $a=2$.

Если $a=1$, то неравенство $(b-1)x+c-1\ge 0$ выполняется для любого x, а это возможно только при условии $b=1, c\ge 1$.

Если $a=2$, то неравенство $(2-b)x+2-c\ge 0$ выполняется для любого x, а это возможно только при условии $b=2, 2\ge c$.

Таким образом, исходным условиям удовлетворяют следующие варианты $p(x)$: x^2+x+1, x^2+x+2, $2x^2+2x+1, 2x^2+2x+2$.

Очевидно, что первый и четвертый варианты удовлетворяют условию задачи. Если $p(x)=x^2+x+2$, то неравенства $x^2+x+1\le x^2+x+2\le 2x^2+2x+2$ должны выполняются для всех x. Тогда неравенство $0\le x^2+x$ должно выполняться для любого x, а это неверно. Если $p(x)=2x^2+2x+1$, то неравенства $x^2+x+1\le 2x^2+2x+1\le 2x^2+2x+2$ должны выполняются для всех x. Тогда неравенство $0\le x^2+x$ должно выполняться для любого x, а это опять неверно.

Ответ: $p(x)=x^2+x+1$ или $p(x)=2x^2+2x+2$.

Пример 4.7 Квадратный трехчлен x^2+ax+b имеет целые корни по модулю больше 2. Докажите, что число $a+b+1-$ составное.

Решение. Пусть $f(x)=x^2+ax+b$ имеет целые корни. Тогда $f(x)=(x-p)(x-q)$, где $p,q-$целые числа, по модулю больше 2. Что за число $1+a+b$? Легко заметить, что $1+a+b-$ значение трехчлена при $x=1$. Тогда $1+a+b=f(1)=(1-p)(1-q)$, причем каждое из чисел $1-p$ и $1-q$ целое число, не равное единицы. Следовательно, $1+a+b$ раскладывается в произведение целых чисел, не равных единице, т.е. является составным.

Пример 4.8 Рассматриваются многочлены x^2+px+q с целыми коэффициентами, при этом $p+q=30$. Сколько таких многочленов имеют целые корни?

Решение. Так как многочлен имеет целые корни, то $f(x)=(x-n)(x-m)$, где $n,m-$ целые числа. Тогда из разложения на линейные множители и условия задачи получаем, что простое число 31 раскладывается в произведение целых чисел: $f(1)=(1-x_1)(1-x_2)=1+p+q=31.$ Отсюда, например, $x_1-1=1, x_2-1=31 \Rightarrow x_1=2, x_2=32,$ а по теореме Виета $p=-(x_1+x_2)=-34, q=x_1\cdot x_2=64,$ т.е. условию задачи отвечает только один многочлен. Ответ: $x^2-34x+64.$

Пример 4.9 Оба корня многочлена $f(x)=x^2+(3a+10)x+5b-14$ и значение $f(1)$ являются простыми числами. Найдите корни многочлена и значения параметров a и b.

Решение. По условию задачи $f(x)=(x-p)(x-q),$ где $p,\ q-$ простые числа. Известно, что $f(1)=(1-x_1)(1-x_2), x_1, x_2-$ три простых числа. Если $x_1-1=1,$ то x_2 и x_2-1 одновременно являются простыми числами, что возможно только в случае $x_2-1=2, x_2=3.$ Тогда $f(x)=(x-2)(x-3)=x^2-5x+6.$ Следовательно, $3a+10=-5, 5b-14=6$ и $a=-5, b=4.$

Ответ: $a=-5, b=4.$

6. Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислите $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$, где x_1, x_2 – корни уравнения $3x^2-2x-6=0.$

2. Вычислите $x_1^3+x_2^3$, где x_1, x_2 – корни уравнения $x^2+2x-9=0.$

3. Известно, что $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{1}{2},$ где x_1, x_2 – корни уравнения $x^2+x+a=0.$ Найдите a.

4. При каких значениях a функция $f(x)=\dfrac{1}{x^2+2ax-4a}$ определена при всех значениях x?

5. При каких a уравнение $\dfrac{x^2-ax+1}{x+5}=0$ имеет единственное решение?

6. При каких k условие $\dfrac{x^2+kx-2}{x^2-x+1}<2$ выполняется для всех x ?

7. Для всякого a определите число решений уравнения $\left|x^2-2x-3\right|=a.$

8. При каком значении параметра p уравнение имеет два раз личных положительных корня $(1-p)x^2+2px-(p+2)=0$?

9. Найдите все значения m, при которых неравенство $x^2+mx+m^2+6m<0$ выполняется для всех $1\le x\le 2$?

10. При каком значении параметра a любое значение x, удовлетворяющее неравенству $ax^2+(1-a^2)x-a>0$, по модулю меньше 2 ?

