Исаак Кушнир

# Геометрические воспоминания

Он — обычный школьный учитель
без титулов и званий.
Но в его преподавательском
багаже — не один десяток книг:
учебников, задачников,
помогающих не только понять,
но даже полюбить математику —
алгебру и геометрию.

На вопрос «Какова тема открытого
урока?» он отвечает: «Не знаю.
Я буду импровизировать».

Он пьет кофе во время урока!!!

А его ученики этого не замечают —
все погружены в решение задач.
Благословен класс,
имеющий такого Учителя!

Прочтите книгу
и убедитесь в этом сами.

Он — обычный школьный учитель
без титулов и званий.
Но в его преподавательском
багаже — не один десяток книг:
учебников, задачников,
помогающих не только понять,
но даже полюбить математику —
алгебру и геометрию.

На вопрос «Какова тема открытого
урока?» он отвечает: «Не знаю.
Я буду импровизировать».

Он пьет кофе во время урока!!!

А его ученики этого не замечают —
все погружены в решение задач.
Благословен класс,
имеющий такого Учителя!

Прочтите книгу
и убедитесь в этом сами.

**Исаак Кушнир**

# ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ВОСПОМИНАНИЯ

Исаак Кушнир

# ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ВОСПОМИНАНИЯ

ФАКТ

Киев · 2008

УДК 821.161.1(477)-94+514(092)
ББК 84(4Укр=Рос)6-44
К 96



ISBN 978-966-359-223-7

# ВМЕСТО ПРЕДИСЛОВИЯ

Издательству «Факт» везет на авторов. Фамилия автора предлагаемой книги не требует комментариев, а тем более, рекламы.

Но издавать книгу, так сказать, нового жанра, не только смело, но и почетно. «Геометрические воспоминания»...

Казалось бы, несовместимые понятия: геометрические образы (треугольник, окружность, прямая) и эмоциональные, часто афористические предложения, украшенные юмором и грустью. Здесь найдут интересное для себя и математики, точнее — учителя математики, и ученики, а скорее, — их родители. Они увидят нового Кушнира: начинающего писателя и мыслящего педагога. Согласитесь, сочетание редкое.

*Редакция издательства «Факт»*

# КАК ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР К НАМ В ШКОЛУ ПРИШЕЛ

В начале шестидесятых годов я работал в школе-интернате. В выпускном классе юноши были рослыми, любили вкусно поесть и чтобы в столовой первое блюдо наливали щедро. «По Маруськин поясок» — была их любимая поговорка. Конечно, учиться они не хотели. Не все. Справедливости ради: один из них даже, как говорилось, «шел на медаль».

Особую симпатию у меня вызывал Володя Мигрин, добродушный, вечно улыбающийся, мечтающий поступить в институт. С этой целью, еще будучи в девятом классе, он крутился в вузе около абитуриентов, собирая задачи и предлагая мне их решить. Как-то принес задачу, которой на устном экзамене «резали» всех неугодных.

> В треугольнике $ABC$ известны радиус описанной окружности $R$ и радиус вписанной окружности $r$. Найти расстояние между точкой $O$ — центром описанной окружности и точкой $I$ — центром вписанной окружности.

Я улыбнулся: простое условие, чего там! (Ведь только-только получил высшее образование.) И прямо у доски начал доказывать... Не получается...

Решил взять задачу домой: посоветоваться-то не с кем — пятилетнее отсутствие в Киеве (я учился в Запорожье) сказалось на дефиците профессиональных знакомств. Дождался воскресенья (или субботы) и сделал последнюю попытку: читальный зал Дома Учителя. Он находился на нынешнем Майдане Незалежности. (К сожалению, Дом снесли.) В читальном зале набрал всякой литературы по геометрии и начал, как мне казалось, безнадежный поиск.

Прошло несколько безрезультативных часов, и осталась неоткрытой только книжка «Курс элементарной геометрии. Часть I» (Перепелкин Д. И., ОГИЗ, Гостехиздат, Москва, Ленинград, 1949). Предназначенная «в качестве учебника для педагогических институтов», книга надежд на решение задачи не оставляла, тем более, что за время учебы в педагогическом институте подобная задача не попадалась... Безнадежно листаю страницы и дохожу до параграфа 74. Формула Эйлера:

$$OI^2 = R^2 - 2Rr.$$

Достаточно плотным шрифтом доказательство занимает страницу. Но оно есть! Можно нести в школу! Эх, если бы упростить!

В процессе разбора я наткнулся на зависимость, которую позже выделил в замечательную теорему, названую мной «теорема трилистника». (С удивлением узнал, что некоторые авторы ее называют «теоремой тризуба».)

Увлеченный формулой Эйлера, я за последние 40 лет дал десяток доказательств, из которых семь счел достойными публикации.

(И. Кушнир. «Альтернативные способы решения задач геометрии», Киев: Факт, 2006).

О формуле Эйлера писал в статьях и книгах. С удовольствием могу констатировать, что наконец-то формула появилась (правда, в виде задачи для 8 класса) в официальном учебнике геометрии для школ: «Геометрия 7–9», Москва: Просвещение, 1990, № 894, с. 214.

Интересно, что неравенство

$$\boldsymbol{R \geq 2r \quad (R^2 - 2Rr \geq 0),}$$

также называют неравенством Эйлера.

Школа № 206. Обсуждаем олимпиаду. 1995 год

# Я ЕЩЕ ТОГДА КУРИЛ

В конце шестидесятых годов попался мне небольшой задачник по геометрии, написанный учителем, потерявшим на войне зрение. Задачи были непростые, поэтому удивило условие:

> Построить треугольник по двум углам и медиане ($\angle A$, $\angle B$, $m_c$).

Очевидная задача на «подобие». Прошел мимо и вдруг «зацепился», да так, что чуть было не упал — тема «Подобие» изучалась в 8 классе, а задача предлагалась... в седьмом! Буду откровенным, совершенно не представлял как ее решать, не применяя подобие треугольников...

Взволнованный, еду на работу и сразу — в курилку, к другу — Михаилу Давыдовичу Коссову. (Царство ему небесное!)

— Миша, как решать задачу:

«Построить треугольник по $\angle A$, $\angle B$, $m_c$»?

— Ну, Исаак, ты даешь, — подобие...

— Ага! Без подобия!

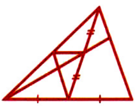
Наступила тишина.

Растерянно:

— Не знаю...

— Слушай, позови Юру — он поможет!

С другом,
Михаилом Давыдовичем Коссовым. 1966 год



Юра — ученик 10 класса — курил за углом школы.

Обижаясь за прерванный кайф, он недовольно подошел к нам, курившим ему на зависть папиросы «Беломор».

— Юра, — сказал Михаил Давыдович, — построй треугольник по $\angle A$, $\angle B$, $m_c$ без подобия.

— Нечего делать, — насмешливо произнес он, — строим сегмент на медиане $CE$, вмещающий угол $A$, удваиваем ее, а на отрезке $ED$ строим второй сегмент, вмещающий угол $B$ (рис. 1).

Немая сцена... С того времени я неоднократно применял Юрино решение во многих задачах на построение.

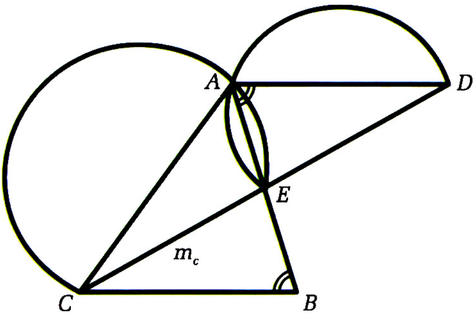
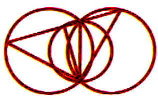



Рис. 1



О нетрадиционном использовании сегмента, вмещающего данный угол см., например, «Методи розв'язання задач з геометрії».

Юра, ученик М. Коссова, защитил кандидатскую, затем докторскую диссертацию.

Правда, ко мне это уже не имело никакого отношения.

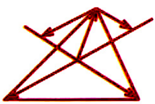
1956 год

# ПОСАДЯТ ТЕБЯ, КУШНИР...

Борьба за геометрию в школе началась в конце шестидесятых годов.

Представляете, в свободной Франции новый учебник (правда, для родителей) на всю страну призывал: «Смерть Эвклиду!». Возникает естественное: «За что?» Так называемые модернисты-математики с мировым именем, не имеющие никакого отношения к школе, считали, что геометрия устарела и без нее можно обойтись. Не будем вдаваться в подробности дискуссии: результаты почти полувекового отторжения налицо. Видел своими глазами, как учительница, которой за 50, уверенно нарисовала чертеж (рис. 2) и написала, что

$$AH : HH_1 = 2:1.$$



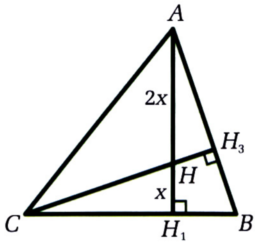



Рис. 2

Без комментариев.

В те годы «Учительская газета» опубликовала мою статью: «Моя любовь треугольник». Как было принято в Советском Союзе, если непонятно, что с геометрией, — то уж точно за нее не надо ратовать. Друзья смеялись: «Посадят тебя, Исаак». А что? В 36 году — наверняка.

Почему любовь к треугольнику? Отвечу: он самая эмоциональная фигура в школьной математике. Треугольник сопровождает учащихся с первого до последнего класса обучения в школе. Он подтверждает созданный мной девиз учителя (по аналогии с врачебным «Не навреди») — «Не испугай!»

С выпускниками 173 школы. 1969 год

Он шлифует логику, может быть, на самом главном, на бытовом уровне. Чтобы, ссорясь, супруги не говорили друг другу: «Сам ты дурак!», — пусть лучше зададут вопрос по сути: «О чем мы говорим?». (По аналогии: что дано, что требуется доказать.)

Треугольник помогает найти лучшие задачи истинной педагогики — их я называю «посильные задачи повышенной сложности».

Совсем недавно (ноябрь 2007 года) повезло: нашел жемчужину. Ценность ее в том, что она трудна (и не трудна) семикласснику и его родителям, а также абитуриенту и его репетиторам.

