Югорский физико-математический лицей

В. Ню

Варианты заданий по математике физико-математических турниров

Учебно-методическое пособие

Ханты-Мансийск
2014

В. Ню

Варианты заданий по математике физико-математических турниров: Учебно-методическое пособие. Ханты-Мансийск: Югорский физико-математический лицей, 33 с.

Методическое пособие содержит варианты заданий с ответами и решениями по математике Окружных физико- математических турниров и вступительных экзаменов, которые проводились Югорским физико-математическим лицеем в 2003 - 2014 г.г.

Пособие предназначено для учащихся 8 – 9 классов. Задачи пособия могут быть использованы в работе школьных математических кружков и факультативов, а также при подготовке школьников к различным олимпиадам и экзаменам итоговой аттестации за 9 класс.

От автора.

Югорская физико-математическая школа создана Постановлением правительства Ханты-Мансийского округа – Югры в мае 2002 года, а в мае 2007 года после государственной аккредитации она была переименована в Югорский физико-математический лицей-интернат.

В настоящее время в лицее обучаются учащиеся 10-х и 11-х классов по двум профилям: физико-математическому и информатика и компьютерные технологии.

Важной составной частью функционирования школы является ежегодный набор учеников в 10 класс. С 2003 года основу системы набора в ЮФМЛ составляет ежегодный «Окружной физико-математический турнир», который проводится ежегодно в апреле – мае. Для проведения турнира преподаватели лицея выезжают в различные города и поселки округа. В Турнире могут участвовать все желающие девятиклассники. Участникам турнира предлагается письменно выполнить по пять заданий по математике и физике. На выполнение задания отводится 4 часа: по 2 часа на каждый предмет.

За прошедшее время физико-математический турнир стал заметным явлением в образовательном пространстве округа и постоянно привлекает внимание многих учеников и учителей всего округа. Турнир дает не только возможность поступления в ЮФМЛ, но и возможность проверить девятиклассникам свою готовность к экзаменам Государственной итоговой аттестации. Многим он помогает сделать правильный выбор профиля для дальнейшего обучения.

Проведение Турнира было бы не возможным без помощи и внимания Департамента образования и молодежной политики Ханты-Мансийского округа, без содействия органов управления образованием всех территорий, наконец, без тех учителей, чьи ученики учились или обучаются в нашем лицее. Всем им большое спасибо.

Ню В.В.

Варианты заданий 2003 г.

Вариант 31

1. Можно ли разбить числа 1, 2, 3, …, 30 на десять групп по три числа так, чтобы в каждой группе одно из чисел равнялось сумме двух других?
2. Найдите все трехзначные числа, которые в одиннадцать раз больше суммы своих
цифр.
3. Доказать, что при любом натуральном $n>1$ справедливо неравенство:
$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2}.$$
4. На стороне BC прямоугольника $ABCD$ существует точка M такая, что $\angle AMB = \angle AMD$. Найдите эти углы, если $AD=2AB$.
5. В клетках таблицы 10×10 расставлены числа от 1 до 100 таким образом, что числа в каждой строке возрастают слева направо, а в каждом столбце – сверху вниз. Найдите наименьшую и наибольшую возможные суммы всех чисел пятого столбца таблицы.
6. На окружности радиуса 1 отмечено 100 точек. Доказать, что на этой окружности можно найти такую точку, сумма расстояний от которой до всех отмеченных точек будет больше 100.

Вариант 32

1. По периметру сада растет 20 кустов смородины. Число ягод на соседних кустах отличается на 1. Может ли на всех кустах вместе быть 33 ягоды?
2. Найдите все трехзначные числа, которые в двенадцать раз больше суммы своих цифр.
3. Сколькими нулями оканчивается число 2003! = $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot\ldots\cdot2002\cdot2003$?
4. BB_1 и CC_1 высоты остроугольного треугольника ABC, с углом A равным 30^0, B_2 и C_2 – середины сторон AC и AB соответственно. Докажите, что отрезки B_1C_2 и B_2C_1 перпендикулярны.

5. Можно ли в клетки таблицы 5×5 вписать числа таким образом, чтобы сумма чисел в каждом столбце была отрицательной, а сумма чисел в каждой строке – положительной.
6. В трапеции $ABCD$ диагонали пересекаются в точке E. Площадь треугольника ABE равна 72, Площадь треугольника CDE равна 50. Найдите площадь трапеции $ABCD$.

Вступительный экзамен.

1. Число $\overline{2003ab}$ делится на 12. Найдите все такие числа.
2. Средний возраст 11 игроков футбольной команды – 22 года. Во время матча один из игроков был удален. Средний возраст оставшихся игроков стал равен 21 году. Сколько лет удаленному игроку?
3. Диагональ трапеции перпендикулярна одной из боковых сторон и является биссектрисой одного из углов трапеции. Найдите отношение длин оснований трапеции.
4. Известно, что 2% положительного числа A больше, чем 3% положительного числа B. Что больше: 5% числа A или 7% числа B?
5. В шахматном турнире каждый шахматист сыграл с каждым по одному разу, и каждый шахматист все партии, кроме одной, завершил вничью. Сколько шахматистов участвовало в турнире, если всего было зафиксировано 264 ничьи?
6. Как разделить параллелограмм с помощью циркуля и линейки без делений на три части равной площади двумя прямыми, выходящими из одной вершины параллелограмма?

Варианты 2004 г.

Вариант 41

1. Перед началом стрельбы стрелок получил 4 патрона. После каждого попадания по мишени ему дополнительно выдавалось по 7 патронов. Стрельба закончилась, когда закончились патроны. Сколько раз стрелок попал по мишени, если всего он произвел 200 выстрелов?
2. Найдите наименьшее натуральное число, которое делится на все четные числа от 2 до 18.
3. Дан угол и внутри него точка. Проведите через данную точку прямую так, чтобы отрезок прямой внутри угла делился данной точкой в отношении 2:3.

4. В клетках таблицы 5×5 стоят ненулевые цифры. В каждой строке и в каждом столбце из всех стоящих там цифр произвольно составлено пятизначное число. Могло ли оказаться так, что из получившихся 10 чисел ровно одно не делится на 9?

5. Докажите, что ни при каком натуральном n число n^2+7n+9 не является квадратом никакого натурального числа.

6. В окружность вписан правильный треугольник KLM. На дуге KM взята произвольная точка A. Докажите, что $AL = AK + AM$.

Вариант 42

1. По дороге в школу Буратино зашел в лавку купить тетрадей. Если бы он купил 12 тетрадей, то у него осталось бы 20 золотых монет, а если бы купил 20 тетрадей, то ему не хватило бы 12 золотых монет. Сколько монет было у Буратино?

2. Разность двух натуральных чисел умножили на их произведение. Могло ли в результате получится число 45045?

3. В классе 36 учеников. Каждый мальчик в классе дружит ровно с четырьмя девочками, а каждая девочка – с пятью мальчиками. Сколько в классе мальчиков и сколько девочек?

4. Биссектрисы двух противоположных углов трапеции делят ее среднюю линию на три равные части. Найдите периметр трапеции, если ее средняя линия равна 6.

5. Докажите, что ни при каком натуральном n число n^2+5n+6 не является квадратом натурального числа.

6. Дан отрезок равный сумме стороны квадрата и его диагонали. С помощью циркуля и линейки без делений постройте этот квадрат.

Вариант 43

1. Произведение 22 целых чисел равно 1. Может ли сумма этих чисел равняться нулю.

2. На доске выписана последовательность из 2004 цифр. Любая пара соседних цифр в этой последовательности образует двузначное число, которое делится на 17 или 23. Известно, что последней цифрой является 7. Найдите первую цифру.

3. В корзине лежат 30 грибов. Среди любых 12 из них имеется хотя бы один рыжик, а среди любых 20 грибов – имеется хотя бы один груздь. Сколько рыжиков и сколько груздей в корзине.

4. В параллелограмме $ABCD$ на сторонах AB и BC взяты точки M и N так, что $AM:MB=2:3$, $BN:NC=4:5$. Определите, в каком отношении отрезок MN делит диагональ BD?

5. Определите, каких натуральных чисел от 1 до 100000 больше: тех, которые делятся на 6, но не делятся на 7, или тех, которые делятся на 7, но не делятся на 6.

6. На плоскости даны две параллельные прямые, точка и задан отрезок. С помощью циркуля и линейки проведите через данную точку прямую так, чтобы отрезок этой прямой, заключенный между параллельными прямыми, был равен заданному отрезку.

Вступительный экзамен.

1. На доске написано 11 целых чисел. Докажите, что из них можно стереть одно число так, что сумма оставшихся чисел будет четной.

2. Малыш и Карлсон считали деревья, обсаженные вокруг дома, идя в одном направлении, но начинали считать с разных деревьев. Дерево, которое у Малыша было 20-м, у Карлсона было 7-м, а 7-е у Малыша – 94-м у Карлсона. Сколько деревьев росло вокруг дома?

3. Трое играют в настольный теннис на вылет, т.е. игрок, проигравший партию, уступает место игроку, не участвовавшему в ней. В итоге оказалось, что первый игрок сыграл 10 партий, а второй – 21. Сколько партий сыграл третий игрок?

4. На плоскости даны две параллельные прямые и окружность между ними. С помощью циркуля и линейки без делений постройте окружность, которая касается данных параллельных прямых и данной окружности.

5. Два двузначных числа, записанные одно за другим, образуют четырехзначное число, которое в 3 раза больше их произведения. Найдите эти числа.

6. На сторонах AC и BC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $AM:MC=3:2$, а $BN:NC=1:2$. Отрезки AN и BM пересекаются в точке O. Определите, в каком отношении точка O делит каждый из отрезков AN и BM.

Варианты 2005 г.

Вариант 51

1. На все деньги, подаренные папой Карла, Буратино купил всем своим друзьям по букварю и ручке. Сколько друзей было у Буратино, если на те же деньги он мог купить либо 10 букварей, либо 15 ручек?
2. Какую цифру надо поставить вместо знака «?» в числе N = 66…6?55…5 (шестерка и пятерка выписаны по 25 раз), чтобы полученное число делилось на 7?
3. Решите неравенство $(x^2+x-6)\sqrt{9-x^2}\le 0$.
4. Найдите угол между часовой и минутной стрелками в 9 часов 16 минут.
5. Положительные числа a, b, с таковы, что $a\ge b\ge c$ и $a+b+c\le 1$. Докажите, что $a^2+3b^2+5c^2\le 1$.
6. Длина основания AC равнобедренного треугольника ABC равна $4\sqrt{2}$, а медиана AM равна 5. Найдите длины боковых сторон.

Вариант 52

1. Пройдя половину пути, автомобиль увеличил скорость на 25% и прибыл в пункт назначения на полчаса раньше. Сколько времени автомобиль находился в пути?
2. Может ли произведение цифр натурального числа равняться 528?
3. Найдите сумму целых частей $\left[\sqrt{1}\right]+\left[\sqrt{2}\right]+\left[\sqrt{3}\right]+...+\left[\sqrt{100}\right]$.
4. Решите неравенство $(x^2+5x+4)\sqrt{x^2-9}\le 0$.
5. Положительные числа a, b, с таковы, что $a\ge b\ge c$ и $a+b+c\le 1$. Докажите, что $a^2+b^2+7c^2\le 1$.
6. В треугольнике ABC срединный перпендикуляр к стороне AC пересекает сторону AB в точке D, а продолжение за точку B стороны BC в точке K. Докажите, что $BD< BK$.

Вариант 53

1. Пройдя половину пути, поезд уменьшил скорость движения на 20% и прибыл в конечный пункт назначения с опозданием на полчаса. Сколько времени поезд находился в пути?
2. Найдите наименьшее четырехзначное число, произведение цифр которого является четырехзначным числом.
3. Какую цифру надо поставить вместо знака «?» в числе 88…8?55…5 (восьмерка и пятерка выписаны по 25 раз), чтобы полученное число делилось на 7?
4. Решите неравенство $(x^2-9)\sqrt{x^2+5x+4}\le 0$.
5. Положительные числа a, b, c таковы, что $a\ge b\ge c$ и $a+b+c\le 2/3$. Докажите, что $a^2+3b^2+5c^2\le 1/2$.
6. В треугольнике ABC $AB=BC$. Определите, в каком отношении прямая, проходящая через вершину A и середину высоты BH, делит сторону BC?

Вступительный экзамен.
1. Пройдя треть пути, автомобилист вынужден был уменьшить скорость на 20%. Чтобы прибыть в конечный пункт вовремя, пройдя еще треть пути, он увеличил скорость в два раза. Определите, сумел ли автомобилист вовремя прибыть в конечный пункт.
2. Найдите угол между часовой и минутной стрелками в 16 часов 22 минуты.
3. В клетках таблицы 10×10 записаны натуральные числа от 1 до 100 так, что в каждой строке числа возрастают слева направо, а в каждом столбце – сверху вниз. Найдите наименьшую и наибольшую возможную сумму чисел диагонали, идущей слева направо и сверху вниз.
4. Решите неравенство $\dfrac{x}{x-2}\le\dfrac{x-1}{x+1}$.
5. Положительные числа a, b, c таковы, что $abc\le a+b+c\le 1$. Докажите, что $abc\le a^2+b^2+c^2$.
6. В прямоугольном треугольнике ABC высота BH делит гипотенузу AC на отрезки AH=3 и CH=4. Определите, в каком отношении прямая, проходящая через вершину A и середину высоты BH, делит сторону BC.

Варианты 2006 г.

Вариант 61

1. Решите уравнение: $|x-3|+|x-5|=2$.

2. В уравнении $x^2-4x+a=0$ сумма квадратов корней равна 16. Найдите a.

3. Сравните числа $\sqrt{28-10\sqrt{3}}+\sqrt{28+10\sqrt{3}}$ и 10.

4. Найдите все натуральные *n*, при которых число $\dfrac{3n-1}{n+1}$ является целым.

5. В прямоугольном треугольнике *ABC* медиана *CM*=12 см, а расстояние от середины катета *AC* до гипотенузы *AB* равно 3 см. Найдите площадь треугольника *ABC.*

6. На плоскости отмечены три точки: середины двух сторон треугольника и основание высоты проведенной к третьей стороне. С помощью циркуля и линейки по данным трем точкам восстановите треугольник.

Вариант 62

1. Решите уравнение: $|x-1|=1-|x-2|$.

2. Квадрат разности корней уравнения $x^2-3x+a=0$ равен 5. Найдите *a*.

3. Сравните числа $\sqrt{14+6\sqrt{5}}+\sqrt{14-6\sqrt{5}}$ и $\sqrt{35}$.

4. Найдите все натуральные *n*, при которых число $\dfrac{4n-3}{n+2}$ является целым.

5. В прямоугольном треугольнике *ABC* медиана *CM*=12 см, а расстояние от середины катета *BC* до гипотенузы *AB* равно 3 см. Найдите площадь треугольника *ABC.*

6. На плоскости отмечены три точки: середины двух сторон треугольника и центр описанной окружности вокруг того же треугольника. С помо-

щью циркуля и линейки по данным трем точкам восстановите треугольник.

Вступительный экзамен

1. Решите неравенство $|x-3|+|x+1|\le 4$.
2. Решите уравнение $\sqrt{2x-2}+\sqrt{x}=1$.
3. Какой цифрой оканчивается число $1!+2!+3!+\ldots+2006!$? (n! = $1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-1)\cdot n$).
4. Найдите сумму цифр всех трехзначных чисел от 100 до 999.
5. Точки K, L, M - середины медиан треугольника ABC. Найдите площадь треугольника KLM, если площадь треугольника ABC равна 16.
6. На плоскости даны три точки: середины двух высот, проведенных к двум сторонам треугольника, и середина третьей стороны треугольника. По данным трем точкам восстановите треугольник.

Варианты 2007 г.

Вариант 71

1. Решите уравнение $x=\sqrt{4-2x}$.
2. Первый пешеход идет из города A в город B 21 день, а второй из B в A – 28 дней. Через сколько дней они встретятся, если выйдут одновременно навстречу друг другу?
3. Числа $a,\ b,\ c$ и d таковы, что $a+c<b+d,\ b+c=a+d,\ b<d$. Найдите наибольшее из них.
4. В треугольнике ABC на луче $[AC)$ взята точка D так, что $AD=2\,AC$. Определите, в каком отношении прямая, проходящая через точку D и середину стороны AB, делит медиану BM.
5. О некотором числе высказаны следующие утверждения: а) “Это число простое”; б) “Это число 9”; в) “Это число четное”; г) “Это число 15”. Найдите это число, если два утверждения истинны, а два ложны.

6. С помощью циркуля и линейки без делений постройте треугольник по двум углам и высоте, проведенной из вершины третьего угла.

Вариант 72

1. Решите уравнение $x-1=\sqrt{5-4x}$.

2. Первый пешеход проходит путь из пункта A в пункт B за 45 мин, а второй пешеход – за 36 мин. Через сколько минут они встретятся, если выйдут одновременно навстречу друг другу?

3. Числа k, l, m и n таковы, что $n+l>m+k, \ m+l=n+k, \ m>k$. Найдите наименьшее из них.

4. В треугольнике ABC на луче $[AB)$ взята точка L так, что $AL=3AB$. Определите, в каком отношении прямая, проходящая через точку L и середину стороны AC, делит медиану CK.

5. О некотором числе высказаны следующие утверждения: а) “Это число простое”; б) “Это число кратно 6”; в) “Это число меньше 3”; г) “Это число 35”. Найдите это число, если два утверждения истинны, а два ложны.