11. При каком значении параметра a только один корень уравнения $x^2+2(a-4)x+16-5x=0$ удовлетворяет условию $x>3$?

12. При каких значениях a из неравенства $0\le x\le 1$ следует неравенство $(a^2+a-2)x^2-(a+5)x-2\le 0$?

13. При каких значениях p корни уравнения $5x^2-4(p+3)x+4-p^2=0$ противоположны по знаку?

14. При каких значениях a ровно один корень уравнения $x^2+2ax+3a-2=0$ удовлетворяет условию $x<-1$?

15. Найдите области определения и области значений функций $y=\sqrt{x^2-2x-3}$, $y=\sqrt{2-x-x^2}$.

16. Найдите корни квадратного трехчлена, если известно, что сумма его коэффициентов равна 2, а $(4;-2{,}5)$ – координаты его вершины.

17. Найдите все значения a, при которых функции $y = x^2 - ax - a$ и $y = (1+a)x^2 + 2x$ имеют не более одной общей точки.

18. Найдите все значения a, при которых графики функций $y = (a+5)x^2 - 7$, $y = (3a+15)x - 4$ не имеют общих точек.

19. Найдите все значения параметра a, при которых $\min\limits_{[0;2]}(4x^2 - 4ax + a^2 - 2a + 2) = 3$.

20. Найдите все значения параметра a, при которых $\max\limits_{[0;1]}(-x^2 + 2ax - a^2 - 2a - 3) = -2$.

21. Найдите все значения параметра a, при которых значения квадратного трехчлена $f(x) = x^2 - 2ax + a^2 + a - 2$ положительны при любом $x \in [-1;1]$.

22. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $x^2 - 4ax + 2a + 2 = 0$ имеет хотя бы одно положительное решение.

23. При каких значениях параметра a множество решений системы $\begin{cases} x^2 + (a+4)x + 4a \le y \\ 3x + y - (2a+4) \le 0 \end{cases}$ содержит отрезок $[-2;-1]$ оси OX ?

24. При каких значениях параметра k один из корней уравнения $x^2 - (2k+1)x + k^2 + 2 = 0$ вдвое больше другого?

25. При каком целом значении параметра a сумма квадратов корней уравнения $x^2 + ax + a - 2 = 0$ будет наименьшей?

26. При каких значениях параметра a неравенство $\dfrac{2 - ax - x^2}{1 - x + x^2} \le 3$ справедливо для всех x?

27. При каких значениях параметра m квадратный трехчлен $f(x) = (6m-5)x^2 - 5(m-1)x + 2m - 6$ есть полный квадрат?

28. При каких значениях параметра p оба корня уравнения $x^2 + px + p^2 - 1 = 0$ принадлежат интервалу $[0;4]$?

29. При каких значениях параметра a только один корень уравнения $x^2 - 4x + a = 0$ принадлежат интервалу $[0;1]$?

30. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $ax^2+(3+4a)x+2a^2+4a+3=0$ имеет только целые корни.

31. Квадратное уравнение $x^2-6px+q=0$ имеет два различных корня x_1, x_2. Числа p, x_1, x_2, q – последовательные члены геомет рической прогрессии. Найдите x_1, x_2.

32. График параболы проходит через точки $(1;0), (-5;0), (0;10)$. Найдите значение параболы при $x=2$.

33. При каких значениях параметра a среди решений неравенства $x^2-(2a-1)x-2a<0$ содержится только три целых положительных числа?

34. При каких значениях параметра a неравенство $\dfrac{x+3a-5}{x+a}>0$ справедливо для всех x таких, что $1\le x\le 4$?

35. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $ax^2+(2a-5)x+a-6=0$ имеет на отрезке $[0;2]$ единственный корень.

36. Пусть $f(x)=x^2+(3a+10)x+5b-14$. Оба корня уравнения $f(x)=0$ и значение $f(1)$ являются простыми числами. Найдите значения параметров a, b и корни уравнения.

37. Найдите целые значения параметров a и b, при которых корни уравнения $x^2+(2a+9)x+3b+5=0$ являются различными целыми числами, а коэффициенты $2a+9$ и $3b+5-$ простые числа.

38. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $x^2-(a+1)x+a-1=0$ имеет два корня, разность которых равна их произведению.

39. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $3x^2-2a(x-1)-2=0$ имеет два корня, сумма квадратов которых равна их произведению.

40. Найдите все значения параметра a, при которых график функции $y=(a-1)x^2+2ax+3a-2$ касается оси абсцисс.

41. Найдите все значения a, при которых уравнение $\dfrac{x^2+3(2-a)x+2a^2-7a+5}{x^2-x-6}=0$ имеет единственное решение.