Дарю:

> В треугольнике $ABC$ сторона $BC$ в два раза меньше стороны $AC$. Найти угол между биссектрисой угла $ACB$ и медианой, проведенной из вершины $B$.

Угощайтесь!

# ЛЮБИМАЯ ЗОЛУШКА

Любимая дочь, любимый внук, любимая еда, а любимая теорема? Бывает. Она, как Золушка, тихо примостилась в доказательстве формулы Эйлера и ждет, когда ее превратят в принцессу.

Простенькие отрезки $IW_1$ и $W_1B$. Наверное, именно гений Эйлера (а может быть, древних греков) заметил их равенство:

$$IW_1 = W_1B.$$

Но ни древние греки, ни Эйлер не считали нужным равенство двух отрезков поднять до уровня теоремы.

В своей первой статье в журнале «Математика в школе» (№ 3, 1971 г.) «О некоторых свойствах треугольника», рассматривая замечательные свойства точки $W$, я «запатентовал» теорему о равенстве трех отрезков (рис. 3):

$$IW_1 = W_1B = W_1C.$$

В дальнейшем теорему стал называть

**«теоремой трилистника»**

Ученики ее обожают.

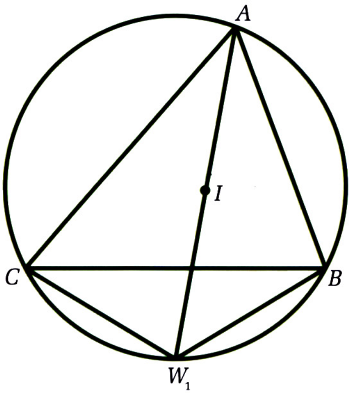
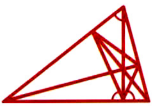



Рис. 3

Еще бы: составители олимпиадных задач не подозревают, что теперь «теорема трилистника» находится на «вооружении» у решающих, а, например, задача Киевской городской олимпиады становится просто иллюстрацией «теоремы трилистника».

> **Киев, 1966 г.** Задана окружность, точка $A$, лежащая на ней, и точка $P$, лежащая внутри окружности. Найти на окружности такие точки $B$ и $C$, чтобы точка $P$ была центром окружности вписанной в треугольник $ABC$.

Страсть молодости — волейбол. 1971 год



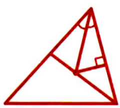
Совсем недавно, когда в Интернете появились решения задач последней Международной Олимпиады, раздался виртуальный вопль-протест: «Так эта задача легко решается „теоремой трилистника“, придуманной киевским учителем И. Кушниром. Неужели члены жюри олимпиады не знают о ней?!»

Могу успокоить юношу (судя по темпераменту — это молодой человек): не знают! Иначе бы задача не вошла в шесть предлагаемых для всего мира на Олимпиаде.

Интересно, что в 1977 году в «Пособии по математике» Московского государственного университета статья с трилистником и точкой $W$ была полностью перепечатана со ссылкой на журнал «Математика в школе» (№ 3, 1971 г.).

К сожалению, автор П. С. Моденов и титульный редактор Б. И. Александров не сочли нужным назвать автора статьи.

...Прошло тридцать пять лет, «теорема трилистника» прочно вошла в практику интересующихся геометрией. И снова, как в 1977 году, статью перепечатывают, не ссылаясь на автора (см., например, В. А. Гусев. «Сборник задач по геометрии 5—9 класс», Москва: Оникс, 21 век, с. 166).



С удовольствием еще раз отмечу, что в Украине «теорема трилистника» приобрела настолько большую популярность, что ее переименовали в «Теорему про „Тризуб“».

Цитирую:

«Одна з класичних теорем планіметрії, яка вказує на зв'язок між описаним колом і... має назву „тризуб“, бо форма цього зв'язку подібна до форми герба України»... (Лейфура В. М., Мітельман І. М., Радченко В. М., Ясінський В. А., Львів, 1999, с. 53).

И снова первоисточник не назван. Золушка стала Принцессой. Из-за этого я не буду любить ее меньше.

2006 год. С внуком

## ЧАШЕЧКА КОФЕ... НА УРОКЕ

Эпатаж на уроке... Эпатаж на лекции. Любимый прием — потому что... Потому что он, этот эпатаж, позволяет убедительно выявить суть, спрятанную советским и постсоветским руководством.

Перед открытым уроком — вступительное слово учителя.

Первый шаг:

— Я лучший учитель в мире! — Ветерок среди присутствующих людей. В мой адрес:

— Крыша поехала...

Второй шаг (дальше — серьезнее!):

— Мои дети знают лучше вас! — (Присутствующие обижаются.)

А третий шаг ставит все на свои места:

— Спрашивайте! Спрашивайте детей, проведите контрольную работу, экзамен, наконец!

Приученные контролем, дети уверены в себе. Присутствующие шокированы этой уверенностью: «Вони такі наглі, такі наглі — як він». И это все, что они заметили!!!

Помню, пришли «проверяющие» — две юные методистки ко мне на урок.

— И. А.! Какая у вас тема урока?

— Не знаю, я буду импровизировать, — дразнюсь.

Предложил ученикам рассмотреть свойства ортоцентрического тетраэдра. Они находили новые свойства, мною не запланированные.

Перешли к последней публикации в «Кванте». На перемену не пошли. Споры закончились со вторым звонком.

Методистки задали только один вопрос:

— Правда ли, что вы пьете кофе на уроке?

— Правда, я и сегодня пил, а вы не заметили?

— Не заметили, не до того было...

— Вот-вот, когда класс умеет погружаться в решение задач, вопрос о кофе не возникает. Он просто неуместен.

Если класс не умеет уйти в себя при словах «решать задачу», то математический класс не состоялся.

— Какой кофе? Нам задачу надо решать!

— Решайте! С Богом!

После семинара «Как стать суперучителем». 1968 год

# ...ПО ТРЕМ МЕДИАНАМ

В середине 80-х годов математические классы стали появляться в школах по «разнарядке районо».

Этот класс появился в школе «на выселках» Киева, а когда на районной математической олимпиаде команда школы заняла последнее место (!), все засуетились и энергично стали искать нового учителя математики. Я сразу согласился на предложение, хотя на вопрос, кто вел класс до меня, — никто вразумительно не отвечал, пока, как говорится «не раскололись»:

— Да что говорить? Входя в класс, «бывший» сердился необычно: «Какая падла открыла форточку?»

За пару лет напряженной работы кое-чего добились — и слух пошел... Потянулись дети умных родителей. Я даже сформулировал: «Математический класс — это коллектив детей, родители которых хотят, чтобы дети трудились». Но дети с родителями не всегда согласны...

Его буквально, как говорится, притащила за руку мама, женщина умная и энергичная. Включив все свое обаяние, она достаточно быстро уломала меня взять сына в математический класс, тем более, что в школе, где он учился, по математике стояла оценка «5» (пять!).

Этот худенький вихрастый паренек с румяными щечками был само обаяние. Покоряла его открытая улыбка, доброжелательность и мягкость, не свойственная этому опасному возрасту. Чтобы обеспечить успех, мама уговорила меня заниматься с сыном дополнительно.

Дело сделано, семья Володи (так звали мальчика) вздохнула с облегчением — учеба началась... Но не тут-то было: обаятельный ребенок не спешил менять свою жизнь в пользу математики, а гроздья двоек его не пугали. Советский школьник, он хорошо понимал: Исаак Аркадьевич — на поводке! Я видел, что он ничего не делает. Что ж, пришлось вызвать себя к себе и прямо сказать: «Наш общий обман (его и мой) —

налицо. Нужно что-то делать. И я поступил честно. Не дрогнув, поставил «два» — по алгебре и «два» по геометрии». Бывшему отличнику, сыну обаятельной и умной мамы и, наконец, частному (!) ученику.

Что было в его семье могу только представить. Думаю, что папа Володи в душе был доволен. Конструктор подводных лодок, лауреат Государственной премии, окончивший Бауманку, он хорошо знал, что такое самообразование. В маме я тоже был уверен, ведь именно она привела сына ко мне.

Внешне все было спокойно, учебный процесс продолжался. Как вдруг... Володя (впервые!) поднял руку. Обсуждалась задача построения треугольника по трем медианам. Столетиями (или тысячелетиями) удваивали отрезок $MM_1$ и рассматривали паралеллограм *CMBD* (рис. 4).

— Исаак Аркадьевич! — зазвенел голос Володи. А я построю проще! Не удваивая отрезок $MM_1$!

— ???

— Ведь треугольник *BMC* — базисный, аналог задачи $a$, $b$, $m_c$. А построив его, строим треугольник *ABC*.

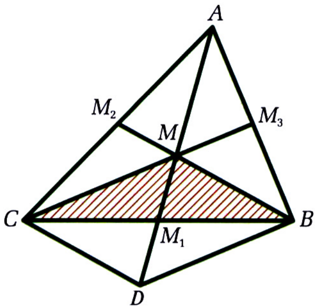



Рис. 4

«Ваш ребенок будет жить» — радостно сообщил я родителям Володи.

Его взлет произошел куда быстрее, чем можно было ожидать. Он полюбил математику. Работал страстно, увлеченно, радостно. Помогал мне самозабвенно. После выпуска эти сияющие глаза я еще помнил долго, пока он не потерялся в аудиториях МФТИ — лучшего вуза страны. Тосковал по нему и сердито бурчал что-то о неблагодарности учеников.

Прошли годы, и вдруг раздался звонок. Но это уже другая история.

Во главе семьи

# ЗДРАВСТВУЙ, СЫН

(письмо из Тарту)

Дорогой сынуля!

Еду из Тарту. До Киева осталось несколько часов. Решил, пока свежи воспоминания, написать тебе пару слов. Мне хотелось объективности, чтобы ты стремился не повторять моих ошибок.

Итак... Несколько человек задавали один и тот же вопрос:

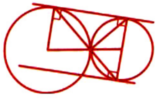
«Зачем я туда еду? В Прибалтику?!».

И моих учеников, студентов Тартусского университета, этот вопрос тоже волновал: «Мы здесь вдали от Киева, от родителей, зачем вмешиваться в нашу жизнь, даже воспоминаниями?»