6. С помощью циркуля и линейки без делений постройте треугольник по двум углам и высоте, проведенной из вершины одного из данных углов.

Вариант 73

1. Решите уравнение $x=\sqrt{6-x}$.

2. Найдите все натуральные числа, при делении которых на 8 частное равно остатку.

3. Числа k, l, m и n таковы, что $n+l>m+k, \ m+l=n+k, \ m>k$. Найдите наименьшее из них.

4. В треугольнике ABC на луче $[AB)$ взята точка L так, что $AL=2AB$. Определите, в каком отношении прямая, проходящая через точку L и середину стороны AC, делит медиану CK.

5. О некотором числе высказаны следующие утверждения: а) “Это число простое”; б) “Это число кратно 6”; в) “Это число меньше 3”; г) “Это чис-

ло 2007”. Найдите это число, если два утверждения истинны, а два ложны.

6. На плоскости даны прямая l и две точки A и B, расположенные по разные стороны от прямой. Найдите на прямой l все такие точки C, чтобы угол ACB был тупым.

Вариант 74

1. Решите уравнение $x = \sqrt{2x+3}$.
2. Найдите все числа, при делении которых на 9 в частном получается число, на 1 большее остатка.
3. Числа $a,\ b,\ c$ и d таковы, что $a+c<b+d,\ b+c=a+d,\ b<d$. Найдите наибольшее из них.
4. В треугольнике ABC на стороне AC взята точка D так, что $AD = 2\,DC$. Определите, в каком отношении прямая, проходящая через точку D и середину стороны AB, делит медиану BM.
5. О некотором числе высказаны следующие утверждения: а) “Это число простое”; б) “Это число 2007”; в) “Это число четное”; г) “Это число 105”. Найдите это число, если два утверждения истинны, а два ложны.
6. На плоскости даны прямая l и две точки A и B, расположенные по разные стороны от прямой. Найдите на прямой l все такие точки C, чтобы угол ACB был острым.

Вступительный экзамен.

Вариант 1

1. Решите уравнение $\dfrac{x^2+x-2}{\sqrt{x^2-x}}=0$.
2. Найдите сумму всех четных натуральных чисел, не превосходящих 1000 и не кратных 5.
3. Найдите наибольшее значение функции $y=\dfrac{1}{x^2+4x+5}$.
4. В равностороннем треугольнике ABC, на сторонах $AB,\ BC$ и AC взяты точки $K,\ L$ и M так, что

$AK:KB=BL:LC=CM:MA=2:1$. Найдите площадь треугольника KLM, если $AB=6$.

5. Положительные числа $x,\ y$ и z (не обязательно целые) удовлетворяют равенствам
$2x-y=16$ и $x+y+z=20$. Что больше: x или y?

6. Квадрат 4×4 разделен горизонтальными и вертикальными линиями на 16 равных квадратов со стороной 1. Как с помощью одной линейки без делений разделить диагональ этого квадрата на три равные части?

Вариант 2

1. Решите уравнение $\dfrac{x^2+2x-3}{\sqrt{x^2-x}}=0$.

2. Найдите сумму всех нечетных натуральных чисел, не превосходящих 1000 и не кратных 5.

3. Найдите наибольшее значение функции $y=\dfrac{2}{x^2+2x+3}$.

4. В равностороннем треугольнике ABC, на сторонах $AB,\ BC$ и AC взяты точки $D,\ E$ и F так, что $AD:DB=BE:EC=CF:FA=3:1$. Найдите площадь треугольника DEF, если $AB=4$.

5. Положительные числа $x,\ y$ и z (не обязательно целые) удовлетворяют равенствам $2y-x=12$ и $x+y+z=15$. Что больше: x или y?

6. Квадрат 5×5 разделен горизонтальными и вертикальными линиями на 25 равных квадратов со стороной 1. Как с помощью одной линейки без делений разделить диагональ этого квадрата на четыре равные части?

Варианты 2008 г.

Вариант 81

1. Вычислите $(1-3+5-7+\ldots+397-399)+2208$.
2. Турист отправился из деревни на железнодорожную станцию. Пройдя за первый час 3 км, он сообразил, что опоздает к поезду на 40 мин. Поэтому остальную часть пути он проходил со скоростью 4 км/ч и пришел на станцию за 45 мин до отправления поезда. Каково расстояние от деревни до станции?
3. При каких значениях коэффициента q отношение корней уравнения $x^2+qx+1=0$ равно 4?
4. Про числа a и b известно, что $a=b+1$. Может ли оказаться так, что $a^4=b^4$?
5. В прямоугольном треугольнике ABC, с прямым углом при вершине C, точка D - середина стороны AC. Прямая, проходящая через вершину A и середину отрезка BD, пересекает сторону BC в точке N. Найдите длину отрезка CN, если $BC=7$.
6. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC биссектрисы AN и BM пересекаются в точке O. Определите, какой из отрезков AO или $2\cdot MO$ больше, если известно, что $AB>AC$.

Вариант 82

1. Вычислите $(2-4+6-8+\ldots+398-400)+2208$.
2. По плану, за рабочую смену землекопу нужно выкопать траншею. Пройдя за первый час 5 м, он понял, что ему не хватит 30 минут, чтобы выполнить план к концу смены. Поэтому, оставшуюся часть траншеи он проходил по 6 м в час, и закончил работу за полчаса до окончания смены. Какова длина траншеи?
3. При каких значениях коэффициента p отношение корней уравнения $x^2+2px+1=0$ равно 9?
4. Про числа a и b известно, что $a=b-1$. Может ли оказаться так, что $a^4=b^4$?
5. В прямоугольном треугольнике ABC, с прямым углом при вершине C, точка M - середина стороны BC. Прямая, проходящая через

вершину B и середину отрезка AM, пересекает сторону AC в точке D. Найдите длину отрезка CD, если $AC = 5$.

6. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC биссектрисы AN и BM пересекаются в точке O. Определите, какой из отрезков AO или $2 \cdot MO$ больше, если известно, что $AB < AC$.

Вступительный экзамен.

1. Новогодняя гирлянда состоит из красных и синих лампочек. Рядом с каждой красной лампочкой обязательно есть синяя. Какое наибольшее количество красных лампочек может быть в этой гирлянде, если всего в ней 50 лампочек?
2. Из пункта A в пункт B вышел пешеход и одновременно с ним из пункта B в пункт A выехал велосипедист со скоростью в два раза большей скорости пешехода. Определите, через какое время после их встречи пешеход прибудет в пункт B, если известно, что велосипедист после встречи прибыл в пункт A через 2 часа.
3. При каких значениях коэффициента c один из корней уравнения $x^2 - 3x + c = 0$ на 5 больше другого?
4. Найдите все трехзначные натуральные числа, которые делятся на 4, 7, 9 и не делятся на 8.
5. O - точка пересечения биссектрис прямоугольного треугольника ABC с прямым углом при вершине C. Найдите длину отрезка AO, если $AC = 5,\ BC = 12$.
6. На сторонах $AB,\ BC$ и AC треугольника ABC взяты, соответственно, точки K, L и M так, что $AK : KB = BL : LC = CM : MA = 1 : 2$. Найдите площадь треугольника KLM, если известно, что площадь треугольника ABC равна 15.

Варианты 2009 г.

Вариант 91

1. Решить уравнение $\sqrt{x^3 - 3x^2} = \sqrt{x^2 - 3x}$.

2. Если некоторое двузначное число умножить на сумму его цифр, то получится 405. Если число, написанное теми же цифрами в обратном порядке, умножить на сумму его цифр, то получится 486. Найдите это число.
3. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты соответственно точки M и N так, что $AM:MB = BN:NC = 1:2$. Точка K - середина отрезка MN. Определите, в каком отношении прямая BK делит сторону AC?
4. В коробке лежат цветные карандаши: 12 красных, 10 синих, 8 зеленых и 6 черных. Какое наименьшее число карандашей надо взять в темноте, чтобы среди них заведомо было не менее 7 карандашей одного цвета?
5. Найдите все натуральные *n*, такие, что $\sqrt{n^2 - 39}$ - также натуральное число.

Вариант 92

1. Решить уравнение $\sqrt{x^3 - 4x^2} = \sqrt{x^2 - 4x}$.
2. Если некоторое двузначное число умножить на сумму его цифр, то получится 486. Если число, написанное теми же цифрами в обратном порядке, умножить на сумму его цифр, то получится 405. Найдите это число.
3. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты соответственно точки M и N так, что $AM:MB = BN:NC = 1:3$. Точка K - середина отрезка MN. Определите, в каком отношении прямая BK делит сторону AC?
4. В коробке лежат цветные карандаши: 13 красных, 11 синих, 9 зеленых и 7 черных. Какое наименьшее число карандашей надо взять в темноте, чтобы среди них заведомо было не менее 8 карандашей одного цвета?
5. Найдите все натуральные *n*, такие, что $\sqrt{n^2 + 39}$ - также натуральное число.

Вступительный экзамен

1. Решить неравенство $1+\frac{2}{x} \le x$.
2. Если двузначное число умножить на его первую цифру (цифру десятков), то получится 384, а если умножить на вторую цифру, то получится 256. Найдите все такие двузначные числа.
3. В треугольнике ABC на сторонах BC и AC взяты соответственно точки F и E так, что $BF=3,\ FC=2,\ AE=9,\ EC=5$. Определите, в каком отношении прямая BE делит отрезок AF?
4. Учащиеся класса решали две задачи. После урока учитель составил четыре списка: а) решивших обе задачи; б) решивших по меньшей мере одну задачу; в) решивших только одну задачу; г) решивших первую, самую легкую задачу. Какой из списков самый длинный?
5. Найдите наименьшее значение выражения $a \cdot b$, если $a-b=1$.

Варианты 2010 г.

Вариант 101

1. При каких значениях параметра a число $\frac{3}{2}$ является корнем уравнения $2x^2-x+a^2-6a+2=0$.
2. В равнобедренном треугольнике ABC длина основания AC равна 4, а длина медианы, проведенной к боковой стороне BC, рана 5. Найти длины боковых сторон треугольника ABC.
3. Доказать, что если число $3a-2b+8c$ делится нацело на 7, то и число $4a+9b-c$ тоже делится на 7.
4. Решить неравенство $x > x^3$.
5. Сколько существует натуральных чисел, не превосходящих 1000, которые не делятся ни на 2, ни на 3?

Вариант 102

1. При каких значениях параметра a число $\frac{3}{2}$ является корнем уравнения $2x^2+x+a^2-6a+2=0$.

2. В равнобедренном треугольнике ABC длина медианы BM равна 8, а длина медианы, проведенной к боковой стороне BC, рана 5. Найти длины боковых сторон треугольника ABC.
3. Доказать, что если число $3a - 2b + 8c$ делятся нацело на 5, то и число $2a + 7b - 3c$ тоже делится на 5.
4. Решить неравенство $x < x^3$.
5. Сколько существует натуральных чисел, не превосходящих 1000, которые не делятся ни на 3, ни на 5?

Вариант 103

1. Найти все значения параметра a, при которых график параболы $y = 2x^2 - x + a^2 - 7a$ пересекает ось x в точке -2.
2. В равнобедренном треугольнике ABC длины боковых сторон AB и BC равны $2\sqrt{17}$, а длина медианы, проведенной к боковой стороне BC, рана 5. Найти длину основания AC.
3. Докажите, что если числа $x + 2y$ и $2x + 3y$ делятся нацело на 7, то и сами числа x и y делятся на 7.
4. Решить неравенство $x < \frac{1}{x}$.
5. Сколько существует натуральных чисел, не превосходящих 1000, которые не делятся ни на 4, ни на 6?

Вариант 104

1. Найти все значения параметра a, при которых график параболы $y = 2x^2 - x + a^2 - 7a$ пересекает ось x в точке 2.
2. В равнобедренном треугольнике ABC длины боковых сторон AB и BC равны $2\sqrt{17}$, а длина основания AC равна 4. Найти длину медианы, проведенной к боковой стороне BC.
3. Докажите, что если числа $2x + y$ и $3x + 2y$ делятся нацело на 11, то и сами числа x и y делятся на 11.
4. Решить неравенство $x > \frac{1}{x}$.
5. Сколько существует натуральных чисел, не превосходящих 1000, которые не делятся ни на 4, ни на 10?

Вступительный экзамен

1. При каких значениях параметра a число $\frac{3}{2}$ является корнем уравнения

   $x + a^2 + a - \frac{5}{2}\ | = 3.$

2. Найти наибольшее значение произведения $x \cdot y$, если известно, что $x + y = 3$.
3. Сколько имеется различных натуральных чисел, у которых самый большой делитель, не считая самого числа, равен 91?
4. Даны точки А и В. Найти ГМТ C таких, что треугольник ABC – остроугольный.
5. В ящике лежат 111 шариков красного, синего, зеленого и белого цвета. Если наугад вытащить 100 шариков, то среди них обязательно найдутся 4 шарика различных цветов. Какое наименьшее число шариков нужно вытащить, не заглядывая в ящик, чтобы среди них наверняка нашлись 3 шарика различных цветов?

Варианты 2011 г.

Вариант 111

1. Решить уравнение $\frac{3}{x-1} - \frac{2}{x-2} = \frac{x-4}{5-x}$.
2. В отделе канцтоваров набор из 6 карандашей стоит 7 рублей, а набор из 12 карандашей – 12 рублей. Сколько карандашей можно купить ровно на 150 рублей? (Указать все варианты)
3. Произведение натурального числа и числа, записанного теми же цифрами в обратном порядке, равно 2430. Найти все такие числа.
4. Точка M расположена на стороне AB квадрата $ABCD$ и делит ее в отношении $AM : MB = 2 : 3$. Через точку M проведены две прямые так, что они разделили квадрат на три равновеликие (равные по площади) фигуры. Найти в каком отношении эти прямые делят сторону CD.

4. Найдите наибольшее значение параметра a, при котором неравенство $\frac{9}{x}+\frac{x}{9} \geq a$ выполняется при всех положительных x.

Вариант 112

1. Решить уравнение $\frac{3}{x+1}-\frac{2}{x+2}=\frac{x+4}{x+5}$.
2. В отделе канцтоваров набор из 5 карандашей стоит 6 рублей, а набор из 10 карандашей – 11 рублей. Сколько карандашей можно купить ровно на 150 рублей? (Указать все варианты)
3. Произведение натурального числа и числа, записанного теми же цифрами в обратном порядке, равно 3640. Найти все такие числа.
4. Точка *M* расположена на стороне *AB* квадрата *ABCD* и делит ее в отношении $AM : MB = 3 : 4$. Через точку *M* проведены две прямые так, что они разделили квадрат на три равновеликие (равные по площади) фигуры. Найти в каком отношении эти прямые делят сторону *CD*.
5. Найдите наибольшее значение параметра a, при котором неравенство $\frac{4}{x}+\frac{x}{4} \geq a$ выполняется при всех положительных x.

Вариант 113

1. Решить уравнение $\frac{3}{x-1}-\frac{2}{x-2}=\frac{2}{x+2}-\frac{1}{x-1}$.
2. Сумма числителя и знаменателя дроби равна 361. После ее сокращения получилась дробь $\frac{6}{13}$. Найти исходную дробь.
3. Найти все двухзначные числа, которые в три раза больше произведения своих цифр.
4. Точка *M* расположена на стороне *AB* треугольника *ABC* и делит ее в отношении $AM : MB = 2:1$. С помощью циркуля и линейки через точку *M* провести две прямые так, чтобы они разделили треугольник на три равновеликие (равные по площади) фигуры.
5. Найдите все значения параметра b, при которых неравенство $3x+\frac{1}{3x} \geq b$ выполняется при всех положительных x.

Вариант 114

1. Решить уравнение $\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{2}{x+2}=\dfrac{2}{x-2}-\dfrac{1}{x+1}$.
2. Сумма числителя и знаменателя дроби равна 361. После ее сокращения получилась дробь $\dfrac{7}{12}$. Найти исходную дробь.
3. Найти все двухзначные числа, которые в два раза больше произведения своих цифр.
4. Точка *M* расположена на стороне *AC* треугольника *ABC* и делит ее в отношении $AM:MC=1:2$. С помощью циркуля и линейки через точку *M* провести две прямые так, чтобы они разделили треугольник на три равновеликие (равные по площади) фигуры.
5. Найдите все значения параметра *b*, при которых неравенство $4x+\dfrac{1}{4x}\geq b$ выполняется при всех положительных *x*.

Варианты 2012 г.

Вариант 121

1. Найдите сумму цифр всех натуральных чисел от 600 до 699 включительно.
2. Решить уравнение $\frac{2}{x}=\sqrt{x^2+3}$.
3. При сложении двух целых чисел ученик случайно приписал в конце лишний ноль одному из слагаемых и получил в результате 6641 вместо 2411. Определите, какие числа складывал ученик.
4. В прямоугольном треугольнике *ABC*, с прямым углом при вершине *C*, *AC* : *BC* = 1 : 3. На стороне *BC*, во вне треугольника, построен квадрат *BDEC*. Точка *M* – середина отрезка *AB*, точка *N* – середина отрезка *BD*. Определите, в каком отношение прямая *MN* делит сторону *BC*.
5. Найдите все натуральные значения *n*, при которых число $\frac{3n+7}{n-1}$ является целым.