42. Найдите все значения a, при которых неравенство $\dfrac{x^2-8x+20}{ax^2+2(a+1)x+9a+4}<0$ выполняется при всех значениях x.

43. Найдите все значения параметра a, при которых из неравенства $x\geq 1$ следует неравенство $2x^2+(a-1)x-(a^2-11a+28)\geq 0$

44. Найдите все значения параметра a, при которых из неравенства $x^2-(3a+1)x+a>0$ следует неравенство $x>1$.

45. Найдите все значения параметра a, при которых все корни уравнения $x^2-2ax+a^2-a=0$ больше -2 и меньше 6.

46. Найдите все значения параметра a, при которых один из корней уравнения $x^2+2(a-2)x+9=0$ принадлежит интервалу $(1;\ 2)$, а другой – нет.

47. Ветви параболы $y=4ax^2+12ax+9a-1$ направлены вниз. Докажите, что парабола не пересекает ось абсцисс.

48. Квадратный трехчлен $f(x)=x^2+bx+c$ имеет один корень. Кроме того, уравнение $f(2x-3)+f(3x+1)=0$ имеет ровно один корень. Найдите корень уравнения $f(x)=0$.

49. Квадратный трехчлен $f(x)$ имеет один корень. Кроме того, уравнение $f(2x-3)+f(3x+1)=0$ имеет ровно один корень. Найдите коэффициенты b и c.

50. Ветви параболы $y=9ax^2+12ax+4a-1$ направлены вверх. Докажите, что парабола пересекает ось абсцисс в двух точках.

Ответы к задачам 1–50:

1. $-\frac{1}{3}$ \ 2. -62 \ 3. -2 \ 4. $(-4;0)$ \ 5. $\pm 2, \frac{26}{5}$ \6. $(-2;6)$ \ 7. 2 при $a>4$, 3 при $a=4$,4 при $0<a<4$,2 при $a=0$, нет при $a<0$ \
8. $p<-2,\ p\in(1;2)$ \ 9. $\frac{-7+3\sqrt{5}}{2}<m<-4+2\sqrt{3}$ \ 10. $(-2;-0.5)$ \
11. $a\le -1$ \ 12. $(-3;3)$ \ 13. $|p|>2$ \ 14. $a\le 1$ \
15. $[-1;3],[0;\infty);[-2;1],[0;1.5]$ \ 16. $4\pm\sqrt{5}$ \ 17. $a\le -\frac{2}{3}, a\ge 2$ \
18. $\frac{-19}{3}<a<-5$ \ 19. $a=1-\sqrt{2}, a=5+\sqrt{10}$ \ 20. $a=-1$ \
21. $a<\frac{-3-\sqrt{13}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\le a\le 2$ \ 22. $a<-1, a\ge 0$ \ 23. $-3.5\le a\le 1$ \
24. $k=4$ \ 25. $a=1$ \ 26. $-1<a<7$ \ 27. $m=5$ \ 28. $-\frac{4}{3}\le p\le -1$ \
29. $0<a<3$ \ 30. $a=0, a=-\frac{1}{2}, a=\frac{3}{2}$ \
31. $x_1=-3, x_2=9, x_1=2, x_2=4$ \ 32.–14 \ 33. $1<a\le\frac{3}{2}$
34. $a\in(-\infty;-4)\cup\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$ \ 35. $\frac{16}{9}\le a<6$ \ 36. $x_1=2; x_2=3; a=-5; b=4$ \
37. $a=-3; b=-1$. 38. $a=2$ \39. $\varnothing$ \40. $a=0{,}5$ \41. $a=1, a=1{,}5$ \ 42. $a<-0{,}5$ \ 43. $[3;9]$ \ 44. $\varnothing$ \45. $[0;4)$ \46. $(1{,}2;2]$ \48. $x=-11$ \49. $b=22, c=121$

7. Задачи повышенной сложности[1]

1. Даны числа $a,b,c.$ Известно, что для любого x выполняются неравенства $ax^2+bx+c\ge bx^2+cx+a\ge cx^2+ax+b.$ Докажите, что $a=b=c.$

❖ [1] Задачи из сборников олимпиадных задач [1, 13], вариантов вступительных экзаменов в вузы, вариантов ЕГЭ, других источников, авторские задачи.

2. Пусть $f(x),\ g(x),\ h(x)$ – три квадратных трехчлена с положительными коэффициентами. Известно, что каждый из них имеет хотя бы один общий корень с суммой других. Докажите, что многочлены $f(x), g(x), h(x)$ имеют общий корень.

3. $ax^2+2bx+c,\quad bx^2+2cx+a,\quad cx^2+2ax+b$ – квадратные трехчлены с положительными коэффициентами, причем любые два из них имеют общий корень. Докажите, что $a=b=c$.