Заведующий кафедры методики математики Ян Янович Реймонд, пригласивший меня прочитать лекцию, удивил уже тем, что не встретил на вокзале. Гидом и телохранителем был мой ученик Гутман (III курс). Гостиницу мне не дали, а поселили в теплом, грязноватом (белье чистое) номере — комнате студенческого общежития. Взял такси — приехал к доценту Реймонду. Его опять не было.

Вечером встретился с моими киевскими учениками. И... взбесился, когда один из них (второкурсник) сказал, что лучше было бы в школе (т. е. в моем математическом классе) преподавание вести «вплотную» к высшей математике. Пришлось, плюнув на статус гостя (а так не хотелось, видит Бог...), напомнить, какими пришли ко мне и что слово «дискриминант» они путали с гомосексуалистом. Вспомнили. Все стало на свои места. Лег спать рано.

Лекцию назначили на следующий день, в $14^{50}$. С утра ходил по Тарту, зашел в общагу, переодел рубаху (почти стихи) и — в бой! В 13 часов встретился, наконец, с Реймондом.



Сначала было знакомство с кафедрой: у них 9 человек, 9 эстонцев: пять кандидатов физ.-мат. наук, четверо — пед. наук. Пили гранулированный растворимый кофе, а затем меня провели по университету: гордость — зоологический музей. Затем — представление декану — бородатому красавцу двухметрового роста с голубыми глазами. Ян Янович презентовал: «Наш гость — учитель, его ученики наши студенты».

— Кто?

Я перечислил.

— О! Вся доска почета!

(Хорошо, что у них не учился мой сын Саша.)

— А почему они едут к нам?

— А вы не знаете?

— Знаю, конечно. (Смех! — Теперь уже просто, на равных.)

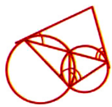
А мне не сидится — впереди лекция, да еще эстонским группам, которые по-русски, как я по-эстонски. Тем более мне попалось объявление о моей лекции — написанное от руки, в стиле: «Сдается комната...»

Случилось то, чего я ожидал. Аудитория была пуста... Не боись, не боись, сынуля, всё к лучшему. Ян Янович куда-то исчез, а потом появилось человек пятнадцать. Десять человек кафедры во главе с Реймондом и мои бывшие киевские ученики. Обычно в таких случаях, у меня портится настроение. Но это был университет, которому 350 лет. В нем читали лекции Пирогов и Берг, учились Вересаев и Достоевский. Говорят, что выступал Чарльз Дарвин.

И я «развернул знамена».

Эстонцы, как ты знаешь, народ медлительный. Но где-то я увидел, что они сломались. Пошел румянец, заблестели глаза.

На доказательстве прямой Эйлера с помощью удвоенного треугольника — аплодисменты. Через час 15 минут все было кончено. Реймонд, тепленький и красненький, клялся в любви и верности. Я видел восхищенные глаза преподавателей и моих учеников. Ликовал. Ян потащил меня на кафедру, снова пили кофе, все громко говорили, как умели... А потом повели в библиотеку, гордость Тарту, куда вход запрещен как на номерной завод. Но Реймонд пошел на подлог — отдал мне свой пропуск, сам ждал в вестибюле. И сказал (слушай, что он сказал):



— Идиоты, дураки эстонские студенты, не пошли на лекцию, потому что нет у вас титулов и званий.

Согласен.

Твой папа.

Целую.

С сыном

## АВТОРСКАЯ ЗАДАЧА

(«Дорогу осилит идущий»)

Когда я был молодым учителем, мне не приходила в голову мысль, что я могу стать автором новой задачи. Казалось, что это либо в прошлом (задача Эвклида, Эйлера, Штейнера—Лемуса), либо это сегодня делают только важные ученые. В поисках научного руководителя для диссертации тридцатилетним «мальчиком» я попал в Ярославль к Залману Алтеровичу Скопецу, профессору Ярославского пединститута. Один из его первых вопросов: «Вы задачи составляете?» — застал меня врасплох... Уехав, я начал пробовать, конечно же, ...по алгебре. Тогда и не представлял, что они называются «авторскими». Впрочем, до авторской задачи было далеко. Отправляя их З. Скопецу (в журнале «Математика в школе» он вел отдел задач), вообразил, как летят мои «задачи» в корзину. Но я не сдавался. Мечта увидеть свою фамилию в журнале подстегивала мое учительское самолюбие. Надо отдать должное профессору Скопецу: он ответил мне коротким письмом и... пообещал, что в одном из номеров журнала мое уравнение

$$2x^3 - 6x + 5 = 0$$

будет опубликовано.

Журнал выходил регулярно: раз в два месяца.

Кто печатается — поймет мои муки. Дождался! Побежал показывать в первую очередь бабушке Доре, воспитавшей меня. Отец бросил нас, когда мне было 7 лет, и мама стала главным кормильцем семьи. Радости мамы и бабушки не было предела. Право, не помню, какой была моя вторая авторская задача, но их регулярно публиковали. А тут еще и журнал «Квант» стал выходить. Авторитет его был очень велик. За задачу платили. Почти в десять раз больше, чем в журнале «Математика в школе» (2 руб. 84 коп.

в «Математике в школе», а в «Кванте» — 25 рублей). Но школьная математика их интересовала меньше, чем научно-популярная.

В редколлегию журнала «Квант» входили титулованные ученые и преподаватели самых престижных вузов Москвы и Ленинграда (МГУ, МФТИ, МИФИ, ЛГУ...). Конкурировать с ними было невозможно, но я «бомбил» редакцию новыми задачами. И когда Господь и Муза привели меня к формуле

$$S=\frac{1}{2}AW_1\cdot MN$$

($M$ и $N$ — проекции основания биссектрисы на боковые стороны), я, зашифровав ее в виде задачи о равновеликости, послал в «Квант» с наивной припиской: «по-моему, хорошо». Обратили внимание. Это был конец 1986 года. Как всегда бывало в таких случаях, чтобы уберечься от психологической травмы, записал в свой «каталог» условие задачи и постарался о ней не думать. В середине августа 87 года, вдруг вижу измятый конверт со знакомой печатью «Кванта».

— Очередной отказ, — думаю уныло. Распечатываю конверт и читаю что-то непонятное:

«Ваша задача от СССР использована на XXVIII Международной математической олимпиаде». Предположить такой успех нормальный человек не может. В организационный комитет Олимпиады присылают задачи авторы из 60—80 стран мира. Жюри выбирает всего 6 (шесть!). Выбрали! Мою задачу! Для желающих — текст задачи:

> Биссектриса угла $A$ остроугольного треугольника $ABC$ пересекает сторону $BC$ в точке $L$, а описанную окружность треугольника в точке $N$ (отличной от $A$); $K$ и $M$ — основания перпендикуляров, опущенных из $L$ на стороны $AB$ и $AC$. Докажите, что четырехугольник $AKNM$ равновелик треугольнику $ABC$.

Журнал «Квант» (№ 2, 1987) засвидетельствовал это: «Задачи по математике в этом номере предлагались на Международной математической олимпиаде в июле этого года. Мы рады отметить, что две из них принадлежат постоянным авторам нашего журнала» (задача № 1076, с. 22).

Кто предложил послать, как выбрало жюри — не знаю. Выбрали! Прошло 20 лет.

Задача неоднократно мною анализировалась, а моя формула оказалась тождественной формулам Архимеда и Лагранжа. Вот так-то.

Ю. Билецкий, Г. Филипповский,
В. Безуглый. 1996 год

# ЭКЗАМЕН

Весь учебник вмещается в несколько экзаменационных вопросов плюс доказательства формул, не вошедших в школьные учебники. И водопад задач: по пять, по десять каждому, кто как справится.

Дети не хотят уходить: «Спросите еще!»

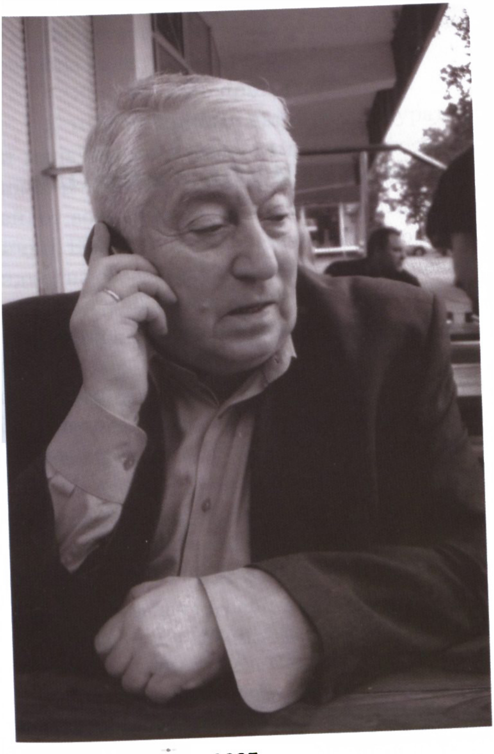
На такой экзамен попала группа методистов Украины.

— Это уже не геометрия! Это секта! — воскликнул глава Ужгородской школьной математики Василий Михайлович Петечук.

— Мы никогда не пригласим Вас, И. А., в Ужгород!

А через пару недель по его приглашению я давал урок Ужгородским учителям.

Но это уже — другие воспоминания.



2007 год

# НОСТАЛЬГИЯ ПО УЖГОРОДУ

В Ужгороде я не был около 20 лет. Благодаря тонкому знатоку математики и людей Василию Михайловичу Петечуку — главе Ужгородской учительской математики — приглашали меня туда неоднократно, кормили, поили и обволакивали самым дорогим: интересом к предмету. Что может быть слаще!

Слаще может быть открытый урок — импровизация: я попросил разрешения на его проведение в восьмом классе общеобразовательной школы.

— Навіщо це вам потрібно? І так все добре.

— Свои взгляды я могу продемонстрировать только в классе. Урок будет!

Поскольку желающих присутствовать было много, выбрали помещение Института усовершенствования — зал был забит. Как сказала одна из слушательниц:

— Я до вас з гір приїхала.

К 10 утра прибыл автобус с аккуратными мальчиками и девочками в белых передниках и молодой классной руководительницей, от волнения более белой, чем эти передники. Если кто и был спокоен, так это детки: видно, на своем веку повидали немало педагогических дядь и теть.

— Волнуетесь? — спросил я у них.

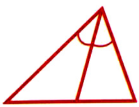
— Не-э!