Вариант 122

1. Найдите сумму цифр всех натуральных чисел от 700 до 799 включительно.
2. Решить уравнение $\frac{3}{x} = \sqrt{x^2 + 8}$.
3. При сложении двух целых чисел ученик случайно приписал в конце лишний ноль одному из слагаемых и получил в результате 6551 вместо 2411. Определите, какие числа складывал ученик.
4. В прямоугольном треугольнике *ABC*, с прямым углом при вершине *C*, *AC* : *BC* = 1 : 3. На стороне *BC*, во вне треугольника, построен квадрат *BDEC*. Точка *M* – середина отрезка *AB*, точка *N* – середина отрезка *CE*. Определите, в каком отношение прямая *MN* делит сторону *BC*.
5. Найдите все натуральные значения *n*, при которых число $\frac{4n+2}{n-1}$ является целым.

Вариант 123

1. Решить уравнение $x^2 - 3 = \sqrt{3x^2 + 9}$.
2. Для покупки альбома Володе не хватило 5 рублей, Игорю – 33 рубля, а Руслану – 35 рублей. Тогда они сложили свои деньги, но их все равно не хватило на покупку одного альбома. Сколько стоил альбом, если его стоимость – целое число рублей? (Указать все варианты).
3. На кольцевом маршруте работало 7 автобусов, их интервал движения (время между автобусами) составлял 24 минуты. Каким будет интервал движения, если на этом маршруте будут работать 8 автобусов?
4. На гипотенузе *AB* прямоугольного равнобедренного треугольника *ABC*, во вне треугольника построен квадрат *AMNB*. Определите, в каком отношении прямая *CM* делит гипотенузу *AB*.
5. Известно, что *a, b, c* – три различные, ненулевые цифры. Если сложить все шесть трехзначных чисел, которые можно записать с их помощью, не повторяя одну и ту же цифру дважды, то получим 1554. Найдите эти цифры.

Вариант 124

1. Решить уравнение $x^2 - 2 = \sqrt{5x^2 + 4}$.
2. Для покупки альбома Володе не хватило 5 рублей, Игорю – 28 рублей, а Руслану – 30 рублей. Тогда они сложили свои деньги, но их все равно не хватило на покупку одного альбома. Сколько стоил альбом, если его стоимость – целое число рублей? (Указать все варианты).
3. На кольцевом маршруте работало 7 автобусов, их интервал движения (время между автобусами) составлял 24 минуты. Каким будет интервал движения, если на этом маршруте будут работать 6 автобусов?

4. На гипотенузе *AB* прямоугольного равнобедренного треугольника *ABC*, во вне треугольника построен квадрат *AMNB*. Определите, в каком отношении прямая *CN* делит гипотенузу *AB*.
5. Известно, что *a, b, c* – три различные, ненулевые цифры. Если сложить все шесть трехзначных чисел, которые можно записать с их помощью, не повторяя одну и ту же цифру дважды, то получим 1776. Найдите эти цифры.

Варианты 2013 г.

Вариант 131

1. Ира собрала 15 грибов и еще 50% от количества грибов, собранных Сашей. Саша собрал 12 грибов и еще 50% от количества грибов собранных Ирой. Сколько грибов собрал каждый из них.
2. Корни x_1 и x_2 уравнения $x^2 + px + 12 = 0$ таковы, что $x_1 - x_2 = 1$. Найдите все значения параметра *p*.
3. В треугольник *ABC* с боковыми сторонами *AB* = 15 и *BC* = 18 вписан параллелограмм *KLMN* так, что точка *K* лежит на стороне *AB*, точка *L* – на стороне *BC*, а сторона *MN* лежит на стороне *AC*. Найдите длины диагоналей *KM* и *LN*, если известно, что они параллельны сторонам *BC* и *AB* соответственно.
4. Решить неравенство $\frac{3}{x-2} < 1$.
5. Написаны 2013 чисел. Сумма квадратов любых 11 чисел равна 11, а сумма любых 13 из них не положительна. Найдите эти числа, если их сумма является целым числом, которое делится на 9.

Вариант 132

1. Ира собрала 18 грибов и еще 50% от количества грибов, собранных Сашей. Саша собрал 15 грибов и еще 50% от количества грибов собранных Ирой. Сколько грибов собрал каждый из них.
2. Корни x_1 и x_2 уравнения $x^2 + kx + 6 = 0$ таковы, что $x_1 - x_2 = 1$. Найдите все значения параметра *k*.
3. В треугольник *KLM* с боковыми сторонами *KL* = 12 и *LM* = 9 вписан параллелограмм *ABCD* так, что точка *A* лежит на стороне *KL*, точка *B* – на стороне *LM*, а сторона *CD* лежит на стороне *KM*. Найдите длины диагоналей *AC* и *BD*, если известно, что они параллельны сторонам *LM* и *KL* соответственно.
4. Решить неравенство $\frac{1}{x-1} < 2$.
5. Написаны 2013 чисел. Сумма квадратов любых 13 чисел равна 13, а сумма любых 11 из них не положительна. Найдите эти числа, если их сумма является целым числом, которое делится на 9.

Вариант 133

1. Если к количеству грибов, собранных Ирой, прибавить 50% от количества грибов, собранных Сашей, то получится 41. Если к количеству грибов, собранных Сашей, прибавить 50% от количества грибов, собранных Ирой, то получится 40. Сколько грибов собрал каждый из них?
2. Корни x_1 и x_2 уравнения $x^2 + px + 12 = 0$ таковы, что $3x_1 = 4x_2$. Найдите все значения параметра *p*.
3. В треугольник *ABC* с боковыми сторонами *AB* = 18 и *BC* = 15 вписан параллелограмм *KLMN* так, что точка *K* лежит на стороне *AB*, точка *L* – на стороне *BC*, а сторона *MN* лежит на стороне *AC*. Найдите длины диагоналей *KM* и *LN*, если известно, что они параллельны сторонам *BC* и *AB* соответственно.
4. Решить неравенство $\frac{3x}{x-2} < 1$.
5. Написаны 2013 чисел. Сумма квадратов любых 11 чисел равна 11, а сумма любых 13 из них не положительна. Найдите эти числа, если их сумма является целым числом, которое делится на 7.

Вариант 134

1. Если к количеству грибов, собранных Ирой, прибавить 50% от количества грибов, собранных Сашей, то получится 50. Если к количеству грибов, собранных Сашей, прибавить 50% от количества грибов, собранных Ирой, то получится 49. Сколько грибов собрал каждый из них?
2. Корни x_1 и x_2 уравнения $x^2+kx+6=0$ таковы, что $2x_1=3x_2$. Найдите все значения параметра k.
3. В треугольник KLM с боковыми сторонами KL = 9 и LM = 12 вписан параллелограмм $ABCD$ так, что точка A лежит на стороне KL, точка B – на стороне LM, а сторона CD лежит на стороне KM. Найдите длины диагоналей AC и BD, если известно, что они параллельны сторонам LM и KL соответственно.
4. Решить неравенство $\frac{3x}{x-1}<2$.
5. Написаны 2013 чисел. Сумма квадратов любых 13 чисел равна 13, а сумма любых 11 из них не положительна. Найдите эти числа, если их сумма является целым числом, которое делится на 7.

Вариант 135

1. Из пунктов A и B на встречу друг другу одновременно вышли Ира и Саша. Через 25 мин Ире оставалось пройти до середины пути от A до B половину расстояния, пройденного Сашей, а Саше до середины пути от A до B – половину расстояния, пройденного Ирой. Определите, через какое время после начала движения они встретились.
2. Найти все значения параметра k, при которых оба корня уравнения $x^2+4x+k=0$ имеют один и тот же знак.
3. На сторонах KL, LM и MN параллелограмма $KLMN$ взяты точки A, B и C соответственно. Известно, что $AB \parallel KM$, а $BC \parallel LN$. Определите, в каком отношении отрезок AC делит диагональ KM.
4. Решить неравенство $\frac{2}{x}<\frac{x}{2}$.
5. В корзине лежат шары семи цветов. Красных и оранжевых – 28, оранжевых и желтых – 37, желтых и зеленых – 25, зеленых и голубых – 31, голубых и синих – 39, синих и фиолетовых – 26, фиолетовых и красных – 22. Сколько всего шаров в корзине?

Вариант 136

1. Из пунктов A и B на встречу друг другу одновременно вышли Ира и Саша. Через 35 мин Ире оставалось пройти до середины пути от A до B половину расстояния, пройденного Сашей, а Саше до середины пути от A до B – половину расстояния, пройденного Ирой. Определите, через какое время после начала движения они встретились.
2. Найти все значения параметра k, при которых оба корня уравнения $x^2 - 4x + k = 0$ имеют один и тот же знак.
3. На сторонах AB, BC и CD параллелограмма $ABCD$ взяты точки K, L и M соответственно. Известно, что $KL \parallel AC$, а $LM \parallel BD$. Определите, в каком отношении отрезок KM делит диагональ BD.
4. Решить неравенство $\frac{1}{x} < \frac{x}{4}$.
5. В корзине лежат шары семи цветов. Красных и оранжевых – 40, оранжевых и желтых – 43, желтых и зеленых – 47, зеленых и голубых – 52, голубых и синих – 44, синих и фиолетовых – 37, фиолетовых и красных – 39. Сколько всего шаров в корзине?

Варианты 2014 г.

Вариант 141.

1. Вычислить $3\left(\frac{2}{\sqrt{10}+5} + \frac{5}{\sqrt{10}-2} - \frac{7}{\sqrt{10}}\right)$.
2. График квадратичной функции f проходит через точки (-7; 4), (-3; 1), (5; 1). Чему равно $f(9)$?
3. В треугольнике ABC со сторонами $AB = 7$ и $AC = 5$ проведена высота AD. Найдите площадь треугольника ABC, если известно, что одно из расстояний от точки D до концов стороны BC вдвое больше другого.
4. Решить неравенство $|5 - 2x| < 1$.
5. Через сколько минут после того, как часы показывали ровно 9 часов 00 минут, минутная стрелка догонит часовую стрелку?

Вариант 142.

1. Вычислить $\frac{1}{7} \cdot \left(\frac{3}{\sqrt{12}+4} + \frac{4}{\sqrt{12}-3} - \frac{7}{\sqrt{12}}\right)$.

2. График квадратичной функции f проходит через точки (-6; 5), (-3; 2), (7; 2). Чему равно $f(10)$?
3. В треугольнике KLM со сторонами $KL = 9$ и $KM = 7$ проведена высота KN. Найдите площадь треугольника KLM, если известно, что одно из расстояний от точки N до концов стороны LM втрое больше другого.
4. Решить неравенство $|7 - 2x| < 1$.
5. Через сколько минут после того, как часы показывали ровно 16 часов 00 минут, минутная стрелка догонит часовую стрелку?

Вариант 143.

1. Упростить выражение $\frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-c)(b-a)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)}$.
2. Произведение двух отрицательных чисел, отличающихся на 2, равно 16. Чему равна сумма этих чисел?
3. Прямая, проходящая через вершину B параллелограмма $ABCD$, пересекает сторону AD и делит его площадь в отношении 3 : 8. В каком отношении эта прямая делит сторону AD.
4. Решить неравенство $|x - 2| > x - 1$.
5. Определить величину угла между часовой и минутной стрелками в 15 часов 40 минут.

Вариант 144.

1. Упростить выражение $\frac{1}{(b-a)(c-a)} + \frac{1}{(c-b)(a-b)} + \frac{1}{(a-c)(b-c)}$.
2. Произведение двух отрицательных чисел, отличающихся на 2, равно 12. Чему равна сумма этих чисел?
3. Прямая, проходящая через вершину D параллелограмма $ABCD$, пересекает сторону BC и делит его площадь в отношении 7 : 4. В каком отношении эта прямая делит сторону BC.
4. Решить неравенство $|x - 3| > x - 2$.
5. Определить величину угла между часовой и минутной стрелками в 12 часов 40 минут.

Вариант 145.

1. Упростить выражение $\left(\frac{6}{y^2-9}+\frac{1}{3-y}\right)\cdot\frac{y^2+6y+9}{5}$.
2. Найдите все значения параметра *k*, при которых график функции $y = x^2 + kx + 196$ имеет с осью *Ox* ровно одну общую точку.
3. В равнобокой трапеции *ABCD* биссектриса угла *C* параллельна боковой стороне *AB*. Найти площадь трапеции *ABCD*, если *AD* = 10, *BC* = 6.
4. Решить неравенство $\frac{1}{x-1} \le 2$.
5. Найдите такие числа *a* и *b*, что $a + b = a \cdot b = \frac{a}{b}$.

Вариант 146.

1. Упростить выражение $\left(\frac{4}{x^2-4}+\frac{1}{2-x}\right)\cdot\frac{x^2+4x+4}{5}$.
2. Найдите все значения параметра *a*, при которых график функции $y = x^2 + ax + 169$ имеет с осью *Ox* ровно одну общую точку.
3. В равнобокой трапеции *ABCD* биссектриса угла *B* параллельна боковой стороне *CD*. Найти площадь трапеции *ABCD*, если *AD* = 12, *BC* = 8.
4. Решить неравенство $\frac{3}{x-2} \le 2$.
5. Найдите такие числа *m* и *n*, что $m + n = m \cdot n = \frac{n}{m}$.

Вариант 147.

1. Вычислить $\frac{4^6\cdot 9^5+6^9\cdot 120}{8^4\cdot 3^{12}-6^{11}}$.
2. При каких значениях параметра *a* прямая $y = 2x - 3$ пересекает параболу $y = x^2 + ax + 1$ ровно в одной точке.
3. В треугольнике *ABC* через середину стороны *AB* проведена прямая, пересекающая сторону *AC*. Определите, в каком отношении эта прямая делит сторону *AC*, если известно, что она делит площадь треугольника *ABC* в отношении 5 : 3.
4. Решите неравенство $\frac{1}{x} < \frac{1}{x+1}$.

5. Числа a, b, c и d таковы, что $a < b < c < d$. Определите, какое из чисел больше: $ab + cd$ или $ac + bd$?

Вариант 148.

1. Вычислить $\frac{6^{10} \cdot 20 - 9^5 \cdot 4^6}{8^4 \cdot 3^{12} + 2 \cdot 6^{11}}$.
2. При каких значениях параметра a прямая $y = 3x - 2$ пересекает параболу $y = x^2 - ax + 2$ ровно в одной точке.
3. В треугольнике ABC через середину стороны BC проведена прямая, пересекающая сторону AC. Определите, в каком отношении эта прямая делит сторону AC, если известно, что она делит площадь треугольника ABC в отношении 5 : 3.
4. Решите неравенство $\frac{1}{x} > \frac{1}{x-1}$.
5. Числа a, b, c и d таковы, что $a < b < c < d$. Определите, какое из чисел больше: $ad + bc$ или $ac + bd$?

Ответы и решения.

Варианты 2003 г.

Вариант 31.

1. Ответ: нельзя.

   Если сумма двух натуральных чисел равна третьему, то сумма этих трех чисел – четна. Поэтому, если бы указанное разбиение существовало бы, то сумма всех 30 чисел равнялась бы сумме десяти четных чисел и была бы четной. Но сумма чисел $1+2+3+...+30 = 31 \cdot 15 = 465$ - нечетна.
2. Ответ: 198.

   Пусть $\overline{abc}$ - искомое трехзначное число, где a, b, c - цифры, причем $a \neq 0$. Имеем $\overline{abc} = 11(a+b+c)$, или $100a + 10b + c = 11a + 11b + 11c$. Откуда, $89a = b + 10c$. Так как

$89a = b + 10c \le 9 + 10 \cdot 9 = 99$ и $a \ne 0$, то $a = 1$. Следовательно $10c + b = 89$, или $10c = 89 - b$. Поскольку $0 \le b \le 9$, то $80 \le 89 - b \le 89$, откуда $c = 8$, а $b = 9$.

3. Для любого натурального n в левой части неравенства содержится ровно n слагаемых и каждое из них не превосходит последнего – наименьшего. Таким образом

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} = n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

4. Ответ: 75^0.

Пусть $AB = a,\ AD = 2a$, и $\angle AMB = \angle AMD = \alpha$. Опустим из вершины A высоту AH на прямую MD. Прямоугольные треугольники ABM и AMH равны по гипотенузе и острому углу. Следовательно $AH = AB = a$. В прямоугольном треугольнике ADH гипотенуза $AD = 2a = 2AH$, т. е. в два раза длиннее одного из катетов, а это означает, что $\angle ADH = 30^0$. Так как $\angle ADH = \angle DMC$, то $2\alpha + 30^0 = 180^0$. Откуда $\alpha = 75^0$.

5. Ответ: 275; 680.

Через $a_{i,j}$ будем обозначать число, стоящее на пересечении i- й строки и j-го столбца. Из условия задачи следует, что $a_{1,1} = 1$, $a_{10,10} = 100$ и $i \cdot j \le a_{i,j} \le 101 - (11 - i) \cdot (11 - j)$, так как левее и выше должны стоять меньшие числа, а правее и ниже – большие. Таким образом, $a_{1,5} \ge 5$, $a_{2,5} \ge 10$, . . ., $a_{10,5} \ge 50$. Следовательно, сумма чисел пятого столбца $a_{1,5} + a_{2,5} + ... + a_{10,5} \ge 5 + 10 + ... + 50 = 275$.