4. На параболе $y=x^2$ выбраны четыре точки A, B, C, D так, что прямые AB и CD пересекаются на оси ординат. Найдите абсциссу точки D, если абсциссы точек A, B, C равны соответственно a, b, c.

5. Найдите все целые значения a, при которых уравнение $x^2+ax+a=0$ имеет целые корни.

6. Из квадратного трехчлена ax^2+bx+c получили три квадратных трехчлена: $(a+1)x^2+bx+c,\ ax^2+(b+1)x+c,\ ax^2+bx+c+1.$ Оказалось, что любые два из них имеют общий корень. Докажите, что сумма коэффициентов квадратного трехчлена – целое число.

7. Решите уравнение $f(f(f(f(f(x)))))=0$, где $f(x)=x^2+12x+30.$

8. Пусть уравнение $x^2+px+q=0$ имеет корни. Сколько корней имеет уравнение $f(x)+f(x+\sqrt{D})=0$?

9. При каких значениях параметра a сумма корней уравнения $ax^2+x-8a+4=0$ меньше 1, а произведение больше 3?

10. Произведение четырех корней уравнений $x^2+2bx+c=0,\quad x^2+2cx+b=0$ равно единице. Найдите $b,\ c.$

11. Парабола $y=ax^2+bx+c\ (a>0)$ пересекает ось абсцисс в точках $A, B,\ C$ – вершина параболы. Известно, что угол между касательными к параболе, проведенным в точках $A, B,$ равен $90°$. Найдите a, если площадь треугольника равна 32.

12. Касательная к графику $y=-x^2+4x-2$ пересекает координатные оси в точках A, B, причем $2OA=OB$. Найдите длину отрезка AB.

13. Числа x_1, x_2, x_3, x_4 – последовательные члены арифметической прогрессии. Известно, что x_1, x_2 – корни уравнения $x^2 - 3x + a = 0$, а x_3, x_4 – корни уравнения $x^2 - 12x + b = 0$. Найдите a, b.

14. Найдите все значения параметра a, при которых множество решений неравенства $(6a+3)x - 2x^2 \geq 3a + 1$ содержит единственное целое число.

15. Найдите все значения параметра a, для которых при каждом x из промежутка $(-3; -1]$ выражение ax^2 не равно значению выражения $x^4 - 8x^2 - 2$.

16. Найдите все значения параметра a, для которых при каждом x из промежутка $[-6; -1]$ выражение $x^2 - 5|x|$ не равно значению выражения $a|x| + 4$.

17. Квадратный трехчлен $f(x) = x^2 + px + q$ имеет два различных целых корня. Один из корней и значение $f(11)$ являются простыми числами. Найдите корни многочлена и значения параметров p и q.

Список дополнительной литературы

1. Агаханов Н., Подлипский О. Математические олимпиады Московской области, –М.: Физматкнига, 2006
2. Агаханов Н.К. и др. Математика. Всероссийские олимпиады. Вып 1. М.: Просвещение, 2008
3. Белоносов В.С., Фокин, М.В. Задачи вступительных экзаменов, Новосибирск: Сиб. Унив. Из–во, 2003
4. Дорофеев Г.В., Потапов М.К., Розов Н.Х. Пособие по математи ке для поступающих в вузы, –М.: Дрофа, 2002
5. Григорян А.А., Шикин Е.В, Шикина Г.Е. Математика. Пособие для абитуриентов, –М.: Аспект Пресс, 2002
6. Потапов М.К., Олехник С.Н., Нестеренко Ю.В., Конкурсные задачи по математике, –М.: Физматлит, 2001.
7. Родионов Е.М. Математика. Решение задач с параметрами, –М.: Из–во НЦ ЭНАС, 2006
8. Ткачук В.В. Математика абитуриенту, –М.: МЦНМО, 2008
9. Шабунин М. Математика для поступающих в вузы, –М.: Бином. Лаборатория знаний, 2004
10. Черкасов О.Ю, Якушев А.Г. Математика. Справочник для старшеклассников и поступающих в вузы, М.: Аст–Пресс Школа, 2004
11. Федоров Р.М. и др. Московские математические олимпиады 1993–2005г. М.: МЦНМО, 2006
12. Чуваков В.П. Квадратичная функция, Н-ск: Редакционно-издательский центр НГУ, 2008
13. Задачи Санкт-Петербургской олимпиады школьников по математике 2011(2012) года, М.: МЦНМО, 2012 (2013)

Содержание

Учебное издание

Квадратичная функция

Составитель

Чуваков Валерий Петрович
(chv@uriit.ru)

Бюджетное общеобразовательное учреждение Ханты-Мансийского автономного округа-Югры «Югорский физико-математический лицей-интернат»,
г. Ханты–Мансийск, ул. Мира, 151,
сайт лицея: ugrafmsh.ru