Обращаюсь к аудитории с просьбой абсолютной тишины. Выдержали! Все 45 минут.

Звонок, и урок начинается с самостоятельной работы. Даю две задачи: построить треугольник по углу $A$ и высотам $h_b$ и $h_c$ и по углу $A$ и высотам $h_a$ и $h_b$. Задачи среднего конкурсного уровня. Как и предполагалось — ни один из них задач не решил. Все получили «2».

— А как их решать? — Немой вопрос подавленных детей.

— Тема урока: «Метод базисных треугольников» — проверенный посекундно в разных аудиториях Киева, Полтавы, Харькова



и Таганрога. 22 минуты — и снова самос ятельная. Те же задачи. Но дети вооружен «Ищи треугольник! Что это даст?»

Из двадцати восьми сделали 18. Побе,

— Когда вы к нам еще приедете?

— Как-нибудь, — неуверенно ответил Видно, чувствовал.

Хочу в Ужгород, к Петечуку, к тем людя что пели заздравную. И хотя «иных уж нет, а далече», — но мы-то есть! Будьмо!

С учителями Русановского лицея: Шамовичем А. А. и Филипповским Г. Б. и дочерью Юлей. 1996 год

# ОТКРЫТЫЙ УРОК

Аудитория забита учителями-курсантами института последипломного образования. Дети сидят по трое на партах. Они знают, что сейчас будет шоу. Шоу-правда.

Перед входом в класс у радостно возбужденного учителя спрашивают:

— Какая тема урока?

Отвечаю:

— Не знаю. Я буду импровизировать.

На доске записывают пять тем (восемь, десять).

1) Метод базисных треугольников в задачах повышеной сложности.

2) Метод вспомогательного элемента.

3) Точка *W* и трилистник.

4) Геометрические формулы, не вошедшие в школьный учебник.

Выбирайте, господа учителя!

Отвечайте, друзья — ученики.

Или другой открытый урок. Стереометрия. Без единого рисунка.

— Дети! Закройте глаза! Правильную треугольную пирамиду видите? Найдите угол между скрещивающимися ребрами!

...Такие уроки готовятся всю жизнь и еще — десять минут. Чтоб сосредоточиться.

Экстаз. Школа № 178. 1971 год

## ВЫ ВХОДИЛИ В КЛЕТКУ С МОЛОДЫМИ ЛЬВАМИ?

А я входил.

12 мая 1993 года мне предлагалось провести шестичасовое (!) занятие с командой математиков — школьников Украины, приглашенных в Турцию на Международную математическую олимпиаду. Эта была первая команда независимой Украины. В ее составе был и мой ученик Владислав Пиковский.

Встреча прланировалась в корпусе Украинского физико-математического лицея.

Ребята (там были и претенденты в команду) вразвалочку входили в класс. Занятие еще не началось, и мы исподтишка рассматривали друг друга. Не очень-то увлекаясь олимпиадным движением, я все же об их способностях и «специфике» был наслышан. Ну, например, предлагаешь им «олимпиадную задачу». Ответ мгновенный: «Знакома! Была на второй олимпиаде. Опубликована в журнале (называется журнал) с опечаткой в условии в третьей строке».

Так вот, ребята совершенно не напоминали анекдотичных рассеянных ученых. Наоборот. Многие из них были хорошо подготовлены физически, и в одежде у них были атрибуты, свойственные «продвинутой» молодежи, а прически явно провоцировали конфликт с неумными старшими.

Поскольку с математической литературой они были на «ты», надо было предложить новые задачи, да еще и объединенные общей идеей. Я выбрал геометрию и не ошибся. Как и следовало ожидать, с геометрией они были знакомы меньше, чем с алгеброй, анализом или теорией чисел. Но знание «стандартных ситуаций», точнее, незнание — заменялось блестящей реакцией на задачу. Однако они понимали, что знание экономит время при решении. Но гонор! Их нужно было убедить. В то же время многие (но не все) формул, не вошедших в школьный курс геометрии, не знали. Даю доказать, что

$$\boldsymbol{R \geq 2r},$$

а формулу Эйлера они не применяют. Снисходительно приняли.

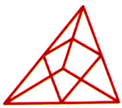
Доказательство

$$\overline{OI} = \overline{OW}_1 + \overline{OW}_2 + \overline{OW}_3$$

делают без формулы Гамильтона. И это приняли.

Но и меня они учили. Представьте ситуацию: у тех, кто предложенную задачу сделал быстрее, освобождается время и они... начинают «трепаться». Беззастенчиво, нагло и громко. Но как остановить? Выгонять из класса? Смешно! Взмок, но нашел! Нетрудно догадаться, что их слабостью является естественная боязнь не решить задачу (ведь могут подсунуть ну оч-ч-е-нь тяжелую). И тогда, как только начинается «междусобойчик», громко — на весь класс — почти кричу: «Задача!». Это посильней, чем сигнал о пожаре: глаза на меня, ручки — как штыки — ждут!

Пожарные с брандспойтами — расслабьтесь! Пожара не будет. Они умеют за секунду собраться. Задача не позволит расслабиться.



P. S. А мой ученик Владислав Пиковс
в Стамбуле получил бронзовую медаль. Сеі
в США.

И тут задача... 1972 год

## КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

Вечный страх: «Вот даст районо проверочную работу!» И действительно, многим страшно: ведь на уроке решали уравнение $2x = 6$, а на контрольной: $3y = 9$. Суть ясна? А оформление? А медальные работы? Дописывание, переписывание, конфеты и цветы в районную аттестационную комиссию...

— Исаак Аркадьевич, — говорит директор N-ой школы, — в вашем (почти с ненавистью) математическом классе (с плохо скрываемым злорадством) завтра проверочная контрольная работа, районная.

— Прекрасно. Но у меня по расписанию свободный день, и я на уроке не буду.

— Как?!! У вас контрольная работа!

— Не у меня.

— А у кого?

— У детей.

— Так вы не будете на контрольной работе? Бросите детей?!!

— Если дети не смогут написать это говно, то такой класс — не маткласс.

В школе. 1968 год

## РАЗВЕ ЭТО НЕ СУМАСШЕСТВИЕ?

(«Когда мы были молодыми»)

Теорему косинусов не любил. Ну не любил — и все. Громоздкая, квадратичная зависимость. Бр-р-р. Но учить-то надо! Да так, чтоб полюбили. Применений этой теоремы не меньше, чем теоремы Пифагора. Думал, думал, думал... и осенило.

— Дети! Самостоятельная работа: задача! Даны три стороны треугольника, найти его углы...

Вначале тяжелая пауза. А затем истерический возглас:

— Да это же сумасшедший дом! Разве можно, имея стороны, найти углы треугольника?? Это же разные единицы измерения! —

Ученица едва сдерживалась, чтобы не покрутить пальцем у виска, — не позволило уважение к учителю!

Равнодушия как не бывало. Созрели. Можно начинать:

— Тема урока — теорема косинусов!

Запорожье. Студент. 1958 год

## «К НАМ ПРИЕХАЛ, К НАМ ПРИЕХАЛ...»

(Из цыганской заздравной)

Гимназия принадлежала высшему учебному заведению. Над полубогом, (точнее, полубогиней) стоял бог-ректор. Мы, учителя, его не видели, только знали, что он — где-то там, наверху, и его надо чтить и поздравлять, поздравлять и чтить.

И вдруг!

Ах, как замирает сердце, даже сейчас, хотя прошло столько лет! Будто на первом свидании: он едет и будет на уроке! К школе подогнали небольшую цистерну валериановых капель...

— Дайте мне, дайте мне провести урок, — взмолился я. Ведь Он — математик. Крупный, не по весу, а по науке! Мы поймем друг друга! Дайте!!

— Нате!

— Одна просьба: в аудитории должно быть два, три, четыре класса. Математических, хоть бы какими гуманитарными они ни были (гимназия тяготела к английскому и юриспруденции).

— Нате!

* * *

Приехал. У всех улыбки похожие одна на другую. С валерьяновым душком.

Поздоровались! Ладонь в ладонь. Приветливо. Симпатичный мужик. Веду на урок. Гонг!

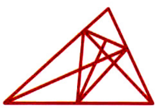
* * *

Главное, чтобы Он не уснул. Не дам! Дергаю классы! Применяю знакомую терминологию: Прямая Эйлера, окружность девяти точек, Чева, Менелай —

Не спит!

Улыбается!

И вдруг... Поднимается демократически раскованный ученик:



— Исаак Аркадиевич, да хватит все это — я придумал новую задачу!

— А решение ее ты знаешь?

— Да!

Тогда вперед!

Задача оказалась не новой, было известно четыре способа ее решения, но какова динамика урока?!

* * *

Он не уснул. Он плакал. Он ставил меня в пример.

Всюду. Всем. Всегда.

Через год меня уволили из гимназии.

Автографы, автографы, автографы... 1996 год

# ШТЕФАН БАНАХ И ШКОЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Прекрасным весенним утром я рассказывал о формулах планиметрии, не вошедших в школьные учебники. Остановился на формуле

$$\boldsymbol{S = Rp_H}$$

($S$ — площадь треугольника, $R$ — радиус описанной окружности, $p_H$ — полупериметр ортоцентрического треугольника $H_1H_2H_3$).

Рассказывал с удовольствием, любуясь весенним садом, и вдруг... Что-то со мной произошло. Что? Если бы я знал. Но что-то очень хорошее, будто встретился с НИМ — и... осенило!

— Братцы, — шепотом сказал я удивленным ученикам (видно лицо мое сияло, а не светилось)... — Я открыл! Я открыл! — (Чуть не завопил! А может, и завопил!)

На лекцию в институт усовершенствования не спешил, не летел, я несся (лекция была позже, после урока в школе)

Поздоровавшись с коллегами, безразличным голосом спросил:

— Есть ли открытия в школьной математике?

*Прежде чем продолжить — смысловая пауза: среди слушателей находился человек, назовем его N, решивший по каким-то причинам стать учителем. Поскольку он был кандидатом технических наук, то решил сразу стать большим учителем. Потому к моим лекциям относился свысока и просто их не записывал. Ради Бога, его право!*

*Пауза закончена.*

Итак, учительской аудитории был задан вопрос об открытиях в школьной математике.