Расставляя первые 50 чисел по порядку в первых пяти столбцах, а оставшиеся числа – в оставшихся пяти столбцах, получим расстановку с суммой 275 в пятом столбце. Для наибольшей возможной суммы имеем

$$a_{1,5} + a_{2,5} + ... +_{10,5} \le (101 - 10 \cdot 6) + (101 - 9 \cdot 6) + ... + (101 - 1 \cdot 6) = 680.$$

Соответствующая расстановка чисел получается при расстановке первых 40 чисел в первых четырех столбцах, а оставшиеся 60 чисел – в последних шести столбцах.

6. Пусть $X_1, X_2, ..., X_{100}$ - отмеченные точки на окружности, а A и B - две диаметрально

противоположные точки, отличные от отмеченных. По условию $|AB| = 2$. Следовательно, из неравенства треугольника для каждой точки X_i, $i = 1, 2, ..., 100$, имеем $|AX_i| + |BX_i| > 2$. Просуммировав все неравенства, получим $\sum_{i=1}^{100} |AX_i| + \sum_{i=1}^{100} |BX_i| > 200$. Ясно, что, по крайней мере, одна из сумм больше 100.

Вариант 32.

1. Ответ: нет.

Так как число ягод на соседних кустах отличается на единицу, то эти числа разной четности. Следовательно, кусты с четным числом и кусты с нечетным числом ягод чередуются, т. е. имеются 10 кустов с нечетным числом ягод и 10 кустов с четным числом. Но тогда сумма всех ягод будет четным числом, так как сумма четного

числа нечетных чисел – четна.

2. Ответ: 108. См. решение задачи 2 из варианта 31.
3. Ответ: 499 нулями.

Так как ноль образуется только при умножении цифр 5 и 2, то необходимо подсчитать число пар этих цифр в разложении числа 2003! на простые множители. Двойка встречается в разложении каждого второго числа, то есть двоек не менее 1000. Подсчитаем число пятерок. Каждое пятое число в ряду натуральных чисел делится на 5, и, следовательно, содержит пятерку в своем разложении. Каждое число, которое делится на $25 = 5^2$, содержит две пятерки, на $125 = 5^3$ - содержит три пятерки, и на $625 = 5^4$ - содержит четыре пятерки. Так как $5^5 > 2003$, то чисел, содержащих в своем разложении пять и более пятерок, нет. Таким образом, в разложении чисел от 1 до 2003 содержится 400 + 80 + 16 + 3 = 499 пятерки.

4. Пусть O - точка пересечения отрезков B_1C_2 и B_2C_1. В прямоугольном треугольнике ABB_1 точка C_2 является центром описанной

окружности. Следовательно, $AC_2 = BC_2 = B_1C_2$, поэтому треугольник BB_1C_2 равносторонний и $\angle BC_2B_1 = 60^0$.

Аналогично, в прямоугольном треугольнике ACC_1 $AB_2 = C_1B_2 = CB_2$ и в равнобедренном треугольнике AC_1B_2 $\angle C_1AB_2 = \angle AC_1B_2 = 30^0$. Таким образом, в треугольнике C_1OC_2 $\angle C_1OC_2 = 180^0 - \angle C_1C_2O - \angle C_2C_1O = 90^0$.

5. Ответ: нельзя.

Если просуммировать числа в каждой строке, а затем сложить полученные числа, то получим сумму всех чисел таблицы, которая будет положительным числом. Если просуммировать вначале числа в каждом столбце, а затем сложить полученные числа, то снова получим сумму всех чисел таблицы, но теперь она будет отрицательной, что невозможно.

6. Ответ: 242.

Покажем, что стороны AB и CD являются основаниями трапеции. Действительно, если бы эти стороны были бы боковыми сторонами, то площади треугольников ABE и CDE были бы равны, что следует из равенства площадей треугольников ABD и BCE ACD. Но, по условию, площади треугольников ABE и CDE равны, и следовательно стороны AB и CD - основания трапеции. В этом случае, треугольники ABE и CDE подобны. Поскольку площади подобных треугольников относятся как квадраты соответствующих сторон, то $BE^2 : DE^2 = 72 : 50$, откуда $BE : DE = 6 : 5$. Так как в треугольниках BCE и DCE стороны BE и DE лежат на одной прямой и вершина C, то их площади относятся как основания, т. е. $S_{\triangle BCE} : S_{\triangle DCE} = BE : DE = 6 : 5$. Откуда $S_{\triangle BCE} = \dfrac{6}{5} \cdot 50 = 60$. Таким образом, площадь трапеции $ABCD$ равна 72 + 50 + 60 + 60 = 242.

Вступительный экзамен.

1. Ответ: 200304, 200340, 200316, 200352, 200328, 200364, 200376, 200388.

Чтобы число $\overline{2003ab}$ делилось на 12 необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 4 и на 3. Необходимость очевидна, а достаточность следует из того, что числа 3 и 4 взаимно простые. Согласно признаку делимости на 3 и учитывая, что a и b цифры, имеем $a+b=1, 4, 7, 10, 13, 16$. Из признака делимости на 4 (число делится на 4, если двухзначное число, образованное его двумя последними цифрами делится на 4) следует, что число $\overline{ab}$ должно делиться на 4. Простым перебором находим, что $\overline{ab}=4, 40, 16, 52, 28, 64, 76, 88$.

2. Ответ: 32 года.

Поскольку средний возраст определяется делением суммарного возраста на количество игроков, то суммарный возраст всех 11 игроков равен 11×22 = 242 годам. Аналогично, суммарный возраст оставшихся игроков, после удаления одного из них, равен 10×21 = 210 лет. Следовательно, возраст удаленного игрока составляет 242 – 210 = 32 года.

3. Ответ: 1 : 2.

Пусть в трапеции $ABCD$ диагональ AC перпендикулярна боковой стороне CD. Тогда диагональ AC не может быть биссектрисой угла C, так как угол $\angle C<180^0$.

Следовательно, AC является биссектрисой угла A. Пусть M - точка пересечения

продолжений боковых сторон AB и CD. Так как в треугольнике AMD биссектриса AC является одновременно высотой, то он равнобедренный. По свойству равнобедренных треугольников, высота, проведенная из вершины, является одновременно и биссектрисой, и медианой. Следовательно, C - середина DM, а BC - средняя линия в треугольнике AMD.

4. Ответ: 5% числа A больше 7% числа B.

Из условия задачи следует, что $\frac{2A}{100}>\frac{3B}{100}$, откуда $2A>3B$, или $10A>15B>14B$. Из последнего неравенства имеем $5A>7B$, или $\frac{5A}{100}>\frac{7B}{100}$. Таким образом, 5% числа A больше 7% числа B.

5. Ответ: 24 шахматиста.

Пусть в шахматном турнире участвовало n шахматистов. Тогда, каждый из них всего сыграл $n-1$ партий и из них, по условию, $n-2$ партии закончил в ничью.

Следовательно, всего ничьих было сыграно $\frac{n(n-2)}{2}$, так как в каждой парии участвует два шахматиста. С другой стороны, по условию в турнире всего было сыграно 264 ничьих. Таким образом, имеем уравнение $\frac{n(n-2)}{2}=264$, из решения которого получаем два значения для n: $n=24$ и $n=-22$. По понятным причинам, второе значение – постороннее.

6. *Первое решение*. Пусть в параллелограмме $ABCD$ $AB=a,\ AD=b$ и прямые BM и BN, где точка M лежит на стороне AD, а N - на стороне CD, делят параллелограмм на три части равной площади. В частности, $S_{\Delta ABM}=\frac{1}{3}S_{ABCD}$. Но $S_{\Delta ABM}=\frac{1}{2}a\cdot AM\cdot\sin\angle A$, а $S_{ABCD}=a\cdot b\cdot\sin\angle A$, следовательно $\frac{1}{2}a\cdot AM\cdot\sin\angle A=\frac{1}{3}a\cdot b\cdot\sin\angle A$. Откуда $AM=\frac{2}{3}b$. Аналогично находим, что $CN=\frac{2}{3}a$. По найденным значениям, точки M и N легко строятся.

Второе решение. Пусть, снова, прямые BM и BN делят параллелограмм $ABCD$ на три части равной площади. Поскольку диагональ BD делит параллелограмм на два равных треугольника, то $S_{\Delta ABM}=\frac{1}{3}S_{ABCD}=\frac{2}{3}S_{\Delta ABD}$. Так как у треугольников ABM и ABD основания лежат на одной прямой, а вершина B - общая, то площади этих

треугольников относятся так же, как основания, т. е. $S_{\Delta ABM}:S_{\Delta ABD}=2:3=AM:AD$. Аналогично определяется отношение $CN:CD=2:3$.

Варианты 2004 г.

Вариант 41.

1. Ответ: 28 раз.

Пусть X - число попаданий стрелка по мишени. Так как за каждое попадание стрелку дополнительно выдавалось по 7 патронов, то общее число выстрелов равно $4+7X=200$. Откуда $X=28$.

2. Ответ: 5040.

Найти наименьшее натуральное число, которое делится на все четные числа от 2 до 18, означает найти наименьшее общее кратное этих чисел. Для этого, разложим указанные числа на простые множители и выберем из них все простые делители в максимальных степенях. Произведение полученных делителей и даст нужное число. Таким образом имеем: 2, $4=2^2$, $6=2\cdot3$, $8=2^3$, $10=2\cdot5$, $12=2^2\cdot3$, $14=2\cdot7$, $16=2^4$, $18=2\cdot3^2$.

Следовательно, искомое число есть $2^4\cdot3^2\cdot5\cdot7=5040$.

3. Пусть точка M находится внутри угла BAC. Проведем через точку M прямую, параллельную стороне угла AB, до пересечения со стороной AC в точке N. Разделим отрезок AN на три равные части и на стороне AC, за точку N, отложим отрезок NK, равный двум таким частям. Тогда прямая MK и будет искомой, что легко следует из теоремы Фалеса для угла AKM, стороны которого пересечены параллельными прямыми MN и AB.

4. Ответ: Нет, не могло.

Предположим, что для некоторой таблицы из десяти указанных чисел ровно одно число не делится на 9. Для определенности, будем считать, что это число составлено из цифр некоторого столбца. Тогда, каждое из пяти чисел, соответствующих строкам таблицы, делятся на 9. По признаку делимости на 9, сумма всех цифр в каждой строке делится на 9, а значит, и сумма всех цифр таблицы делится на 9. Но если теперь мы сначала найдем суммы цифр по всем столбцам, то, по предположению, ровно одна из этих сумм не делится на 9, а остальные делятся. Но тогда сумма всех цифр таблицы не может делиться на 9. Получили противоречие.

5. Так как n - натуральное число, то справедливы следующие неравенства $(n+3)^2 < n^2+7n+9 < (n+4)^2$. Из них следует, что число n^2+7n+9 при любом натуральном n располагается между квадратами двух последовательных натуральных

чисел, а поэтому оно не может быть точным квадратом никакого натурального числа.

6. Отложим на хорде AL отрезок $AB = AK$. Поскольку $\angle AKL > \angle MKL = 60^0$, а $\angle KLA < \angle KLM = 60^0$, то $AK < AL$ и точка B лежит на хорде AL. Далее, так как $\angle KAL = \angle KML = 60^0$, как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, и $AB = AK$, то треугольник AKB - правильный. Рассмотрим треугольники KAM и KBL.

У них $\angle AMK = \angle KLB$, как вписанные углы, опирающиеся на дугу AK, $\angle KAM = \angle KBL = 120^0$, а, следовательно, равны и углы AKM и BKL. Так как $KM = KL$, то треугольники KAM и KBL равны по стороне и двум прилежащим углам, а, следовательно, $AM = BL$. Таким образом, $AL = AB + BL = AK + AM$.

Вариант 42.

1. Ответ: 68 золотых.

Пусть x - стоимость одной тетради, а y - количество золотых монет у Буратино. Тогда $y = 12x + 20$ и $y = 20x - 12$. Приравнивая правые части этих уравнений, получим $12x + 20 = 20x - 12$. Откуда $8x = 32$, и $x = 4$. Подставляя найденное значение x в любое из равенство для y, находим $y = 68$.

2. Ответ: не могло.

Предположим, что нашлись такие натуральные числа m и n, что $(m-n)\cdot m\cdot n = 45045$. Поскольку число 45045 – нечетно, то числа m и n - нечетные. Но тогда их разность $(m-n)$ – есть число четное и все произведение тоже четное, вопреки нашему предположению.

3. Ответ: в классе 16 мальчиков и 20 девочек.

Обозначим через m и d число мальчиков, и, соответственно, число девочек в данном классе. По условию имеем $m + d = 36$. Назовем пару, состоящую из мальчика и девочки, дружной, если они дружат друг с другом. Тогда, число дружных пар в классе, с одной стороны равно $4m$, а с другой стороны $5d$. Следовательно $4m = 5d$.

Получили систему из двух уравнений, которая легко решается.

4. Ответ: 20; 28.

Пусть в трапеции $ABCD$ точки M и N - середины боковых сторон AB и CD соответственно. Обозначим через K и L - точки пересечения биссектрис углов A и C с отрезком MN. Так как AK - биссектриса, то $\angle AKM = \angle KAD = \angle KAM$. Следовательно, треугольник AKM - равнобедренный и $AM = MK$. Аналогично

Доказывается, что $CN = LN$. Для расположения точек L и K на отрезке MN возможны два случая: либо $MK = KL = LN = 2$, либо $ML = LK = KN = 2$. В первом случае боковые стороны $AB = CD = 4$, во втором $AB = CD = 8$. Наконец, учитывая, что $AD + BC = 2MN = 12$, находим периметр трапеции в каждом случае.

5. См. задачу № 5 из варианта 41.

6. Пусть длина стороны искомого квадрата равна x, а длина данного отрезка - a. Согласно условию $a = x + x\sqrt{2}$. Тогда, $a\sqrt{2} - a = (x + x\sqrt{2}) \cdot \sqrt{2} - (x + x\sqrt{2}) = x$. Таким образом, построив квадрат со стороной a и вычитая из диагонали построенного

квадрата его сторону, найдем сторону искомого квадрата.

Вариант 43.

1. Ответ: Не может.

Произведение целых чисел может равняется 1 только в том случае, если каждое из них равно +1 или -1, причем количество отрицательных сомножителей должно быть четно. С другой стороны, чтобы сумма 22 чисел, каждое из которых равно +1 или -1, равнялась нулю, необходимо, чтобы положительных и отрицательных чисел было поровну, т. е отрицательных единиц должно быть

нечетно. Получили противоречие.

2. Ответ: первая цифра 9.

Выпишем все двузначные числа, которые делятся на 17 или 23: 17, 34, 51, 68, 85, 23, 46, 69, 92. Нетрудно заметить, что все приведенные числа оканчиваются на различные ненулевые цифры. Следовательно, для любой цифры последовательности, впереди стоящая цифра определяется однозначно. Восстанавливая последовательность, легко обнаруживается период.

3. Ответ: 19 рыжиков и 11 груздей.

Среди 30 грибов должно быть не менее 19 рыжиков. В противном случае найдется 12 грибов, среди которых нет рыжика. Аналогично, в корзине не менее 11 груздей, а следовательно рыжиков не более 19. Поэтому рыжиков в корзине ровно19, а груздей 11.

4. Ответ: диагональ делится в отношении 12 : 35, считая от вершины B.

Пусть O - точка пересечения отрезка MN с диагональю BD, а K - продолжения MN с прямой AD. Положим $BN = 4x$. Тогда $BC = AD = 9x$. Треугольники KAM и BMN подобны по трем углам. Из подобия имеем $KA : BN = AM : MB = 2 : 3$. Откуда $AK = \frac{2BN}{3} = \frac{8x}{3}$ и $KD = KA + AD = \frac{35x}{3}$. Наконец, из подобия треугольников BON и KOD находим $BO : OD = BN : KD = 12 : 35$.

5. Ответ: больше тех, которые делятся на 6, но не делятся на 7.

Ясно, что среди первых 100000 натуральных чисел больше тех, которые делятся на 6, а не на 7. Из чисел, которые делятся на 6, нужно удалить те числа, которые еще делятся и на 7, а из чисел, которые делятся на 7, удаляются те числа которые делятся на 6. В обоих случаях удаляются числа, которые делятся на 42, т.е. удаляются одни и те же числа.

6. Из произвольной точки одной из прямых опишем окружность с радиусом,

равным данному отрезку. Соединяя центр окружности с точками пересечения окружности с другой параллельной прямой, получим два отрезка, заключенных между данными параллельными прямыми, равных данному отрезку. Проводя через данную точку прямые, параллельные построенным отрезкам, получим два решения.

Вступительный экзамен.

1. Если сумма 11 целых чисел четна, то среди них обязательно присутствует хотя бы одно четное число, которое и можно стереть. Если же сумма чисел нечетна, то среди них имеется, по крайней мере, одно нечетное число, после стирания которого сумма оставшихся чисел будет четной.

2. Ответ: 100 деревьев.

Нетрудно заметить, что первое дерево у Малыша было 88 у Карлсона, а первое у Карлсона – четырнадцатым у Малыша. Следовательно, тринадцатое дерево у Малыша было последним у Карлсона.

3. Ответ: 11 партий.

Поскольку проигравший игрок пропускает только одну партию, то каждый из участников участвует не менее чем в половине партий. По условию, первый игрок сыграл 10 партий. Поэтому общее число сыгранных партий не может быть больше, чем $10 \cdot 2 + 1 = 21$. Следовательно, второй игрок участвовал во всех партиях, а третий игрок сыграл 11 партий.

4. Радиус искомой окружности равен половине расстояния между данными параллельными прямыми, а ее центр расположен на прямой, равноудаленной от них. С другой стороны, центр искомой окружности удален от центра данной окружности на расстояние, равное сумме их радиусов.

5. Ответ: 17, 34.

Пусть X и Y - искомые числа. Тогда $3 \cdot X \cdot Y = 100 \cdot X + Y$, откуда $X \cdot (3Y - 100) = Y$. Учитывая, что $10 \le X, Y < 100$, получаем $0 < 3Y - 100 < 10$ или $33 < Y \le 36$. Непосредственной подстановкой, убеждаемся, что только при $Y = 34$, X - целое число.

6. Ответ: $AO : ON = 9 : 2$, $BO : OM = 5 : 6$.

Проведем через точку M прямую, параллельную AN, и точку пересечения этой прямой со стороной BC обозначим через K. Тогда, по теореме Фалеса для угла ACN, стороны которого пересечены двумя параллельными прямыми MK и AN имеем $NK : KC = AM : MC = 3 : 2$. Таким образом, $NK = (3/5)NC$, а $BN = (1/2)NC$ по условию. Применяя теорему Фалеса к сторонам угла MBC, пересеченных параллельными прямыми ON и MK, находим $BO : OM = BN : NK$. Подставляя найденные значения для BN и NK, получим $BO : OM = 5 : 6$. Аналогично находится отношение $AO : ON = 9 : 2$.

Варианты 2005 г.

Вариант 51.

1. Ответ: 6 друзей.

Пусть один букварь стоит x золотых монет, одна ручка - y золотых монет, а n - число друзей у Буратино. Тогда $10x = 15y$, откуда $x = 3y/2$. С другой стороны $n(x+y) = 10x$. Подставляя в последнее равенство найденное выражение для x, получим $n = 6$.

2. Ответ: 7.

Непосредственной проверкой устанавливается, что числа 666666 и 555555 делятся на 7. Следовательно, на 7 делятся числа $A = 66...6$ (24 шестерки) и $B = 55...5$ (24 пятерки). Поскольку $N = A \cdot 10^{27} + 6?5 \cdot 10^{24} + B$, то чтобы N делилось на 7, необходимо чтобы число $6?5 \cdot 10^{24}$ делилось на 7. Понятно, что в этом случае число будет делиться на 7, если на 7 будет делиться трехзначное число 6?5. Простым перебором находим единственное 665, которое делится на 7.

3. Ответ: $x \in [-3; 2] \cup \{3\}$.

ОДЗ исходного неравенства определяется условием $9 - x^2 \geq 0$, или $-3 \leq x \leq 3$. При этом значения $x = -3$ и $x = 3$ удовлетворяют данному неравенству, т. е. являются его решениями. Если $x \neq -3, 3$, то для всех x из ОДЗ $\sqrt{9 - x^2} > 0$ и, следовательно, исходное неравенство для таких значений x равносильно неравенству $x^2 + x - 6 \leq 0$. Все решения последнего неравенства $-3 \leq x \leq 2$ принадлежат ОДЗ.

4. Ответ: 178^0.

За 60 минут, пройденных минутной стрелкой, часовая стрелка успевает пройти только 5 минутных делений. Следовательно, скорость движения минутной стрелки в 12 раз больше скорости движения часовой. Угол между часовой и минутной стрелками ровно в 9 часов равен 90^0. За 16 минут минутная стрелка отклонится от исходного положения на 96^0, а часовая – сдвинется на 8^0 (угол между соседними делениями на циферблате равен 6^0). Следовательно, в 9 часов 16 минут угол между стрелками будет составлять $90^0 + 96^0 - 8^0 = 178^0$.

5. Так как a, b, c - положительные числа, то после возведения неравенства $a+b+c \le 1$ в квадрат, получим верное неравенство $a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc \le 1$. Поскольку
$a \ge b \ge c$, то $2ab \ge 2b^2$, $2ac \ge 2c^2$, $2bc \ge 2c^2$. Следовательно,
$1 \ge a^2+b^2+c^2+2b^2+2c^2+2c^2 = a^2+3b^2+5c^2$.
6. Ответ: $AB = BC = 6$.
Пусть D - середина стороны AC, а точка N на стороне AC - основание перпендикуляра, опущенного из точки M. Так как медиана BD в равнобедренном треугольнике является высотой, то $MN \| BD$, т.е. MN - есть средняя линия в треугольнике BCD, и, следовательно, $NC = DC/2 = AC/4$. Таким образом, $NC = \sqrt{2},\ AN = 3\sqrt{2}$. Применяя теорему Пифагора к треугольникам AMN и MNC последовательно находим $MN = \sqrt{25-18} = \sqrt{7}$, $MC = \sqrt{7+2} = 3$. Следовательно,
$AB = BC = 2MC = 6$.

Вариант 52
1. Ответ: 4,5 часа.
Пусть S - длина пути, v - скорость автомобиля на первой половине пути. Тогда, скорость автомобиля на второй половине пути равна $1,25v$. Поскольку, выигрыш во времени происходит только на второй половине пути, то $\dfrac{S}{1,25v} = \dfrac{S}{v} - \dfrac{1}{2}$. Полагая, $\dfrac{S}{v} = t$, из уравнения находим $t = 2,5$ часа. Следовательно, автомобиль был в пути
2,5 + 2 = 4,5 часа.
2. Ответ: не может.

В разложении числа $528 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11$ присутствует простое число 11, которое не является цифрой.

3. Ответ: 625.

Число чисел, располагающихся между квадратами последовательных натуральных чисел n^2 и $(n+1)^2$ равно $(n+1)^2 - n^2 = 2n+1$, и $\left[\sqrt{n^2+m}\right] = n$, для всех $2n+1$ чисел $m = 0, 1, 2, \dots, 2n$. Следовательно, $\left[\sqrt{1}\right] + \left[\sqrt{2}\right] + \left[\sqrt{3}\right] + \dots + \left[\sqrt{100}\right]$ = $1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 +$ $+ \ 9 \cdot 19 + 10 = 625$.

4. Ответ: $x \in [-4; \ -3] \cup \{3\}$.

См. решение задания 3 варианта 51.

5. См. решение задания 5 варианта 51.

6. Обозначим через M середину стороны AC. Тогда, $\angle BDK = \angle ADM = 90^0 - \angle DAM$. Поскольку точка D лежит на срединном перпендикуляре к стороне AC, то $AD = CD$ и, следовательно, $\angle DAM = \angle DCM$. Согласно условию задачи $\angle DCM < \angle KCM$. Таким образом, $\angle BKD = \angle CKM = 90^0 - \angle KCM < 90 - \angle DCM = \angle DAM = \angle BDK$.

Так как против большей стороны в треугольнике лежит большая сторона, то $BK > BD$.

Вариант 53

1. Ответ: 4,5 часа.

См. решение задания 1 варианта 52.

2. Ответ: 2789.

Поскольку произведение цифр числа 1999 равно 729, а произведение цифр числа 2999 - $2 \cdot 729$ > 1000, то первая цифра искомого четырехзначного числа равна 2. Аналогично, так как произведение цифр числа 2699 меньше 1000, а числа 2799 – больше 1000, то на втором месте в наименьшем четырехзначном числе стоит цифра 7. Наконец, проверкой убеждаемся, что $2\cdot7\cdot7\cdot9<1000,\ 2\cdot7\cdot8\cdot8<1000$, а $2\cdot7\cdot8\cdot9=1008$.

3. Ответ: 0; 7.

   См. решение задания 2 варианта 51.

4. Ответ: $x\in[-1;3]\cup\{-4\}$.

   См. решение задания 3 варианта 51.

5. См. решение задания 5 варианта 51.

6. Пусть точка O - середина высоты BH, а D - точка пересечения прямой AO со стороной BC. Проведем через точку H прямую, параллельную AD до пересечения со стороной BC в точке N. Тогда в треугольнике HBN отрезок OD - средняя линия и $BD=DN$. Аналогично, в треугольнике ACD отрезок HN - средняя линия и $DN=NC$. Таким образом, точки D и N делят сторону BC на три равные части.

Вступительный экзамен.

1. Ответ: да, успеет.

   Обозначим через S - длину всего пути, а через v - скорость автомобиля на первой трети пути. Тогда скорость автомобиля на второй трети пути будет равна $v-\frac{20}{100}v=\frac{4}{5}v$, а на последней трети пути - $\frac{8}{5}v$.

   Следовательно, время, затраченное автомобилем на весь путь, равно $\frac{S}{3v}+\frac{S\cdot5}{3\cdot4v}+\frac{S\cdot5}{3\cdot8v}=\frac{S}{v}\cdot\frac{23}{24}<\frac{S}{v}$, где $\frac{S}{v}$ - есть время, необходимое автомобилю, чтобы успеть прибыть в конечный пункт к назначенному сроку.

2. Ответ: 1^0.

   Ровно в 16 часов угол между стрелками составлял 120^0. За 22 минуты минутная стрелка прошла $22\cdot6^0=132^0$, а часовая - $132^0:12=11^0$ (см. решение задачи 4 варианта 51). Таким образом, угол между стрелками в 16 часов 22 минуты будет равен $132^0-(120^0+11^0)=1^0$.

3. Ответ: 385; 625.

Клетку, стоящую на пересечении i-ой горизонтали и j-ой вертикали будем обозначать (i, j), а число стоящее в этой клетке - $a(i, j)$. Диагональ, идущая от клетки (1,1) к клетке (10,10), называется главной. Вначале найдем наименьшую возможную сумму чисел стоящих на главной диагонали. Рассмотрим квадрат $k\times k$ с главной диагональю $(1,1)-(k,k)$. Покажем, что $a(k,k)$ - наибольшее из всех чисел данного квадрата. Действительно, для всех $1\le i, j\le k$ имеем $a(i, j)<a(k, j)<a(k,k)$. Таким образом, $a(k,k)\ge k^2$, то есть, $a(k,k)$ не меньше числа клеток в этом квадрате. Следовательно, $a(1,1)+a(2,2)+\ldots+a(9,9)+a(10,10)\ge 1+4+\ldots+81+100=385$. Соответствующая расстановка чисел легко строится. Для нахождения наибольшей возможной суммы, рассмотрим квадраты $k\times k$ с главной диагональю $(11-k,11-k)-(10,10)$. Также как и выше, доказывается, что $a(11-k,11-k)\le 101-k^2$. Следовательно, наибольшая возможная сумма чисел на главной диагонали равна $101-1^2+101-2^2+\ldots+101-9^2+101-10^2=1010-385=625$.

4. Ответ: $(-\infty;-1)\bigcup[1/2;2)$.

ОДЗ данного неравенства: $x\ne-1,\ x\ne 2$. На ОДЗ, после переноса правой части в левую и приведения к общему знаменателю, получим равносильное неравенство $\dfrac{4x-2}{(x+1)(x-2)}\le 0$. Разделив обе части последнего неравенства на 4, методом интервалов найдем решение неравенства, которое с учетом ОДЗ и будет решением исходного неравенства.

5. Так как числа $a,\ b,\ c$ неотрицательны и их сумма не превосходит 1, то каждое из них не превосходит 1, т. е. $0\le a,b,c\le 1$. Имеем $a^2+b^2+c^2\ge a^2+b^2\ge 2ab\ge ab\ge abc$, где второе неравенство следует из очевидного неравенства $(a-b)^2\ge 0$, а последнее из того, что $0\le c\le 1$.

6. Ответ: 7 : 3.

Пусть M - середина высоты BH, а N - точка пересечения прямой AM с BC. Опустим из точек M и H перпендикуляры MK и HL

к стороне AB. Обозначим длину отрезка HL через h. Так как M середина отрезка BH, то $MK = h/2$ и $BK = KL$. Положим $BK = KL = 2x$. Тогда, по теореме Фалеса, имеем $AL : BL = AH : CH = 3 : 4$, откуда $AL = 3x$. Из подобия треугольников AMK и ANB находим, что $NB : MK = 7x : 5x = 7 : 5$, или $NB = 7h/10$. Из подобия треугольников AHL и ACB получаем $BC = 7h/3$. Следовательно, $CN = 7h/3 - 7h/10 = 49h/30$ и $CN : NB = 7 : 3$.

Варианты 2006 г.

Вариант 61.

1. Ответ: $x \in [3,\ 5]$.

Разобьем всю числовую ось на три участка: а) $(-\infty,\ 3)$; б) $[3,\ 5)$; с) $[5,\ +\infty)$.

Рассмотрим исходное уравнение на каждом из них отдельно. При $x < 3$ $x - 3 < 0$ и $x - 5 < 0$. Следовательно, на участке а) исходное уравнение равносильно уравнению $-x + 3 - x + 5 = 2$ или $x = 3$. Полученное решение не принадлежит участку а) и, следовательно, на этом участке уравнение решений не имеет. При $3 \le x < 5$ $x - 3 \ge 0$, а $x - 5 < 0$. Раскрывая модули на участке б), получим $x - 3 - x + 5 = 2 \Leftrightarrow 2 = 2$ - верное числовое равенство. Следовательно, все значения переменной x из участка б) являются решениями исходного уравнения. Наконец, при $x \ge 5$ оба выражения под знаком модуля неотрицательны и на участке с) имеем $x - 3 + x - 5 = 2$, откуда $x = 5$ - решение.

2. Ответ: $a = 0$.

Пусть x_1 и x_2 корни уравнения. По теореме Виета имеем $x_1 + x_2 = 4,\ x_1 \cdot x_2 = a$. Возводя первое равенство в квадрат $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = 16$, и учитывая, что $x_1^2 + x_2^2 = 16$, получим $x_1x_2 = 0$. Откуда $a = 0$.

3. Ответ: числа равны.

Имеем $28-10\sqrt{3}=25-2\cdot 5\cdot\sqrt{3}+3=(5-\sqrt{3})^2$, аналогично $28+10\sqrt{3}=(5+\sqrt{3})^2$. Следовательно, первое число равно $(5-\sqrt{3})+(5+\sqrt{3})=10$.

4. Ответ: $n=1;\ 3$.

Преобразуем выражение $\dfrac{3n-1}{n+1}=\dfrac{3n-3+4}{n+1}=3-\dfrac{4}{n+1}$. Исходное число будет целым, если число $\dfrac{4}{n+1}$ - целое. Последнее возможно, если $n+1$ является делителем числа 4, то есть $n+1=2$ или $n+1=4$ (n - натуральное). Откуда $n=1$ и $n=3$.

5. Ответ: 72.

В прямоугольном треугольнике середина гипотенузы является центром описанной окружности. Следовательно, в ΔABC гипотенуза $AB=2\cdot MC=24$. Пусть N - середина катета AC. По условию, высота h, опущенная из точки N к стороне AB равна 3, а потому $S_{\Delta ABN}=\frac{1}{2}AB\cdot h=\frac{1}{2}\cdot 24\cdot 3=36$. Наконец, поскольку медиана BN

делит треугольник ABC на два равновеликих треугольника, то $S_{\Delta ABC}=2\cdot S_{\Delta ABN}=72$.

6. Пусть ABC - искомый треугольник, а на плоскости даны точки M, N и H, где M и N - середины сторон AB и BC, а H основание высоты, опущенной из вершины B к стороне AC. Поскольку MN - средняя линия в ΔABC, и $MN \parallel AC$, то высота $BH\perp MN$ и делится прямой MN пополам. Следовательно, построив точку, симметричную точке H относительно прямой MN, получим вершину B искомого

треугольника. Пересечения прямых BM и BN с прямой, проходящей через точку H и параллельную MN, дадут нам оставшиеся вершины A и C.

Вариант 62.
Ответы и указания.

1. Ответ: $x \in [1,\ 2]$.
2. Ответ: $a = 1$.
3. Ответ: первое число больше.
4. Ответ: $n = 9$.
5. Ответ: 72.
6. *Указание*. Если M и N середины сторон треугольника, а O - центр описанной окружности, то OM и ON - срединные перпендикуляры к соответствующим сторонам треугольника.

Вступительный экзамен.

1. Ответ: $x \in [-1; 3]$.

   Разобьем всю числовую ось на участки знакопостоянства выражений под модулями: 1) $-\infty < x < -1$; 2) $-1 \le x < 3$; 3) $3 \le x < \infty$. На первом участке оба выражения под знаком модуля отрицательны, поэтому, раскрывая модули, получим $-x+3-x-1 \le 4$, или $x \ge -1$. Полученное решение не пересекается с рассматриваемым промежутком, следовательно, здесь решений нет. На втором участке первое выражение отрицательно, а второе неотрицательно. Раскрывая модули, имеем $-x+3+x+1 \le 4 \Leftrightarrow 4 \le 4$. Таким образом, все значения переменной x из второго промежутка являются решениями нашего уравнения. Наконец, на третьем участке оба выражения под модулем неотрицательны, и раскрывая модули, получим $x-3+x+1 \le 4 \ \Leftrightarrow \ x \le 3$. Только $x = 3$ входит в рассматриваемый промежуток.
2. Ответ: $x = 1$.