Слушатели молчали, как обычно, а N, посмотрев мне прямо в глаза, уничтожающе произнес:

— Да, право, Исаак Аркадьевич, какие в школе могут быть открытия...! Нет, конечно!

— Постараюсь доказать, что это не так, — возразил я. Поединок начался.

— Итак, вспомним, как доказывается формула

$$S = pr \qquad (*)$$

($p$ — полупериметр треугольника, $r$ — радиус вписанной окружности).

Мы разбиваем треугольник $ABC$ на три треугольника $IBC$, $IAC$, $IAB$ с общей вершиной $I$ (рис. 5). Обозначим их площади $S_1$, $S_2$, $S_3$.

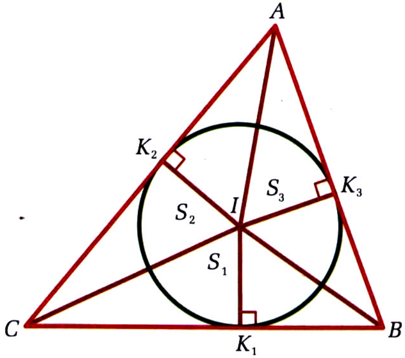



Рис. 5

Тогда

$$S_1 = \frac{1}{2}ra; \quad S_2 = \frac{1}{2}rb; \quad S_3 = \frac{1}{2}rc.$$

Значит,

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = \frac{1}{2}r(a + b + c) = pr.$$

Популярности ортоцентрическому треугольнику $H_1H_2H_3$ (рис. 6) не занимать. Одних названий у него: треугольник Шварца, ортотреугольник, треугольник Фейера.

Формула

$$S = Rp_H$$

знаменита! Но никто, подчеркиваю, никто не обратил внимание на то, что она **аналогична** формуле (*) не только внешне, но и внутренне — по доказательству. Действительно, поскольку,

$$AO \perp H_2H_3,$$

то

$$S_{OH_2AH_3} = \frac{1}{2}R \cdot H_2H_3,$$

аналогично,

$$S_{OH_3BH_1} = \frac{1}{2}R \cdot H_1H_3; \quad S_{OH_1CH_2} = \frac{1}{2}R \cdot H_1H_2.$$

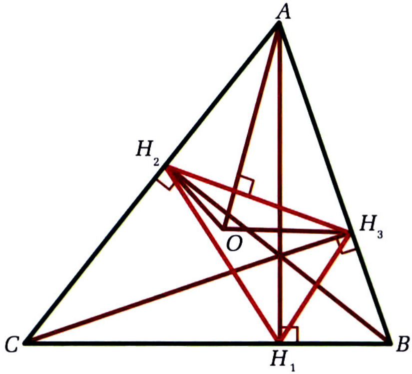



Рис. 6

Теперь сложим!

$$S = \frac{1}{2}R\left(H_2H_3 + H_3H_1 + H_1H_2\right) = R \cdot p_H.$$

Именно так выводилась формула (*).

— Подумаешь! — не сдавался N, — это всего лишь аналогия.

Я: «Но аналогия?!»

N: «Бесспорно!»

— Скажите, — наверное, слишком доброжелательно спросил я, — как вы относитесь к Штефану Банаху?

— Ну, Ба-а-а-нах! — (N расцвел) всемирно известный польский математик, работал во Львове, один из создателей функционального анализа.

— Для вас он авторитет?

— Конечно!..

— Так вот, — перебил его я, — Штефан Банах сказал:

«Математик — это тот, кто находит аналогию утверждений!»

— Всё?

— Всё!

— Но Банах не остановился на этом!

«Более сильным является тот математик, который устанавливает аналогии доказательств».

— Было?

— Было!

— Всё?

— Всё!

Но Банах и на этом не останавливается!

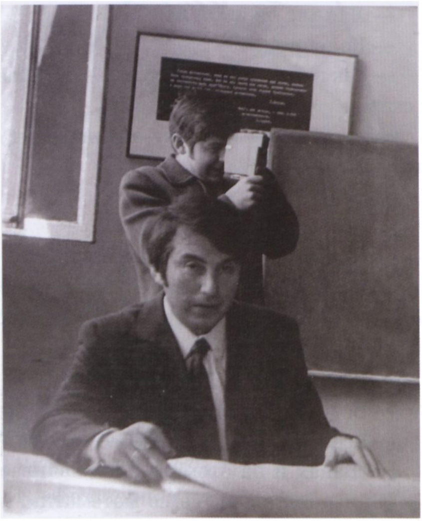
«Сильнейшим является математик, который замечает аналогии теорий!»

И это не конец!

«Но можно представить себе и такого, — оканчивает свое афористическое высказывание Штефан Балах, — кто между аналогиями видит аналогии!»

Теперь всё!

Всё!



Контрольная. Школа № 178. 1971 год

# КАК БИССЕКТРИСЫ В МОСКВУ ЕЗДИЛИ

Люблю восточную мудрость:

**— Как сделать дорогу короче?**
**— Беседой!**

Поскольку в вагоне поезда не всегда везет с собеседниками, у меня наготове папка-планшет, авторучка и задачник.

Вот и на этот раз, удобно примостившись у вагонного столика, в предвкушении удовольствия открыл книжку. Душевную беседу с задачей прервала пара: он и она — приветливо поздоровались и стали располагаться. Извинившись, что не успели поесть, со вкусом стали готовиться к ужину. На столике, несколько оттеснив мои бумаги, появилась бутылка «Хванчкары» и вкусная снедь.

Пригласили. Я отказался, и мы на некоторое время расстались: каждый делал свое дело. Бутылка «Хванчкары» понемногу пустела, и от вторичного приглашения выпить хорошего грузинского вина я не отказался. Завязалась беседа. Познакомились ближе. Узнав, что я школьный учитель, собеседник явно оживился. Судя по всему, ему хотелось понравиться даме. Кажется, за мой счет.

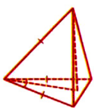
— Так вы читаете математику, — он употребил вузовский термин, — вы, так сказать, математик-шкраб, — как то ли любил, то ли не любил называть школьных работников Ильич.

— Точнее, «арифметик», — (вспомнился термин, которым любил характеризовать школьных учителей известный теперь в Европе математик).

Он снисходительно рассмеялся:

— А сейчас над чем, так сказать, работаете? — взгляд в сторону спутницы.

— Да, вот, «обратные задачи», — я мог увести разговор в сторону, но воспитанный двором...



— Хе-хе, обратные теоремы, обратные задачи, необходимость и достаточность — знакомо, знакомо...

— Неужели, вы тоже по этой части?

— Университет. Не первый год. Так что там у вас?

— Обратные задачи... В равнобедренном треугольнике высоты $h_b$ и $h_c$ равны. Легко доказывается. И с медианами вроде нетрудно. Вот что-то с биссектрисами у меня не выходит...

— С биссектрисами? — рассмеялся он, — ну вот смотрите: треугольник $ABC$ равнобедренный, значит, $\Delta BCL_3 = \Delta BCL_2$, а значит, биссектриса $BL_3$ равна биссектрисе $CL_2$

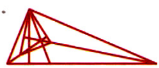
— Действительно, — фальшиво обрадовался я.

— Теперь давайте обратную:

> Биссектриса $BL_3$ равна биссектрисе $CL_2$. Доказать, что треугольник $ABC$ равнобедренный (рис. 7).

— Сейчас сделаем, — подмигнул он даме.

— Спорим на бутылку коньяка? Что не сделаете!



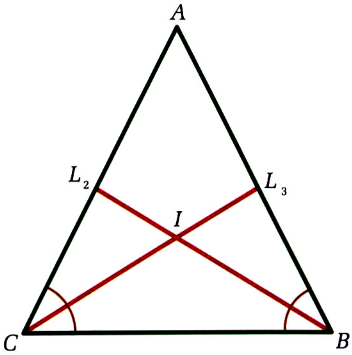
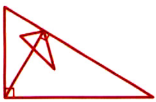



Рис. 7

— Не боитесь? Спорим!

Конечно, с моей стороны это было не совсем честно. Я подсунул ему знаменитую задачу Штейнера—Лемуса. Конечно, он не решил.

Утром в Москве мы расстались холодно.



1996 год — шестидесятилетие

# НЕ ВРАТЬ

Трудно, особенно в начале пути. Привыкли с первого класса — из 25 детей класса — 18 отличников: требуют мамы и папы, дедушки-ветераны, бабушки-пенсионерки: мой внук самый умный, а внучка — топ-модель. А конкурс на лучшую, на лучшего, лучший класс, школа...

У нас, педагогов, — лучший кабинет, лучший журнал. Вспоминается, как вместе с издательством «Факт» встретился со студентами Нежинского пединститута. Явный любимец студенток, преподаватель с пышными бакенбардами решил «срезать» меня, заезжего гастролера, (помните, как у Шукшина). Красуясь перед аудиторией, громогласно задал вопрос: «Исаак Аркадьевич, что бы вы в первую очередь сделали в реформе школьного образования?»

Ответил: «Запретил бы классные журналы». Физика не стало. Нокаут. Думается, что сидящие в зале представили сразу: завучи школ, инспектора районо без работы — десятки тысяч безработных... А Академия педагогических наук? Хотелось бы увидеть одного (!) учителя математики, кто воспользовался бы их (академиков) рекомендациями. Товарищи академики, уберите классные журналы как предмет проверки, и мы, учителя, простим вам тонны советской и постсоветской школьной лжи. Ей-богу, имеет смысл...

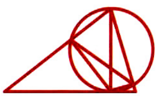
С другом, выдающимся художником современности Александром Агафоновым. 1985

# ПАТЕНТ НА ОТКРЫТИЕ

Кто первый? Например, теорема Пифагора задолго до Пифагора была известна египтянам, вавилонянам, китайцам и индусам.

Или окружность девяти точек, которую многие (и я в том числе) с удовольствием называют «окружностью Эйлера». Тем не менее, в книге Г. С. М. Коксетера и С. Л. Грейтцера «Новые встречи с геометрией» (Москва: Наука, 1978, с. 33) читаем:

«Задача Б. Бивана, опубликованная в английском журнале в 1804 году... иногда ошибочно приписываемая Эйлеру... по-видимому, первое полное доказательство было опубликовано в 1821 году Понселе. К. Фейербах переоткрыл частичный результат Эйлера еще позже и добавил...»