   Первое решение. Перепишем данное уравнение следующим образом: $\sqrt{2x-2} = 1 - \sqrt{x}$. После возведения в квадрат и приведения подобных слагаемых, будем иметь $x + 2\sqrt{x} - 3 = 0$. Производя замену переменной $t = \sqrt{x},\ t \ge 0$, и решая квадратичное уравнение $t^2 + 2t - 3 = 0$, получим $t = 1, -3$. Так как $t \ge 0$, корень - 3 – посторонний. Возвращаясь к исходной переменной, находим $\sqrt{x} = 1$, или

$x=1$. Подставляя найденное значение в исходное уравнение, убеждаемся, что $x=1$ действительно является решением. Проверка здесь обязательна, так как при возведении в квадрат мы перешли к следствию и могли приобрести посторонние решения.

Второе решение. Найдем ОДЗ нашего уравнения: $\begin{cases} 2x-2\ge 0 \\ x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\ge 1$. При этом, на ОДЗ выражение $\sqrt{x}\ge 1$, а $\sqrt{2x-2}\ge 0$. Следовательно, наше уравнение равносильно системе $\begin{cases} \sqrt{2x-2}=0 \\ \sqrt{x}=1 \end{cases}$, которое имеет единственное решение $x=1$.

3. Ответ: 3.

Найдем значения факториалов для нескольких начальных значений натуральных чисел: $1!=1,\ 2!=2\cdot 1=2,\ 3!=3\cdot 2\cdot 1=6,\ 4!=4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=24$, $5!=5\cdot 4!=120,\ 6!=6\cdot 5!=720$, и так далее. Понятно, что для всех натуральных чисел $n>6$ число $n!$ будет оканчиваться нулем. Следовательно, последняя цифра всей суммы будет совпадать с последней цифрой числа $1+2+6+24=33$.

4. Ответ: 12600.

Наверно самый простой путь нахождения суммы цифр всех трехзначных чисел – это нахождение суммы цифр по разрядам. На месте сотен каждая цифра, кроме 0, встречается ровно 100 раз. Следовательно, сумма цифр – сотен равна $(1+2+3+4+5+6+7+8+9)\cdot 100=4500$. В каждой сотне в разряде десятков каждая цифра встречается ровно 10 раз, а, следовательно, во всех 9 сотнях каждая цифра встречается в разряде десятков ровно 90 раз. Таким образом, сумма цифр – десятков равна $45\cdot 90=4050$.Такова же будет и сумма цифр, стоящих в разряде единиц. Следовательно, сумма цифр всех трехзначных чисел будет равна 12600.

5. Ответ: 1.

Обозначим через O - точку пересечения медиан, а через m_a, m_b, m_c - длины соответствующих медиан. Тогда, $KO=AO-AK=(2/3)m_a-(1/2)m_a=(1/6)m_a$. Аналогично,

$MO = (1/6)m_c$, $LO = (1/6)m_b$. Так как $KO : AO = (1/6)m_a : (2/3)m_a = 1:4$ и $MO : CO = 1:4$, то треугольники KOM и AOC подобны. Следовательно $KM : AC = 1:4$. Аналогично доказывается, что $LM : BC = 1:4$, $KL : AB = 1:4$. Тем самым, мы доказали, что треугольники KLM и ABC подобны, и коэффициент подобия равен $1/4$. Поскольку площади подобных треугольников относятся как квадрат коэффициента подобия, то $S_{\Delta KLM} : S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{16}$, откуда $S_{\Delta KLM} = 1$.

6. Анализ. Пусть в треугольнике ABC точки K и L середины высот AH_1 и CH_2, а M - середина стороны AC. В треугольнике AH_1C отрезок MK является средней линией. Следовательно, $MK \parallel CH_1$ и $MK = CH_1/2$. Поскольку $AH_1 \perp CH_1$, то $MK \perp AH_1$. Точно так же доказывается, что $ML \perp CH_2$ и $ML = AH_2/2$.

   Построение. Пусть M, K и L - заданные точки, где M - середина стороны, а K и L - середины высот. Построим через точки K и L прямые k и l, перпендикулярные прямым MK и ML соответственно. Далее, на прямой ML за точку M отложим отрезок $MN = ML$, и через точку N проведем прямую, перпендикулярную ML. Точка пересечения этой прямой и прямой k даст одну из вершин искомого треугольника. Вторая вершина – симметрична найденной, относительно точки M. Наконец, проводя через полученные вершины прямые, перпендикулярные прямым k и l, найдем последнюю вершину треугольника.

Варианты 2007 г.

Вариант 71

1. Ответ: $x = -1 + \sqrt{5}$.

О.Д.З. уравнения $x \le 2$. Поскольку правая часть уравнения на О.Д.З. неотрицательна, то решения уравнения должны удовлетворять условию $x \ge 0$. Возводя обе части уравнения в квадрат и перенося все в одну сторону, получим $x^2+2x-4=0$. Решениями последнего уравнения являются $x_{1,2}=-1\pm\sqrt{5}$. Оба значения принадлежат О.Д.З., но лишь одно из них удовлетворяет условию $x\geq 0$.

2. Ответ: через 12 дней.

Пусть S - расстояние между городами A и B, v - скорость первого пешехода, u - скорость второго пешехода. Тогда $S=v\cdot 21,\ S=u\cdot 28$. Умножая первое равенство на 4, а второе – на 3, и складывая, получим $7S=84\cdot(v+u)$. Откуда $\dfrac{S}{v+u}=12$.

3. Ответ: наибольшее число d.

Учитывая, что $b<d$, из равенства получаем $b+c=a+d>a+b$, откуда следует, что $a<c$. Складывая первое неравенство с равенством, имеем $a+b+2c<a+b+2d$, откуда, после приведения подобных слагаемых, получаем $c<d$. Таким образом, $a<c<d$ и $b<d$. Следовательно d - наибольшее число.

4. Ответ: $\dfrac{BO}{OM}=\dfrac{4}{3}$.

Пусть N - середина AB, O - точка пересечения прямой DN и медианы BM. Проведем через точку N прямую, параллельную AC, и пусть K - точка пересечения этой прямой с BM. Треугольники NOK и MOD подобны по трем углам. Следовательно, $\dfrac{OK}{OM}=\dfrac{NK}{MD}$. Так как MK - средняя линия в треугольнике ABM, то $MK=AM/2$, а $MD=3AM$. Таким образом, $\dfrac{OK}{OM}=\dfrac{AM/2}{3AM}=\dfrac{1}{6}$. Следовательно $MK=BK=7OK$. Откуда $\dfrac{BO}{OM}=\dfrac{BK+OK}{OM}=\dfrac{7OK+OK}{6OK}=\dfrac{8}{6}=\dfrac{4}{3}$.

5. Ответ: 2.

Так числа 9 и 15 различные, нечетные и составные, то утверждения а) и б), а) и г). б) и в), б) и г) и в) и г) не могут быть истинными одновременно. Следовательно, истинными должны быть утверждения а) и в).

Единственное число, удовлетворяющее этим высказываниям, является число 2.

6. *Первое решение*. Пусть даны углы A и B и отрезок h - высота, проведенная из вершины C к стороне AB. Построим угол, равный данному углу A. На расстоянии h от одной стороны построенного угла и параллельно ей, проведем прямую, пересекающая другую сторону в точке C. Отложим в точке C от стороны AC угол, равный $180^0-\angle A-\angle B$ в той полуплоскости, которой принадлежит построенный угол A. Полученный треугольник и есть искомый.

Второе решение. Построим произвольный треугольник $A_1B_1C_1$ с данными углами. Этот треугольник подобен искомому. Следовательно, соответствующие высоты в них относятся так же, как и стороны, т. е. $\frac{h}{h_1}=\frac{a}{a_1}$. Откуда $a=\frac{h\cdot a_1}{h_1}$. Так как отрезки $h,\ a_1,\ h_1$ даны, то используя теорему Фалеса, строим отрезок, равный a.

Вариант 72
Ответы и указания.

1. Ответ: $x=\sqrt{5}-1$.
2. Ответ: 20 мин.
3. Ответ: k.
4. Ответ: $6:5$ считая от вершины C.
5. Ответ: 2.
6. *Указание*: Пусть нам даны углы A и C и высота h, выходящая из вершины A. Построим угол равный C. Тогда вершина A лежит на одной стороне построенного угла и отстоит на расстоянии h от другой стороны этого угла.

Вариант 73
Ответы и указания.

1. Ответ: 2.
2. Ответ: 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63.

3. Ответ: k.
4. Ответ: $4:3$, считая от вершины C.
5. Ответ: 2.
6. *Указание.* Пусть K - точка пересечения отрезка AB с прямой l, а M и N - точки

пересечения с l окружности, построенной на AB, как на диаметре. Тогда искомое множество точек – есть отрезок MN, за исключением концов отрезка и точки K.

Вариант 74
Ответы и указания.

.

1. Ответ: 3.
2. Ответ: 9, 19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89.
3. Ответ: d.
4. Ответ: $4:1$, считая от вершины B.
5. Ответ: 2.
6. Ответ: Все точки прямой l, за исключением отрезка MN. (См. указание к задаче 6 варианта 73.)

Вступительный экзамен.

Вариант 1.

1. Ответ: $x=-2$.

ОДЗ уравнения определяется неравенством $x^2-x>0$, откуда $x\in(-\infty,0)\bigcup(1,\infty)$. На ОДЗ исходное уравнение равносильно уравнению $x^2+x-2=0$, корнями которого являются $x=-2$ и $x=1$. Второй корень не входит в ОДЗ.

2. Ответ: 200000.

Всего четных натуральных чисел, не превосходящих 1000, ровно 500. Поэтому их сумма равна $\frac{1000+2}{2}\cdot 500=501\cdot 500=250500$. Четные числа кратные 5 - это числа, которые делятся на 10. Числа кратные десяти оканчиваются нулем, и среди чисел, не превосходящих 1000 их ровно 100. Сумма всех таких чисел равна $\frac{1000+10}{2}\cdot 100=50500$. Искомая сумма равна разности двух найденных сумм.

Ответ: 1.

Преобразуем знаменатель функции следующим образом: $x^2+4x+5=(x+2)^2+1$. Теперь легко видно, что функция $y=\frac{1}{(x+2)^2+1}$ всюду определена и принимает только положительные значения, а потому значение функции будет максимально, когда значение знаменателя минимально. Поскольку $(x+2)^2\geq 0$, то наименьшее значение, которое может принимать знаменатель равно 1. Причем, это значение достижимо, а именно, при $x=-2$ значение знаменателя равно 1. Следовательно, наибольшее значение функции равно 1.

3. Ответ: $3\sqrt{3}$.

Из условия задачи находим, что $AK=BL=CM=4$, и $BK=CL=AM=2$, а потому треугольники AKM, BLK и CML равны по двум сторонам и углу между ними. Площадь каждого из них равна $\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$, а площадь треугольника ABC равна $\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=9\sqrt{3}$. В обоих случаях мы воспользовались формулой вычисления площади треугольника, равной половине произведения сторон на синус угла между ними. Следовательно, площадь треугольника KLM равна $9\sqrt{3}-3\cdot 2\sqrt{3}=3\sqrt{3}$.

4. Ответ: $x>y$.

Складывая данные равенства, получим $3x+z=36$, а если второе равенство умножим на 2 и вычтем из него первое, то получим $3y+2z=24$. Следовательно, $3x+z>3y+2z$, откуда $3x>3y+z>3y\Rightarrow x>y$.

5. Обозначим через A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 точки пересечения горизонтальных линий с левой границей квадрата, а через B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 - точки пересечения с правой границей. В обоих случаях нумерация точек идет сверху вниз. С помощью линейки проведем прямые A_2B_1, A_3B_2, A_4B_3 и A_5B_4. Поскольку $A_2A_3 = B_1B_2$ и $A_2A_3 \| B_1B_2$, то четырехугольник $A_2B_1B_2A_3$ - параллелограмм. Следовательно, $A_2B_1 \| A_3B_2$, и по тем же причинам $A_3B_2 \| A_4B_3 \| A_5B_4$. Поскольку эти параллельные прямые разбивают отрезок B_1B_3 на три равные части, то, по теореме Фалеса, они разбивают на три равные части и другую сторону угла - диагональ A_5B_1.

Вариант 2.
Ответы и указания.

1. Ответ: $x=-3$.
2. Ответ: 200000.
3. Ответ: 1.
4. Ответ: $7\sqrt{3}/4$.
5. Ответ: $y > x$.
6. *Указание.* Смотри решение задачи 6 первого варианта.

Варианты 2008 г.

Вариант 81.

1. Ответ: 2008.
Внутри скобок выписано 200 нечетных чисел – все нечетные числа от 1 до 400. Разобьем их, начиная с 1, на пары соседних чисел $(1-3)+(5-7)+\ldots+(397-399)$. Всего пар 100, а разность чисел в каждой паре равна -2. Следовательно, выражение внутри скобок равно -200.
2. Ответ: 20 км.

Обозначим через S км длину пути от деревни до станции, а через t ч - время до отправления поезда после выхода туриста из деревни. Тогда, из условия задачи имеем: $\frac{S}{3} = t + \frac{2}{3}$, $1 + \frac{S-3}{4} = t - \frac{3}{4}$, где $\frac{2}{3}$ и $\frac{3}{4}$ - это 40 мин и 45 мин выраженные в часах, а 1 во втором уравнении – это первый час, который турист прошел со скоростью 3 км/ч. Вычитая из первого уравнения второе, после преобразований получим $S = 20$ км.

3. Ответ: $q = \frac{5}{2}, -\frac{5}{2}$.

Первое решение. По формулам для корней квадратичного уравнения находим $x_1 = \frac{-q - \sqrt{q^2 - 4}}{2}$, $x_2 = \frac{-q + \sqrt{q^2 - 4}}{2}$, где $q^2 - 4 > 0$.

Так как оба корня отрицательны и $|x_1| > |x_2|$, то $\frac{x_1}{x_2} = 4$ или $x_1 = 4 \cdot x_2$. Подставляя вместо x_1 и x_2 их выражения получим

$$\frac{-q - \sqrt{q^2 - 4}}{2} = 2(-q + \sqrt{q^2 - 4}) \Rightarrow 3 \cdot q = 5\sqrt{q^2 - 4} \Rightarrow q^2 = \frac{25}{4}.$$

Полученное значение для q^2 удовлетворяет условию $q^2 - 4 > 0$.

Второе решение. Воспользуемся формулами Виета. Пусть x_1, x_2 - корни заданного уравнения. Тогда, по теореме Виета $x_1 + x_2 = -q$, $x_1 \cdot x_2 = 1$, а по условию задачи $\frac{x_1}{x_2} = 4$. Из двух последних уравнений легко находим, что или $x_1 = 2$, $x_2 = 1/2$, или $x_1 = -2$, $x_2 = -1/2$. Подставляя найденные значения для корней в первое уравнение, получим значения параметра q.

4. Ответ: да, может.

Если $a^4 = b^4$, то или $a = b$, или $a = -b$. В первом случае система $\begin{cases} a = b \\ a = b+1 \end{cases}$ не имеет решений. А вот вторая система $\begin{cases} a = -b \\ a = b+1 \end{cases}$ имеет решение $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$.

5. Ответ: $CN = 14/3$.

Пусть точка M - середина отрезка BD, а точку K на стороне BC выберем так, чтобы отрезок DK был параллелен AN, а, следовательно, и MN. Так как, по условию, точки M и D - середины отрезков BD и AC, то отрезок MN является средней линией в треугольнике DBK, а отрезок DK - средней линией в треугольнике ACN, а значит $BN = NK = KC$. Следовательно, $CN = (2/3) \cdot BC = 14/3$.

6. Ответ: $2 \cdot MO > AO$.

Так как в треугольнике против большей стороны лежит больший угол, то $\angle A = \angle C > \angle B$. Следовательно, $3 \cdot \angle A > \angle A + \angle B + \angle C = 180^0$, откуда $\angle A > 60^0$. Таким образом, в прямоугольном треугольнике AOM угол OAM больше 30^0. Следовательно, $MO : AO > 1/2$.

Вариант 82.

Ответы и указания.

1. Ответ: 2008.
2. Ответ: 35 м.
3. Ответ: при $p = \frac{5}{3}, -\frac{5}{3}$. , при $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}$.
4. Ответ: $CD = \frac{10}{3}$.
5. Ответ: да, может. Например
6. Ответ: $AO > 2 \cdot MO$.

Вступительный экзамен.

1. Ответ: 33.

Так как рядом с каждой красной лампочкой в гирлянде обязательно должна стоять синяя, то среди любых трех подряд идущих лампочек хотя бы одна синяя лампочка. Следовательно, среди первых 48 лампочек не менее 16 синих, а из двух оставшихся обе красными быть не могут. Таким образом, в гирлянде не менее 17 синих лампочек, а, следовательно, красных не более 33. Требуемую гирлянду с 33 красными лампочками можно получить так: повторим последовательность лампочек «к с к» 16 раз и добавим к ним красную и синюю в указанной последовательности.

2. Ответ: через 8 часов.

По условию задачи, с момента старта и до встречи и пешеход, и велосипедист находились в пути одинаковое время. Следовательно, велосипедист проехал до встречи ровно в два раза большее расстояние, чем прошел пешеход. Таким образом, пешеходу после встречи надо пройти в два раза большее расстояние со скоростью в два раза меньшей, чем у велосипедиста, то есть на окончание пути пешеход затратит в 4 раза больше времени, чем велосипедист.

3. *Указание.* См. решение задачи 3 варианта 81.

4. Ответ: 252, 756.

Поскольку числа 4, 7 и 9 взаимно простые, то любое число, которое делится на каждое из них, будет делиться и на их произведение. Среди трехзначных чисел, которые делятся на $4 \cdot 7 \cdot 9 = 252$, таких три числа: 252, 504 и 756. Среди них только число 504 делится на 8.

5. Ответ: $\sqrt{13}$.

По теореме Пифагора находим $AB = 13$. Точка пересечения биссектрис треугольника является центром вписанной окружности. Обозначим через K, L и M - точки касания вписанной окружности со сторонами AB, BC и AC соответственно. Радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной. Следовательно, $OL \perp BC$, $OM \perp AC$ и четырехугольник $MOLC$ является квадратом. Пусть $MC = LC = OM = r$. Поскольку касательные к окружности, проведенный из одной точки, равны, имеем $AK = AM$, $BK = BL$. Следовательно $AC + BC =$

$= AM + MC + BL + LC = AK + MC + BK + LC = AB + 2 \cdot r$. Откуда находим $r = 2$. Применяя теорему Пифагора к прямоугольному треугольнику AOM, находим AO. Замечание. Радиус вписанной окружности можно найти из формул для вычисления площади треугольника $S = \frac{1}{2}(AB + BC + AC) \cdot r = \frac{1}{2} AC \cdot BC$.

6. Ответ: 5.

Пусть BH и KH_1 высоты треугольников ABC и AKM. Из подобия треугольников AKH_1 и ABH имеем $KH_1 : BH = AK : AB = 1:3$, или $KH_1 = \frac{1}{3} BH$. По условию $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BH = 15$. Тогда $S_{\Delta AKM} = \frac{1}{2} AM \cdot KH_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} AC \cdot \frac{1}{3} BH = \frac{10}{3}$. Аналогично находим $S_{\Delta BKL} = S_{\Delta CLM} = \frac{10}{3}$. Следовательно, $S_{\Delta KLM} = 15 - 3 \cdot \frac{10}{3} = 5$.

Варианты 2009 г.

Вариант 91

1. Ответ: 0; 3.

   ОДЗ уравнения определяется не отрицательностью подкоренного выражением левой части $x^3 - 3x^2 \geq 0$, решением которого является объединение множеств $\{0\} \cup [3, \infty)$. Возводя обе части уравнения в квадрат, после не сложных преобразований получим $x(x-1)(x-3) = 0$, откуда $x = 0, x = 1, x = 3$. Из полученных значений только $x = 0$ и $x = 3$ входят в ОДЗ уравнения. Если ОДЗ не определяется, то верные решения легко отбираются с помощью проверки.

2. Ответ: 45.

Пусть $\overline{ab} = 10a + b$, где a и b – цифры, искомое двузначное число. Согласно условию, имеем систему $\begin{cases}(10a+b)(a+b) = 405\\(10b+a)(a+b) = 486\end{cases}$, откуда следует, что $b > a$. Учитывая это условие, вычтем из второго уравнения первое. После преобразований получим $(a+b)(b-a) = 9$, Согласно замечанию, оба выражения $a+b$ и $b-a$ целые положительные числа и первое больше второго. Поскольку число $9 = 1 \cdot 9$ представляется единственным образом в виде произведения двух положительных целых и не равных чисел, то имеем $b - a = 1,\ a + b = 9$. Последняя система имеет единственное решение $a = 4,\ b = 5$. Можно значение выражения $a+b$ подставить в первое уравнение исходной системы и сразу получить искомое число $\overline{ab} = 10a + b = 45$. Значение выражения $a+b$ легко получить и другим путем. Если сложить оба уравнения исходной системы, то получим $11(a+b)^2 = 891$. Сокращая на 11 и учитывая, что $a+b$ положительно, получим искомое значение.

3. Ответ: 1 : 2.

Пусть прямая BK пересекает сторону AC в точке L, а прямые, проходящие через точки M и N параллельно BL, пересекают AC соответственно в точках M_1 и N_1. Применяя теорему Фалеса к прямым AB и AC, MN и AC, BC и AC, пересеченные параллельными прямыми $MM_1,\ KL,\ NN_1$, получим $AM_1 : M_1L = AM : MB = 1 : 2$, $M_1L : LN_1 = MK : KN = 1 : 1$, $LN_1 : N_1C = BN : NC = 1 : 2$. Если обозначить длину отрезка AM_1 за x, то из полученных отношений имеем: $M_1L = LN_1 = 2x$, а $N_1C = 4x$. Таким образом $AL : LC = 3x : 6x = 1 : 2$.

4. Ответ: 25.

Если взять по 6 карандашей каждого цвета, то получим всего 24 карандаша, среди которых нет 7 карандашей одного цвета. А среди любых 25 карандашей четырех цветов, по принципу Дирихле, всегда найдутся 7 карандашей одного цвета.

5. Ответ: 8; 20.

Положим $\sqrt{n^2-39}=m$. Теперь задачу можно сформулировать следующим образом: при каких натуральных значениях m и n уравнение $\sqrt{n^2-39}=m$ имеет решения. После возведения в квадрат и перегруппировки слагаемых получим $n^2-m^2=39$ или $(n-m)(n+m)=39=1\cdot 39=3\cdot 13$. Таким образом имеем два возможных варианта: $n-m=1,\ n+m=39$ или $n-m=3,\ n+m=13$. Первая система имеет решения $n=20,\ m=19$, а вторая – $n=8,\ m=5$.

Вариант 92

Ответы и указания.

1. Ответ: $x=0;\ \ 4$.
2. Ответ: 54.
3. Ответ: $1:3$ считая от вершины A.
4. Ответ: 29.
5. Ответ: $n=5;19$.

Вступительный экзамен

1. Ответ: $[-1,0)\cup[2,+\infty)$.

ОДЗ неравенства $x\neq 0$. Перенесем все слагаемые в правую часть и после приведения к общему знаменателю и разложения числителя на множители получим равносильное неравенство $\frac{(x+1)(x-2)}{x}\geq 0$. Решая последнее неравенство методом интервалов и учитывая ОДЗ, получаем ответ.

2. Ответ: 64.

Первое решение. Пусть искомое двухзначное число $\overline{ab}$. Тогда $\overline{ab}\cdot a = 384$, $\overline{ab}\cdot b = 256$. Разделив первое уравнение на второе и сократив общие множители, получим $\frac{a}{b}=\frac{3}{2}$. Учитывая, что a и b – цифры, причем не нулевые, то b = 2, 4, 6, соответственно a = 3, 6, 9. Непосредственной подстановкой находим нужную пару.

Второе решение. Так как $256 = 2^8$, то из второго уравнения , $\overline{ab}\cdot b = 256$ следует, что и само число и цифра b являются степенями двойки. Следовательно, b = 2, 4, 8. При этом $\overline{ab}$ = 128, 64, 32. Последняя цифра совпадает только у второго числа.

3. Ответ: 7 : 3 считая от вершины *B*.

Первое решение.(Теорема Фалеса) Проведем через точку *E* прямую параллельную *AF*, и пусть она пересекает сторону *BC* в точке *L*. Пусть длина отрезка *FL* равна *x*. По теореме Фалеса для угла *ACF* имеем $FL : FC = AE : AC$, или $x : 2 = 9 : 14$. Отсюда $x = \frac{9}{7}$. Применяя еще раз теорему Фалеса к углу *LBE* получаем $BK : KE = BF : FL = 3 : \frac{9}{7} = 7 : 3$.

Второе решение. (Подобие треугольников) Проведем через вершину *B* прямую, параллельную основанию *AC*. Обозначим через *D* точку пересечения этой прямой с продолжением отрезка *AF*. Тогда из подобия треугольников *BDF* и *AFC* (подобны по трем углам) находим $BD : AC = BF : FC$, или $BD : 14 = 3 : 2$. Откуда *BD* = 21. Теперь, из подобия треугольников *BKD* и *AKE* находим требуемое отношение $BK : KE = BD : AE = 21 : 9 = 7 : 3$.

4. Ответ: список б).

Список в), решивших только 1 задачу, состоит из тех, кто решил или первую, или вторую задачу. Следовательно список в) длиннее списка г). Далее, список б) состоит из тех, кто решил только одну задачу и тех кто решил обе задачи. Следовательно, список б) длиннее и списка а) и списка в), а, следовательно, и списка г).

5. Ответ: $-\frac{1}{4}$.

   Из условия задачи имеем $a = b + 1$. Подставляя это выражение вместо a в произведение, получим $a \cdot b = (b+1) \cdot b = b^2 + b = b^2 + b + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \left(b + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4}$. При $b = -\frac{1}{2}$ и $a = \frac{1}{2}$ произведение $a \cdot b$ достигает своего наименьшего значения $-\frac{1}{4}$.

Варианты 2010 г.

Вариант 101

1. Ответ: $a = 1; 5$.

   Подставляя в заданное уравнение вместо x значение $\frac{3}{2}$, мы получим квадратичное уравнение $a^2 - 6a + 5 = 0$ относительно параметра. Решения полученного уравнения и являются искомыми значениями. Непосредственной подстановкой найденных значений в данное уравнение можно убедиться, что условие задачи выполняется.

2. Ответ: $2\sqrt{17}$.

   Пусть N – середина основания треугольника AC, а H – основание перпендикуляра, опущенного из точки M на AC. Так как треугольник ABC равнобедренный, то медиана BN, проведенная из вершины треугольника, является одновременно и биссектрисой, и высотой, то есть $BN \perp AC$. Следовательно $MH \parallel BN$, а поскольку M – середина BC, то H – середина отрезка NC. Учитывая, что $AN = NC = 2$, то $NH = HC = 1$. Следовательно $AH = 3$, и из прямоугольного треугольника *AMH* по теореме Пифагора находим $MH = 4$, а значит высота $BN = 8$. Наконец, из прямоугольного треугольника *ABN* находим длину боковой стороны *AB*.

3. Положим $m = 3a - 2b + 8c$, $n = 4a + 9b - c$. Так как *m* делится на 7 и $m + n = 7a + 7b + 7c$ делится на 7, то, по свойству делимости целых чисел, и *n* делится на 7.
4. Ответ: $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$.
5. Ответ: 333.

   Легче подсчитать остальные числа, то есть числа, которые делятся или на 2, или на 3. На 2 делятся 500 чисел – все четные числа. На 3 делится каждое третье число , следовательно таких чисел 333. Но среди них мы подсчитали дважды те числа которые делятся на 2, то есть числа, которые делятся и на 3 и на 2. Поскольку числа 2 и 3 взаимно простые, то все такие числа делятся на $6 = 2 \cdot 3$. Количество таких чисел 166. Следовательно остальных чисел 500 + 333 – 167 = 667, а чисел, которые делятся или на 2, или на 3, равно 1000 – 667 = 333.

Вариант 102
Ответы и указания

1. Ответ: $a = 2; 4$.
2. Ответ: $2\sqrt{17}$.
3. См. решение задания 3 варианта 01.
4. Ответ: $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$.
5. Ответ: 533.

Вариант 103
Ответы и указания

1. Ответ: $a = 2; 5$.

2. Ответ: 4.
3. Пусть $a = x + 2y$, $b = 2x + 3y$. Так как каждое из чисел a и b делится на 7, то, по свойству делимости, для любых целых чисел p и q число $ap + bq$ делится на 7. В частности числа $2b - 3a = x$ и $2a - b = y$ делятся на 7.
4. Ответ: $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$.
5. Ответ: 667. Указание. Числа, которые делятся одновременно и на 4, и на 6, делятся на 12, а не на 24.

Вариант 104

Ответы и указания

1. Ответ: $a = 1; 6$.
2. Ответ: 5.
3. См. решение задания 3 варианта 03.
4. Ответ: $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$.
5. Ответ: 700.

Вступительный экзамен

1. Ответ: $a = (-1 \pm \sqrt{17})/2$.

После подстановки вместо x значение 3/2 и приведения подобных слагаемых получим уравнение $|a^2 + a - 1| = 3$, которое, согласно определению модуля, равносильно совокупности двух уравнений: $a^2 + a - 1 = 3$ $\quad a^2 + a - 1 = -3$. Первое имеет корни $a = (-1 \pm \sqrt{17})/2$, а второе корней не имеет.

2. Ответ: 9/4.

См. решение задачи №5 вступительного экзамена 2009 г.

3. Ответ: 4 числа – 182; 273; 455; 637.

Пусть $n = 91 \cdot k$ – искомое число. По условию $k \neq 1$, и, кроме этого, множитель k должен быть простым числом, так как в противном случае число 91 не будет наибольшим делителем. Далее, заметим, что $91 = 7 \cdot 13$, т.е. $n = 7 \cdot 13 \cdot k$. Если $k > 7$, то множитель $k \cdot 13 > 91 \neq n$. Таким образом, *k* может принимать значения 2, 3, 5 и 7.

4. Ответ: Искомое множество точек расположено между прямыми, проходящие через точки *A* и *B* и перпендикулярные отрезку *AB*, и вне круга, построенного на этом отрезке, как на диаметре.
5. Ответ: 88 шариков.

По условию, на столе присутствуют шарики четырех цветов. Поскольку среди любых 100 шариков находятся шарики всех цветов, то шариков любого цвета не менее 12. Действительно, если бы шариков какого-либо цвета было бы не более 11, то нашлось бы 100 шаров, среди которых этот цвет не присутствовал бы. Наконец, могло оказаться так, что шариков двух цветов будут ровно по 12, а общее число шариков двух оставшихся цветов будет 87.

Варианты 2011 г.

Вариант 111

1. Ответ: $x = -1; 3; 4$.

Приводя к общему знаменателю только левую часть уравнения, получим $\frac{x-4}{(x-1)(x-2)} = \frac{x-4}{5-x}$. Умножая обе части уравнения на общий знаменатель приходим к уравнению $(x-4)(5-x) = (x-4)(x-1)(x-2)$. Значение $x = 4$ является решением этого уравнения. Сокращая обе части уравнения на множитель $x - 4$, после преобразований получаем квадратичное уравнение $x^2 - 2x - 3 = 0$, решениями которого являются значения $x = -1$ и $x = 3$. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что все найденные значения являются решениями исходного уравнения.

2. Ответ: 132; 144.

Поскольку карандаши продаются наборами двух видов, то будем искать, сколько и каких наборов можно будет купить ровно на 150 рублей. Для этого найдем все натуральные решения диофантова уравнения $7n + 12m = 150$, где *n* – число наборов по 6 карандашей, а *m* – число наборов по 12 карандашей, причем $m \leq 12$. Перепишем уравнение в виде $n = 21 - m - \frac{5m-3}{7}$. Так как *n* натуральное, то число $5m - 3$ кратно 7. Числа вида $5m - 3$ оканчиваются цифрами 2 и 7. Среди таких чисел, не превосходящих 60, только числа 7 и 42 кратны 7. В первом случае *m* = 2, *n* = 18, во втором *m* =9, *n* = 6. Следовательно, ровно на 150 рублей можно купить или $6 \cdot 18 + 12 \cdot 2 = 132$ карандаша, или $6 \cdot 6 + 12 \cdot 9 = 144$ карандаша.

3. Ответ: 45 и 54.

Разложим данное произведение на простые множители: 2430 = $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$. Так как делителей равных 3 пять, то в разложении хотя бы одного из исходных чисел содержится не менее трех 3. Это значит, что это число делится на 9. Но тогда и второе число, у которого те же цифры, что и у первого, тоже делится на 9, так как сумма цифр у них одна и та же. Поэтому в разложении второго числа тоже имеются не менее двух троек. Таким образом, в одно из чисел входит две 3, а в другое – три 3. Не сложным перебором распределения 2 и 5 получим единственную пару чисел 45 и 54, удовлетворяющих условию задачи.

4. Ответ: 1 : 10 : 4, считая от вершины *C*.

Пусть сторона квадрата равна 5*a*. Тогда *AM* =2*a*, *MB* = 3*a*, а площадь всего квадрата $25a^2$. Так как площади прямоугольных треугольников *AMD* и *BMC*, равные $5a^2$ и $\frac{15}{2}a^2$, меньше $\frac{25}{3}a^2$, то обе прямые пересекают сторону *CD* и разбивают квадрат на две прямоугольные трапеции *AMKD*, *BMLC* и треугольник KML. У всех трех фигур высота равна стороне квадрата. Имеем

$\frac{2a+KD}{2}5a=\frac{3a+CL}{2}5a=\frac{KL}{2}5a=\frac{25}{3}a^2$. Откуда $KD=\frac{4}{3}a,\ CL=\frac{1}{3}a,\ KL=\frac{10}{3}a$.

5. Ответ: $a = 3$.
   Первое решение. Так как $x > 0$, то из неравенства о среднем арифметическом и среднем геометрическом имеем $\frac{9}{x}+\frac{x}{9}\geq 2$, причем равенство достигается только при $x = 9$. Следовательно, наибольшее значение, которое может принимать a, равно 2.
   Второе решение. Учитывая, что x положительное, после освобождения от знаменателя, получим $x^2-9ax+81\geq 0$. Если дискриминант неравенства $D=81a^2-4\cdot 81\leq 0$, то неравенство выполняется для всех x, в том числе и для положительных. Следовательно при $-2\leq a\leq 2$ исходное неравенство выполняется. Если дискриминант положителен, то решением неравенства являются промежутки числовой оси, лежащие вне корней. Следовательно, чтобы неравенство выполнялось при всех положительных x, больший корень должен быть меньше или равен нулю. Последнее возможно только при отрицательных значениях параметра a. Таким образом наибольшее значение, которое может принимать a равно 2.