Достаточно? Так вот, мною найдены две новые замечательные точки в треугольнике. Впервые.

Доказательно. Аргументированно. Неожиданно детективно.

Итак, по порядку.

В середине семидесятых годов прошлого столетия я предложил журналу «Математика в школе» следующую задачу:

> В треугольник вписана окружность $\gamma$. Точки касания ее с двумя сторонами соединены отрезком. Во вновь образовавшийся треугольник вписана окружность $\gamma_1$. Доказать, что центр этой окружности принадлежит окружности $\gamma$ (рис. 8).

Задача была опубликована, а доказательство можно найти в книге «Повернення втраченої геометрії» (І. Кушнір, Київ: «Факт», 2000, с. 215). Затем ее публиковали в различных задачниках:

1) Герасимова И. С., Гусев В. А., Маслова Г. Э., Скопец З. А., Ягодовский М. И. «Сборник задач по геометрии для 9—10 классов». Москва: Просвещение, 1977, № 73, с. 374.

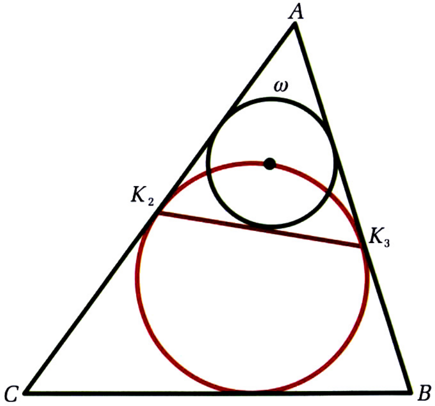



Рис. 8

2) Шарыгин И. Ф. «Задачи по геометрии, планиметрия». Москва: Наука, 1986, № 56, с.11.

3) Шарыгин И. Ф. «Задачник. 9—11 классы», Москва: Дрофа, 1997, № 56, с. 10.

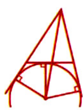
Удивительно, но коллеги из Русановского лицея нашли эту же задачу в Сангаку Японской храмовой геометрии, сделав перевод с английского, со следующей формулировкой того же условия:

В угол вписана окружность ω. В этот угол вписали бóльшую окружность, которая проходит через центр окружности ω. Бóльшая окружность, касается сторон угла в точках $M$ и $N$. Доказать, что отрезок $MN$ касается окружности ω.

Очевидно, что независимо друг от друга в XVII—XIX веках и мною была найдена одна и та же задача. Сопоставление условий (моей и японцев), способов решения привело к теореме, которая теперь займет видное место, как, например, «теорема трилистника» или точка, симметричная ортоцентру треугольника $ABC$ относительно стороны.

Сформулируем новую теорему:

Биссектриса угла $BAC$ треугольника $ABC$ пересекает вписанную в треугольник $ABC$ окружность в двух точках: инцентре треугольника $AK_2K_3$ и центре вневписанной окружности треугольника $AK_2K_3$ касающейся стороны $K_2K_3$ ($K_2, K_3$ — точки касания стороны $AC$ и $BC$ вписанной окружности) (рис. 9).



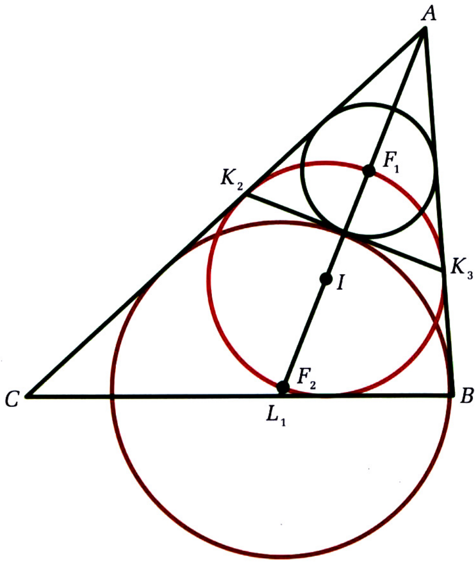
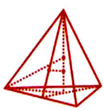



Рис. 9

А теперь о заявке и праве на открытие теоремы (патент):

Если бы эта теорема была известна моим современникам и современникам японской



храмовой геометрии, то и мою задачу, и японскую не имело смысла составлять: они тождественны этой замечательной теореме — новой теореме геометрии треугольника.

Аплодисменты?

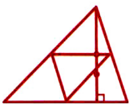

Триумф Русановского лицея. 2005 год

# ЗДРАВСТВУЙТЕ,
# ГОСПОДИН КИСЕЛЕВ!

Наверное, ни один учебник геометрии не удовлетворяет (!) педагогическую общественность. Кроме одного — учебника геометрии Киселева. (Киселев А. П. (1852—1940) — русский и советский педагог-математик.) Написанный в 1892 году, он выдержал десятки переизданий, да и сегодня пользуется у специалистов популярностью.

Воистину его Величество — Случай... Ну, кто не знает теорему о средней линии треугольника! А если читатель — учитель, попросите «сходу» доказать эту теорему. Во всяком случае, поставив себе эту задачу, я испытал секундное затруднение — пришлось сделать дополнительное построение (рис. 10).





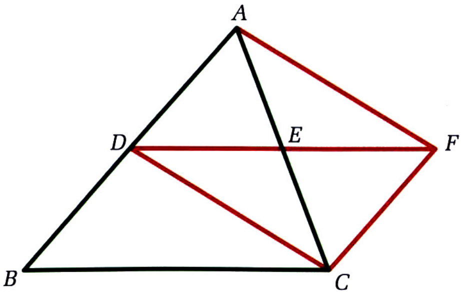



Рис. 10

Недовольный собой, я решил посмотреть, как доказывается она в «первоисточнике» — в учебнике геометрии для школ А. П. Киселева, наивысшего авторитета в вопросах доступности геометрии для школьников. И с ужасом обнаружил, что эта теорема доказывается «методом от противного». («Предположим, что это не так...») Как? — удивился я. Метод от противного не очень почитаем в высокой математике, и если его можно обойти, то... А Киселев этого не сделал?! Да и «противный» метод в начале курса? Для неокрепшего ума семиклассника? Что-то тут не так! А как в других учебниках излагается эта теорема? Оказалось...

Некоторые авторы, «ничтоже сумняшеся», в школьных учебниках геометрии теорему о средней линии излагают, как А. П. Киселев: Погорелов А. В., Шарыгин И. Ф., Никитин Н. Н.

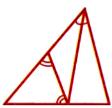
А другие не так! Глаголев Н. А., Атанасян Л. С., Петечук В. М.

«Как было раньше?» — спросил я у себя и открыл первый том учебника геометрии Адамара. Ой, как интересно! Мое доказательство совпадало с доказательством Адамара! Оно было естественным.

Уверен, что Киселев знал учебник Жака Адамара. Почему же, пренебрегая доступностью, он выбрал иное доказательство? Ответ прост: для подтверждения своей концепции о пропорциональности отрезков, теореме Фалеса и т. д.

Концептуальность победила доступность... А жаль...

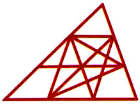
Не смею категорично утверждать, что удачный термин «средняя линия» ввел именно Киселев, но многие авторы учебников этот



термин не признают. Во всяком случае, в V томе «Математической энциклопедии» (Геометрия) такого термина нет, в переводных книгах его тоже не встречал, а в систематическом курсе Перепелкина А. Н. термин есть, но теорема о средней линии принимается без доказательства. Г. С. М. Коксетер во «Введении в геометрию» (Москва: «Наука, 1966, перевод с английского) ссылается в этом вопросе на Эвклида, в трудах которого тоже не встречаются слова «средняя линия».

Подведем итоги. Термин «средняя линия», как мне кажется, придуман Киселевым. А к теореме о средней линии треугольника надо относиться более осторожно: знать два (или более!) доказательства, из которых **последним** будет метод «от противного»

А учебник Киселева — хороший. Рекомендую.



1977 год

## АХ ПЕТЕРБУРГ, ПЕТЕРБУРГ, ЧТО ЗА ЖИЗНЬ, ПРАВО...

Что скрывать? Уже очень хотелось выступить в С.-Петербургской физико-математической школе, ученики которой составляют костяк сборной России по математике на Международных олимпиадах. Как никогда готовился. В вагоне поезда «учил» выступление наизусть, чтоб обойтись без «бумажки».

Школа находится в центре Петербурга, в бывшем особняке какой-то графини, например, Шереметьевой. Боюсь ошибиться, но, кажется, она построила его для обучения дворянских детей. Нынешние ребята не подвели: конкурс до десяти человек на место. Роскошью киевского лицея «Гранд» с его пятью звездочками и итальянской сантехникой не пахнет. Зато мраморная стена до потолка в золоте самой высокой пробы — фамилиях учеников, получивших медали Международных олимпиад по математике, физике, химии и т. д.

Показался несколько странным интерьер: стены некоторых аудиторий из стекла (верхняя часть. На эту деталь обратите внимание!)

В аудитории собралось человек 35, пришли из других подобного типа школ (скорее не на меня, а «подогнали» под плановое методобьединение.)

С первых минут выступления увидел, вернее, почувствовал, как зал разделился на неравные части.

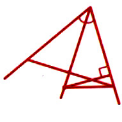
Неожиданностью было то, что задача Паппа для аудитории оказалась неизвестной. Медленно пробираюсь сквозь растущую неприязнь, не понимая, что происходит. Вдруг выкрик:

— Так что, мы неправильно учим?

— Может быть.

— Так что, нас надо повыгонять? (Передаю дословно.)

— Может быть! — Восторженные взгляды нескольких человек. Э, да тут борьба самолюбий!



Срочно делаю перерыв: пусть уходят, пусть останутся два человека, которым есть смысл рассказывать. Конец перерыва: ушли только два человека, два молодых человека. Посыпались вопросы:

— Какой курс геометрии вы преподаете?

Ответ:

— Я преподаю не курс геометрии — а геометрию.

(Ах, вот оно что: тяготение к строгому систематическому курсу. Но ведь это школа, а не вуз. Обычное вузовское заблуждение.)