Вариант 112
Ответы и указания

1. Ответ: $-4;\ -3;\ 1.$
2. Ответ: 130 и 135.
3. Ответ: 56; 65. Указание. В разложении числа 3640 входит одна 5. Перебор делителей кратных 5.
4. Ответ: 2 : 14 : 5 считая от вершины C.
5. Ответ: $a = 2$.

Вариант 113

1. Ответ: $x = 4$.

2. Ответ: $\frac{114}{247}$. Поскольку сумма числителя и знаменателя исходной дроби равна 361, а после сокращения на общий делитель d она стала равной 6 + 13 = 19, то d = 19.
3. Ответ: 15; 24. Пусть искомое число $\overline{ab} = 10a + b$. Тогда имеем $10a + b = 3 \cdot a \cdot b$. Очевидно, что цифры $a, b \neq 0$. Поделив обе части уравнения на a, получим $10 + \frac{b}{a} = 3b$. Отсюда следует, что b кратно a и $4 \leq b \leq 6$, так как левая часть больше 10 и меньше 20. Если b = 4, то a =2, если b = 5, то a = 1. Если b = 6, то решений нет, так как $3b = 18$, а $\frac{b}{a} \leq 6$.
4. Ответ: прямые *MC* и *MK*, где *K* – середина стороны *AC*. Отношение площадей треугольников с общей высотой равно отношению длин оснований. Так как *MB* : *AB* = 1 : 3, то площадь треугольника *MBC* составляет треть от площади всего треугольника. Далее, площадь треугольника *AMC* составляет две трети от площади всего треугольника, следовательно медиана *MK* делит его на два равновеликих треугольника, площадь каждого из которых составляет по одной трети от площади всего треугольника.
5. Ответ: b = 2.

Вариант 114

1. Ответ: – 4.
2. Ответ: $\frac{133}{228}$.
3. Ответ: 36.
4. Ответ: прямые *MB* и *MK*, где *K* – середина стороны *BC*.
5. Ответ: b = 2.

Варианты 2012 г.

Вариант 121

1. Ответ: 1500.

   Каждая цифра на месте единиц встретится по 10 раз, и на месте десятков по 10 раз, а на месте сотен цифра 6 встретится 100 раз. Таким образом сумма цифр всех чисел от 600 до 699 будет равна $10 \times (1 + 2 + ... + 9) + 10 \times (1 + 2 + ... + 9) + 6 \cdot 100 = 1500$

2. Ответ: $x = 1$.

   Если $x < 0$, то решений нет, так как правая часть неотрицательна для всех x. При $x > 0$ возводим обе части уравнение в квадрат и, после освобождения от знаменателя, получим $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$. Полученное биквадратное уравнение имеет решения $x^2 = -3, 1$. Первое уравнение решений не имеет, а из решений ± 1 второго уравнения, условию положительности удовлетворяет только одно.

3. Ответ: 470; 1941.

   Пусть a и b искомые числа, и пусть числу b случайно был приписан ноль. Согласно условию имеем $a + b = 2411$, $a + 10b = 6641$, откуда, вычитая из второго равенства первое, получаем $9b = 4230$, $b = 470$. Наконец, из первого равенства $a = 1941$.

4. Ответ: 3 : 5, считая от вершины B.

   Пусть отрезок MN пересекает сторону BC в точке K, а ML средняя линия треугольника ABC, параллельная AC. Обозначим через $2b$ длину стороны треугольника AC. Тогда $ML = b$, $BC = 6b = BD$, $BN = BL = 3b$. Из подобия прямоугольных треугольников MKL и BKN получим $BK : KL = BN : ML = 3b : b = 3 : 1$. Таким образом, $BK = \frac{3}{4} 3b$, а $KL = \frac{1}{4} 3b$. Следовательно, $BK : KC = \frac{9b}{4} : \frac{15b}{4} = 3 : 5$.

5. Ответ: $n = 2, 3, 6, 11$.

Выделим в данном выражении целую часть: $\frac{3n+7}{n-1} = 3 + \frac{10}{n-1}$. Таким образом, чтобы данное выражение было целым, необходимо, чтобы дробь в правой части была также целым числом, то есть $n - 1$ является делителем числа 10. Поскольку n натуральное, то $n - 1 \geq 0$. Следовательно, $n - 1 = 1, 2, 5, 10$. Откуда $n = 2, 3, 6, 11$.

Вариант 122

1. Ответ: 1600.
2. Ответ: $x = 1$.
3. Ответ: 460; 1951.
4. Ответ: 5 : 3, считая от вершины B.
5. Ответ: $n = 2, 3, 4, 7$.

Вариант 123

1. Ответ: $x = \pm 3$.
2. Ответ: 35 или 36 рублей.

   Пусть альбом стоит X рублей. Тогда у Володи было $X - 5$ рублей, у Игоря – X -33 рубля и у Руслана – X -35 рублей. Отсюда следует, что альбом стоит не меньше 35 рублей. По условию, $(X - 5) + (X - 33) + (X - 35) < X$, откуда $2X < 73$. Учитывая, что X – целое, получаем $X \leq 36$. Таким образом, $X = 35$ или 36 рублей.
3. Ответ: 21 минута.

   Будем считать, что автобусы двигаются по часовой стрелке, а сами автобусы пронумерованы против движения часовой стрелки. Тогда, от момента, когда седьмой автобус отошел от остановки, до момента, когда он вновь появится на этой остановке, пройдет 7 интервалов по 24 минуты. То есть каждый автобус полный круг делает за 168 минут. Если автобусов станет 8, то полного круга надо разделить на 8 равных интервалов.
4. Ответ: 1 : 2, считая от вершины A.

Первое решение. Пусть O точка пересечения диагоналей квадрата. Тогда легко заметить что четырехугольник $AOBC$ – квадрат. Следовательно, $MB = 2AC$, и если L точка пересечения отрезков AB и MC, то $AL : LB = AC : MB = 1 : 2$.

Второе решение. Пусть D середина гипотенузы AB. Тогда $CD \perp AB$ и равен половине гипотенузы. Если L точка пересечения отрезков AB и MC, то из подобия прямоугольных треугольников AML и CDL получим $AL : LD = AM : CD = 2$. Таким образом, если $DL = x$, то $AL = 2x$, $BD = 3x$, и, следовательно, $AL : LB = 2x : 4x = 1 : 2$.

5. Ответ: 1; 2; 4.

Обозначим искомые цифры a, b и c. Тогда $\overline{abc} + \overline{acb} + \overline{bac} + \overline{bca} + \overline{cab} + \overline{cba} = (a + b + c) \cdot 222 = 1554$

(каждая цифра в каждом разряде встречается дважды). Отсюда $a + b + c = 7$. Так как $1 + 2 + 3 = 6 < 7$, а $1 + 3 + 4 = 8 > 7$, то $a + b + c = 1 + 2 + 4$.

Вариант 124

1. Ответ: $x = \pm 3$.
2. Ответ: 30 или 31 рубль.
3. Ответ: 28 минут.
4. Ответ: 2 : 1, считая от вершины A.
5. Ответ: (1; 2; 5), (1; 3; 4).

Варианты 2013 г.

Вариант 131

1. Ответ: Ира собрала 28 грибов, Саша собрал 26 грибов.

Обозначим через X и Y количество грибов собранных Ирой и Сашей. Тогда из условия имеем $X = 15 + \frac{1}{2}Y$. $Y = 12 + \frac{1}{2}X$. Откуда $2X = 30 + Y = 30 + 12 + \frac{1}{2}X$, или $3X = 84$, и $X = 28$, $Y = 26$.

2. Ответ: $p = 7,\ -7$.

   По теореме Виета для корней $x_1,\ x_2$ квадратичного уравнения имеем $x_1 \cdot x_2 = 12,\ x_1 + x_2 = -p$. Из условия $x_1 - x_2 = 1$ находим $x_1 = x_2 + 1$ и подставляем в первое равенство. Из полученного квадратичного уравнения находим $x_2 = -4$ или 3. Соответственно $x_1 = -3$ или 4. В первом случае $p = 7$, во втором $p = -7$.

3. Ответ: $KM = 12,\ LN = 10$.

   Первое решение. Пусть O – точка пересечения диагоналей KM LN. Так как $KM \parallel BC$, $LN \parallel AB$, то четырехугольник $BKOL$ параллелограмм. Следовательно, $LO = BK$. Аналогично, так как четырехугольник $AKLN$ – параллелограмм, то $AK = NL$. Следовательно, $15 = AB = AK + BK = NL + LO = \frac{3}{2}NL$, откуда $NL = 10$. Аналогично находим $KM = 12$.

   Второе решение. Так как четырехугольники $AKLN$, $NKLM$ и $MKLC$ – параллелограммы, то $KL = AN = NM = MC$. Следовательно, из подобных треугольников NCL и ACB имеем $NL : AB = NC : AC = 2 : 3$, откуда $NL = \frac{2}{3}AB$.

4. Ответ: $(-\infty; 2) \cup (5;\ +\infty)$.

5. Ответ: 2010 чисел равны -1 и три числа равны 1.

   Так как сумма квадратов любых 11 чисел равна 11, то квадраты всех чисел, во-первых, должны быть «взаимно – заменяемыми», то есть равными друг другу, а, во вторых, равными 1. Следовательно, среди написанных чисел присутствуют только числа 1 и -1. Поскольку сумма любых 13 чисел не положительна, то единичек среди них может быть не более 6, а сумма всех чисел может принимать значения от -2013, когда нет положительных чисел, до -2001, когда имеется 6 единиц. Среди них лишь одно число делится на 9. Это 2007. Следовательно среди написанных чисел ровно 3 единицы.

Вариант 132.

1. Ответ: Ира собрала 34 гриба, Саша – 32 гриба.
2. Ответ: $k = \pm 5$.
3. Ответ: $AC = 6,\ BD = 8$.
4. Ответ: $(-\infty; 1) \cup \left(\frac{3}{2};\ +\infty\right)$.
5. Ответ: 2010 чисел равны -1 и три числа равны 1.

Вариант 133.

1. Ответ: Ира собрала 28 грибов, Саша – 26 грибов.
2. Ответ: $p = \pm 7$.
3. Ответ: $KM = 10,\ LN = 12$.
4. Ответ: $(-1; 2)$.
5. Ответ: 2008 чисел равны -1 и пять чисел равны 1.

Вариант 134.

1. Ответ: Ира собрала 34 гриба, Саша – 32 гриба.
2. Ответ: $k = \pm 5$.
3. Ответ: $AC = 8,\ BD = 6$.
4. Ответ: $(-2; 1)$.
5. Ответ: 2008 чисел равны -1 и пять чисел равны 1.

Вариант 135.

1. Ответ: через 37,5 минут.
2. Ответ: $0 < k < 4$.

3. Ответ: 1 : 1.
4. Ответ: $(-2;0) \cup (2;\ +\infty)$.
5. Ответ: 104.

Вариант 136.

1. Ответ: через 52,5 минут.
2. Ответ: $0 < k < 4$.
3. Ответ: 1 : 1.
4. Ответ: $(-2;0) \cup (2;\ +\infty)$.
5. Ответ: 151.

Варианты 2014 г.

Вариант 141.

1. Ответ: 7.
2. Ответ: $f(9) = 4$.

Первое решение. Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$. Тогда $49a - 7b + c = 4,\ 9a - 3b + c = 1,\ 25a + 5b + c = 1$. Вычитая из третьего равенства второе, после сокращения на общий множитель получим $b = -2a$. Подставляя найденное значение b во второе равенство, находим $c = 1 - 15a$. Наконец, подставляя найденные выражения b и c в первое равенство, находим $a = \frac{1}{16},\ b = -\frac{1}{8},\ c = \frac{1}{16}$. Следовательно, $f(x) = \left(\frac{x-1}{4}\right)^2$. Откуда $f(9) = \left(\frac{9-1}{4}\right)^2 = 4$.

Второе решение. При тех же условиях, что и в первом решении, после вычитания из третьего уравнения второго, получим $16a + 8b = 0$, или после умножения обеих частей равенства на 2: $32a + 16b = 0$. Складывая полученное равенство с первым в предыдущем решении, получим $81a + 9b + c = 4$, но $81a + 9b + c = f(9)$.

Третье решение. График квадратичной функции – парабола – симметричен относительно прямой, проходящей через ее вершину, то есть в точках, симметричных относительно абсциссы вершины параболы функция принимает равные значения. Так как в точках -3 и 5 квадратичная функция принимает равные значения, то абсцисса вершины параболы равна 1. Но тогда, точка $x = 9$ симметрична точке $x = -7$ и $f(9) = f(7) = 4$.

3. Ответ: $3\sqrt{34}$.

   В прямоугольных треугольниках ABD и ACD катет *AD* общий, а гипотенуза *AB* = 7 одного треугольника больше гипотенузы *AC* = 5 другого треугольника. Тогда, по теореме Пифагора, второй катет *BD* первого треугольника больше второго катета *CD* другого треугольника. Это значит, что если *CD* = *x*, то *BD* = 2*x*. По теореме Пифагора из треугольников ABD и ACD имеем $AD^2 = 49 = 4x^2 = 25 - x^2$. Откуда $x = 2\sqrt{2}$, а $AD = \sqrt{25-8} = \sqrt{17}$. Таким образом $S_{ABC} = \frac{BC \cdot AD}{2} = \frac{6\sqrt{2}\cdot\sqrt{17}}{2} = 3\sqrt{34}$.

4. Ответ: (2, 3).

   $|5-2x| < 1 \Leftrightarrow -1 < 5-2x < 1 \Leftrightarrow 4 < 2x < 6 \Leftrightarrow 2 < x < 3$.

5. Ответ: через $\frac{540}{11}$ минут.

   Предположим, что минутная стрелка догонит часовую через *x* минут. Тогда часовая стрелка за это время пройдет $\frac{x}{12}$ делений циферблата. Поскольку стрелки должны совпадать, то имеем $45 + \frac{x}{12} = x$. Откуда $x = \frac{540}{11}$.

Вариант 142.

1. Ответ: 1.
2. Ответ: $f(10) = 5$.

3. Ответ: $12\sqrt{5}$.
4. Ответ: (3, 4).
5. Ответ: через $\frac{240}{11}$ минут.

Вариант 143.

1. Ответ: 0.
   Имеем
   $\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-c)(b-a)}=\frac{(b-c)-(a-c)}{(a-b)(a-c)(b-c)}=\frac{-(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}=$
   $\frac{-1}{(c-a)(c-b)}$
   . Таким образом, сумма двух первых слагаемых равна третьему с обратным знаком.
2. Ответ: $-2\sqrt{17}$.
3. Ответ: 6 : 5.
4. Ответ: $\left(-\infty;\ \frac{3}{2}\right)$.
5. Ответ: 130^0.

Вариант 144.

1. Ответ: 0.
2. Ответ: $-2\sqrt{13}$.
3. Ответ: 3 : 8.
4. Ответ: $\left(-\infty;\ \frac{5}{2}\right)$.
5. Ответ: : 140^0.

Вариант 145.

1. Ответ: $-\frac{y+3}{5}$.

2. Ответ: $k = \pm 28$.

   Функция $y = x^2 + kx + 196$ имеет с осью Ox ровно одну общую точку, тогда и только тогда, когда уравнение $x^2 + kx + 196 = 0$ имеет ровно одно решение. Последнее выполняется когда дискриминант квадратного уравнения равен 0.
3. Ответ: $S = 16\sqrt{3}$.
4. Ответ: $(-\infty; 1) \cup \left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$.
5. Ответ: $m = -1,\ n = \frac{1}{2}$.

Вариант 146.

1. Ответ: $-\frac{x+2}{5}$.
2. Ответ: $k = \pm 26$.
3. Ответ: $S = 20\sqrt{3}$.
4. Ответ: $(-\infty; 2) \cup \left[\frac{7}{2}, +\infty\right)$.
5. Ответ: a$= -1,\ b = \frac{1}{2}$.

Вариант 147.

1. Ответ: $\frac{4}{5}$.
2. Ответ: $a = -2,\ a = 6$.
3. Ответ: 3 : 1, считая от вершины *A*.

   Пусть *D* – середина стороны *AB*, а прямая, проходящая через *D* пересекает сторону *AC* в точке *M*. Так как площадь треугольника *ADM* меньше половины площади всего треугольника, то площадь треугольника *ADM* относится к площади четырехугольника *BDMC* как 3 : 5. Следовательно, площадь треугольника *ADM* относится к площади треугольника *ABC* как 3 : 8. Отсюда $8 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{AB}{2} \cdot AM \cdot sin\angle A = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot sin\angle A$, откуда $AM = \frac{3}{4}AC$.

4. Ответ: $(-1,0)$.
5. Ответ: $ab + cd > ac + bd$. Рассмотрим разность $ab + cd - (ac + bd) = a(b - c) - d(b - c) = (b - c)(a - d) > 0$, так как $b - c < 0$, и $a - d < 0$.

Вариант 148.

1. Ответ: $\frac{1}{3}$.
2. Ответ: $a = -7,\ a = 1$.
3. Ответ: 1 : 3, считая от вершины A.
4. Ответ: $(0,\ 1)$.
5. Ответ: $ad + bc < ac + bd$.

Учебное издание

**Варианты заданий по математике физико-математических тур-
ниров**

Составитель

Ню Владимиир
(nyu@uriit.ru)

Сайт лицея: ugrafmsh.ru

Югорский физико-математический лицей
г. Ханты-Мансийск, ул. Мира, 151