Поразил человек в предпенсионном возрасте:

— Вы что, многие задачи знаете наизусть?

— Да. А Вы?

Молчание.

Без комментариев.

### Ленин на броневике

Помните, я заметил, что полстены в классе было стеклянной?

Так вот, заканчивая встречу, принял позу «Ленин на броневике» — и показал на стеклянную стену класса. Все повернули головы: в коридоре, видимо, на плечах друг у друга, стояли и внимательно следили за записями на доске ученики лицея. Им было интересно. Очень.

Эту школу закончил Перельман. Тот, что наконец доказал гипотезу Пуанкаре и... отказался от Филдсовской премии.

С учеником Мишей Мориным. 2001 год

# ВЕЗЕТ НЕ ДУРАКАМ

Вседозволенность стремительно ворвалась в издание книг: теперь можно напечатать за свои или родительские деньги задачники и даже учебники — гуляй-не-хочу!

В одной из таких брошюр, предназначенной для домашних заданий и изданной школой, я столкнулся с непростой задачей, где требовалось найти зависимость между объемами многогранников, полученных в результате сечения призмы плоскостью, определенной тремя точками на ребрах.

Условие довольно простое. Вот оно:

> Прямая треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ с нижним основанием $ABC$ и боковыми

ребрами $AA_1, BB_1, CC_1$ рассечена плоскостью, проходящей через точки $E, F, C$, где $E$ — середина ребра $AA_1$, точка $F$ лежит на ребре $BB_1$, причем $BF:FB_1 = 1:2$. Найти объем части призмы $ABCA_1B_1C_1$, заключенной между секущей плоскостью и нижнем основанием призмы, если известно, что объем призмы равен $V$.

В призме обозначим

$$AE = EA_1 = 3t; \quad BF = 2t; \quad FB_1 = 4t;$$

и пусть $S$ — площадь основания $ABC$ (рис. 11).

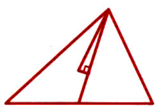
Многогранник $AEFBC$ будем называть $X$-многогранником (его объем обозначим — $V_X$). Для определения $V_X$, очевидно, потребуется этот $X$-многогранник разбить на пирамиды.

Но на какие и как найти их объемы?

Бросаются в глаза два прямоугольных тетраэдра: $EABC$ и $FABC$, обозначим их объемы $V_E$ и $V_F$, соответственно.

Чем же эти тетраэдры «привлекательны», спросите вы?

Возможностью легко вычислить их объемы!



Действительно,

$$V_E = \frac{1}{3} AE \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot 3t \cdot S = tS,$$

$$V_F = \frac{1}{3} FB \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot 2t \cdot S = \frac{2}{3} tS.$$

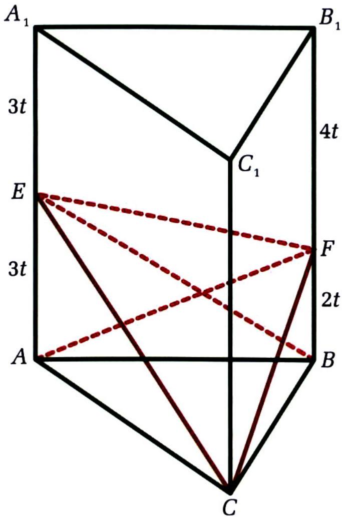



Рис. 11

А теперь найдем сумму этих объемов!

$$V_E + V_F = tS + \frac{2}{3}tS = \frac{5}{3}tS.$$

Зачем же искать их сумму? Ведь тетраэдр *FABC* явно не дополняет тетраэдр *EABC* до *X*-многогранника. Но давайте, все же, рискнем!

Поскольку объем $V$ заданной призмы равен $S \cdot 6t$, то

$$\frac{V_E + V_F}{V} = \frac{5 \cdot St}{3 \cdot 6St} = \frac{5}{18};$$

$$V_E + V_F = \frac{5}{18}V.$$

Сверка с ответом поразила: сумма объемов тетраэдров, из которых никак не «скроить» *X*-многогранник, совпал с истинным объемом $V_X$: в ответе было тоже $\frac{5}{18}V$. Значит, что? Значит, в *X*-многограннике существует нечто, равновеликое тетрэдру *FABC*.

Да вот же оно!

Это же тетраэдр *EFCB*!

Действительно, с тетраэдром *FABC* у него общая грань *FBC*, а также равные соответственные высоты как расстояния от бокового ребра данной призмы до противоположной ему боковой грани. Дальнейшее очевидно.

Риск оправдался. Или все же интуиция? Через неделю наткнулся на формулу Адамара. Решение сократилось до одной строки.

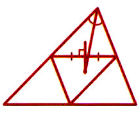
И. Кушнир и М. Коссов с учениками 178 школы (Ереван, 1973 год)

# АВТОРСКАЯ ЗАДАЧА КАК ПОВОД ДЛЯ БЕССМЕРТИЯ

Надеюсь, уважаемый читатель, Вы шокированы гипертрофированной нескромностью автора. Тогда, как говорится, «цель достигнута».

Чтобы обратить на себя внимание, футурист Владимир Маяковский надевал вместо галстука морковку, а Сальвадор Дали прогуливался по улицам города с крысой на поводке. У нас цель поскромней — обратить внимание на новую авторскую задачу, которая, по глубокому убеждению автора, будет так же популярна у любителей геометрии, как задача Штейнера—Лемуса или задачи Шебаршина и Шарыгина.





Правда, решающему требуется знать не только «затертую» замечательную точку $H$ — ортоцентр, но и первую «изобретенную» тем же автором «теорему трилистника», простите, «теоремы тризуба» — точку $W$.

Итак, вот ее условие.

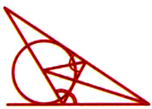
> Внутри угла $A$ находится точка $S$. Пересечь стороны угла прямой так, чтобы ортоцентр $H$ образовавшегося треугольника $SXY$ ($X$ и $Y$ принадлежит сторонам угла) совпал с точкой $W$ треугольника $AXY$.

Проведем анализ. Предположим, прямая $XY$ найдена (рис. 12). Опишем вокруг треугольника $AXY$ окружность и отметим середину дуги $XY$ точку $W$. Тогда

$$\angle XWY = 180° - A.$$

Поскольку $H$ — ортоцентр треугольника $XYS$, то

$$\angle XHY = 180° - \angle XSY.$$



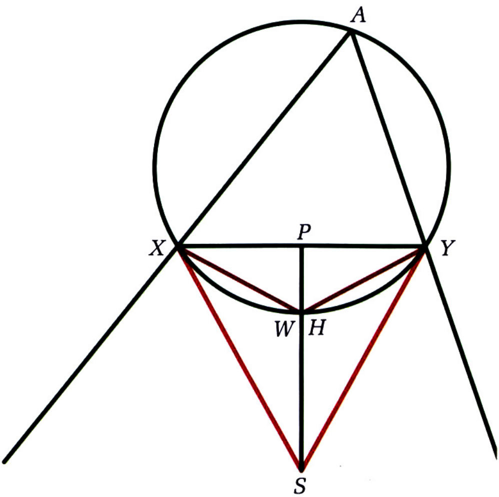



Рис. 12

Значит

$$\angle XSY = A.$$

Проведем в треугольнике $XSY$ высоту, которая пересечет хорду $XY$ окружности в точке $P$. Поскольку высоте $SP$ принадлежит и точка $W$, то

$$XP = PY,$$

а треугольник $XYS$ — равнобедренный.

Анализ окончен, построение очевидно.

Поскольку

$$SX=SY, \qquad \angle XSY = A,$$

то точку $X$ (и точку $Y$) можно получить поворотом с центром $S$ одной из сторон данного угла на угол $A$. Пересечение с другой стороной угла и даст точку $X$ (или точку $Y$).

Угощайтесь!

Шестидесятилетие в Доме Учителя.
Поздравляет А. И. Шапиро. 1996 год

## У НИХ Я УЧИЛСЯ

Этих учителей знал весь Киев. Как футболистов «Динамо». Они были лучшими. Лучшими учителями математики. Первыми организаторами классов с углубленным изучением этого предмета.

Двое из них написали блестящие книги. Остальные напечататься не могли. Ни один из них не был даже Отличником просвещения.

Государство делало вид, что их нет. Тогда они стали репетиторами. Лучшими, к которым трудно было попасть. А потом они или уехали, или умерли. Их памяти посвящается.

Патриарх — Борис Соломонович Вайнман, прошедший солдатом всю Войну, он в рюкзаке носил задачник Попруженко и между налетами решал задачи. Любитель классической музыки, он был вспыльчив, и мы даже поссорились однажды. Но когда он узнал, что одну из теорем стереометрии я назвал «теоремой Вайнмана» — сменил гнев на милость (как он узнал — известно одному Богу).

Когда я показал ему применение гомотетии для разностного треугольника, Борис Соломонович произнес слова, которые, когда мне трудно, я вспоминаю: «Ох, Изя... Вы сами не знаете, кто вы».

Он был человеком своего времени. Узнав, что в лекции для учителей о методе масс я применю рисунок о двух равносторонних треугольниках (рис. 13), не пришел, боясь быть обвиненным в сионистском заговоре.

Он был эстетом геометрии, я и сегодня разговариваю с ним. Спорю, конечно.

Самый, самый... Уважаемый и авторитетный, руководитель нашего семинара — Каплан Яков Львович. Единственный, кому удалось издать бессмертные книги: «Уравнения», «Неравенства». Доказательства в его книгах были безукоризненны. «Меня учил Каплан» звучало так же, как «меня учил Эйлер».

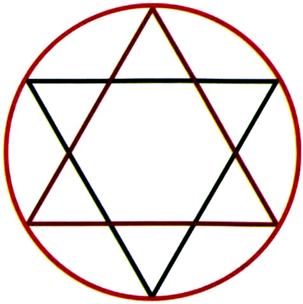


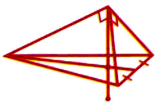
Рис. 13

Когда директор 173 школы захотел уволить меня за то, что вместо дифференциальных уравнений я в 10 классе решал тригонометрические, он спокойно сказал: «Скажите, что это я как методист приказал вам».

Покойный мой Миша...

Михаил Давыдович Коссов.

Многие годы работали вместе, пока его не довели до инсульта и ранней (в 40 с лишним лет) смерти. Это он показал мне формулу биссектрисы (формулу Лагранжа) и научил решать тригонометрические неравенства. А я



никак не мог понять, почему нужно проводить зачет в воскресенье.

Рувим Машбиц, блестящий студент мехмата КГУ, один из первых основателей математических классов и школы, которая теперь называется «Лидер». Друг, сумевший помочь в самом сокровенном, — в судьбах моих детей.

Исай Габович, отдавший много сил лицею № 145, автор статей в «Кванте».

Я. О. Айзенштат и его жена Б. Г. Белоцерковская, первыми поставившие школьную тригонометрию на современный уровень. Их книги я знаю наизусть. Я учил их дочь. И горжусь тем, что Яков Осипович был у меня на открытом уроке и учил глупую администрацию, как ценить учителей. Он научил моего сына работать. Поклон ему!

Кроме Рувима, уже никого нет в живых. Ушли не Заслуженными и не учителями-методистами.

Блестящая плеяда киевских учителей. Мы и на юбилее решаем задачи (см. фото). Весело!

60-летие Б. С. Вайнмана. 1965 год
Во главе стола юбиляр,
первый справа М. Д. Коссов,
слева: И. А. Кушнир, Я. Л. Каплан,
Р. И. Машбиц, И. Г. Габович

# БИБЛИОГРАФИЯ


1. Кушнір І. А. Трикутник і тетраедр у задачах. — К.: Радянська школа, 1991. — 208 с.
2. Кушнір І. А. Методи розв'язання задач з геометрії. — К.: Абрис, 1994. — 460 с.
3. Кушнір І. А. Побудова трикутника. — К.: Либідь, 1994 г. — 78 с.
4. Кушнір І. А. Трикутник у задачах. — К.: Либідь, 1994. — 102 с.
5. Кушнір І. А. Трикутна піраміда у задачах. — К.: Либідь, 1994. — 94 с.
6. Кушнир И. А. Шедевры школьной математики. — К.: Астарта, 1995. — Т. 1. — 576 с.
7. Кушнир И. А. Шедевры школьной математики. — К.: Астарта, 1995. — Т. 2. — 508 с.
8. Кушнир И. А. Математическая энциклопедия. — К.: Астарта, 1995. — 768 с.

9. Кушнир И. А. Геометрия. Теоремы и задачи. Планиметрия. — К.: Астарта, 1996. — 478 с.

10. Кушнир И. А. Геометрия. Теоремы и задачи. Стереометрия. — К.: Астарта, 1996. — 478 с.

11. Кушнир И. А. Векторные методы решения задач. — К.: Оберіг, 1996. — 206 с.

12. Кушнир И. А. Неравенства. Задачи и решения. — К.: Астарта, 1996. — 535 с.

13. Кушнир И. А. Уравнения. — К.: Астарта, 1996. — 606 с.

14. Кушнир И. А. Координатный и векторный методы решения. — К.: Астарта, 1996. — 413 с.

15. Кушнир И. А. Функции. Задачи и решения. — К.: Астарта, 1996. — 530 с.

16. Кушнир И. А. Математика для поступающих в вузы. — К.: Астарта, 1996. — 606 с.

17. Кушнир И. А. Тригонометрия. Задачи и примеры. — К.: Астарта, 1997. — 390 с.

18. Кушнир И. А. Сколько стоит экзамен по математике. — К.: Факт, 1997. — 43 с.

19. Кушнир И. А. Теорема Виета. — К.: Факт, 1997. — 43 с.

20. Кушнир И. А., Финкельштейн Л. П. Задачи и примеры для Вовочки и Веры. — К.: Факт, 1997. — 204 с.

21. Кушнир И. А. Математическая олимпиада. 7 класс и не только. — К.: Астарта, 1997. — 160 с.

22. Кушнир И. А. Справочник по математике для школьников. — К.: Астарта, 1998. — 520 с.

23. Кушнир И. А. Жемчужины тригонометрии. — К.: Факт, 1998. — 74 с.

24. Кушнир И. А. Треугольник. Теория и задачи. — К.: Факт, 1998. — 56 с.

25. Кушнир И. А. Декартовы координаты и векторы в школе. — К.: Факт, 1998. — 54 с.

26. Кушнир И. А. Лучшие задачи по стереометрии. — К.: Факт, 1998. — 58 с.

27. Кушнир И. А., Финкельштейн Л. П. Геометрия 7—9. Школа боевого искусства. — К.: Факт, 1999. — 232 с.

28. Кушнир И. А., Финкельштейн Л. П. Не хочу быть двоечником. — К.: Факт, 2000. — 138 с.

29. Кушнір І. А. Повернення втраченої геометрії. — К.: Факт, 2000. — 280 с.

30. Кушнір І. А. Математика-5. (Підручник для п'ятого класу.) — К.: Форум, 2000. — 384 с.

31. Кушнір І. А., Фінкельштейн Л. П. Не хочу бути двієчником. — К.: Факт, 2000. — 140 с.

32. Кушнир И. А., Финкельштейн Л. П. Геометрия 7—9. Сборник задач. — К.: Факт, 2000. — 384 с.

33. Кушнір І. А., Фінкельштейн Л. П. Математика в задачах і прикладах. 101 порада. — К.: Факт, 2001. — 302 с.

34. Кушнір І. А., Фінкельштейн Л. П. Геометрія 7—9. Школа бойового мистецтва. — К.: Факт, 2001. — 232 с.

35. Кушнір І. А., Фінкельштейн Л. П. Алгебра 7—9: від опанування до захоплення. — К.: Факт, 2002. — 408 с.

36. Кушнір І. А. Геометричні формули, що не ввійшли до шкільних підручників. — К.: Факт, 2002. — 112 с.

37. Кушнір І. А. Комплексні числа. Теорія і практика. — К.: Факт, 2002. — 168 с.

38. Кушнір І. А., Фінкельштейн Л. П. Приклади і задачі для кмітливих і ледачих. 1—2 класи. — К.: Факт, 2003. — 136 с.

39. Кушнір І. А., Фінкельштейн Л. П. Приклади і задачі для кмітливих і ледачих. 3—4 класи. — К.: Факт, 2003. — 224 с.

40. Кушнір І. А., Фінкельштейн Л. П. Навчання у просторі. — К.: Факт, 2003. — 168 с.

41. Кушнір І. А. Задачі з однією підказкою. — К.: Факт, 2003. — 174 с.

42. Кушнір І. А. У світі логарифмів. — К.: Факт, 2004. — 136 с.

43. Кушнир И. А. Треугольник и тетраэдр. — К.: Факт, 2004. — 300 с.

44. Кушнир И. А. Возвращение утраченной геометрии. — К.: Факт, 2004. — 328 с.

45. Кушнир И. А. Триумф школьной геометрии. — К.: Наш час, 2005. — 432 с.

46. Кушнир И. А. Альтернативные способы решения задач. — К.: Факт, 2006. — 366 с.

47. Кушнір І. А. 101 задача з тригонометрії. — К.: Факт, 2006. — 120 с.

48. Кушнір І. А. 101 задача на побудову. — К.: Факт, 2006. — 156 с.

49. Кушнир И. А. 101×3. (101 задача на построение. 101 задача по тригонометрии. 101 задача на уравнение.) — К.: Факт, 2007. — 416 с.

50. Кушнір І. А. 101 задача на чудові точки. — К.: Факт, 2007. — 160 с.

51. Кушнір І. А. 101 задача. Рівняння. — К.: Факт, 2007. — 120 с.

52. Кушнір І. А. З геометрією на ти. — Харків: Основи. — 2007. — 188 с.

53. Кушнір І. А. Тріумф шкільної геометрії. — К.: Наш час, 2007. — 430 с.

# СОДЕРЖАНИЕ

**Кушнир, Исаак**

**К 96** Геометрические воспоминания. — К.: Факт, 2008. — 112 с.

**ISBN 978-966-359-223-7**

Он — обычный школьный учитель без титулов и званий. Но в его преподавательском багаже — не один десяток книг: учебников, задачников, помогающих не только понять, но даже полюбить математику — алгебру и геометрию.

На вопрос «Какова тема открытого урока?» он отвечает: «Не знаю. Я буду импровизировать».

Он пьет кофе во время урока!!!

А его ученики этого не замечают — все погружены в решение задач.

Благословен класс, имеющий такого Учителя!

Прочтите книгу и убедитесь в этом сами.

**УДК 821.161.1(477)-94+514(092)**
**ББК 84(4Укр=Рос)6-44**

*Научно-методическое издание*

**Исаак КУШНИР**

**ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ВОСПОМИНАНИЯ**

Редактор *Леонид Финкельштейн*
Ответственная за выпуск *Елена Шарговская*
Корректор *Нина Тихоновская*
Макетирование обложки *Иннокентия Вырового*
Верстка и макетирование *Дмитрия Финкельштейна*

Сдано в производство 17.12.2007. Подписано в печать 25.02.2008. Формат 84×108 1/32. Бумага офсетная № 1. Гарнитура «Запф Эллиптикал». Печать офсетная. Усл. печ. л. 5,88. Уч.-изд. л. 6,3. Тираж 4000 экз. Зак. №8-312.

ООО «Издательство „Факт"»
04080, Украина, Киев-80, а/с 76
Регистрационное свидетельство
ДК № 1284 от 19.03.2003
Тел./факс: (044) 287 1882, 287 1886
E-mail: office@fact.kiev.ua
Отдел сбыта: (044) 463 6887
E-mail: sbyt@fact.kiev.ua
www.fact.kiev.ua

Напечатано с готовых форм на ЗАО «ВИПОЛ»
03151, Киев, ул. Волынская, 60
Свидетельство о внесении в Государственный реестр
серия ДК № 752 от 27.12.2001

Исаак Кушнир — заслуженный учитель Украины, учитель-методист, доцент Киевского института усовершенствования учителей им. Б. Гринченко, дважды Соросовский учитель, всемирно признанный специалист по эвклидовой геометрии. Автор более пятидесяти книг, сотен статей, опубликованных в журналах «Математика в школе», «Квант», «В мире математики». Составил множество авторских задач и составил «Золотую колекцию лучших задач элементарной математики».


ISBN 978-966-359-223-7
9 789663 592237