Югорский физико-математический лицей

В.П. Чуваков

Задача С6

(Теория чисел на ЕГЭ)

Учебно-методическое пособие

Ханты-Мансийск
2012

В.П. Чуваков

Задача С6 (Теория чисел на ЕГЭ): Учебно-методическое пособие, - Ханты-Мансийск, Югорский физико-математический лицей, 38 с.

В сборнике задач собраны задачи по теории чисел различной степени сложности, которые часто встречаются на предметных и вузовских олимпиадах по математике, ЕГЭ (задача С6). Для решения большинства задач необходимо иметь первичные сведения, выходящие за пределы обычной школьной программы (свойства делимости, признаки делимости, сведения о простых числах, десятичное представление натуральных чисел, некоторые формулы и факты из теории чисел, свойства НОД и НОК, математическую индукцию). К задачам приведены ответы и комментарии к решениям.

Пособие предназначено для углубленного изучения математики, подготовки к предметным олимпиадам и ЕГЭ.

Адресовано школьникам старших классов и преподавателям.

Задачи

1. Найдите все пары взаимно простых натуральных чисел a и b таких что, если к десятичной записи числа a приписать справа через запятую десятичную запись числа b, то получится десятичная запись числа $\frac{b}{a}$.

2. Найдите хотя бы три десятичных числа, делящихся на 11, в записи которых используются все цифры от 0 до 9?

3. Найдите все натуральные числа, которые делятся на 42 и имеют ровно 42 различных натуральных делителя (включая 1 и само число).

4. Найдите все натуральные числа, последняя цифра которых равна 0 и которые имеют ровно 15 различных натуральных делителей (включая 1 и само число).

5. Найдите все натуральные числа, которые делятся на 30 и имеют ровно 99 различных натуральных делителя (включая 1 и само число).

6. Найдите все натуральные числа, которые делятся на 5600 и имеют ровно 105 различных натуральных делителя (включая 1 и само число).

7. Натуральное число n имеет ровно 6 натуральных делителей (включая 1 и само число), сумма которых равна 3500. Найдите n.

8. Натуральное число n имеет ровно 9 натуральных делителей (включая 1 и само число), сумма которых равна 1767. Найдите n.

9. Решите в натуральных числах уравнение $1+2!+3!...+n!=k^2$.

10. Решите в натуральных числах уравнение $13+5n+n!=k^2$.

11. Найдите все натуральные числа, являющиеся степенью двойки, такие, что после зачеркивания первой цифры их десятичной записи снова получается число, являющееся степенью двойки.

12. Решите в натуральных числах уравнение $x!+y!=(x+y)!$.

13. Найдите все пары пятизначных чисел (x, y) такие, что число $\overline{xy}$, полученное приписыванием десятичной записи числа y после десятичной записи числа x, делится на xy.

14. Решите в натуральных числах уравнение $2xy=x^2+2y$.

15. Решите в целых числах уравнение $m^4-2n^2=1$.

16. Произведение нескольких различных простых чисел делится на каждое из этих чисел, уменьшинное на 1. Чему может быть равно это произведение?

17. Натуральные числа m и n таковы, что m^3+n и $m+m^3$ делится на m^2+n^2. Найдите m и n.

18. При каком наименьшем натуральном n число $2009!$ не делится на n^n?

19. Найдите наибольшее натуральное n, для которого каждое из чисел k^k при $k=1,2,\ldots n$ является делителем числа $2013!$.

20. Найдите наибольшее натуральное число n, для которого число $2009!$ делится на каждое из чисел k^k при $k=1,2,3\ldots n$.

21. Решите в целых числах уравнение $1+2^x=y^2$.

22. Решите в целых числах уравнение $\sqrt{x-\dfrac{1}{5}}+\sqrt{y-\dfrac{1}{5}}=\sqrt{5}.$

23. Найдите наибольший общий делитель всех чисел вида $p^2-1,$ где $p-$простое число, большее $3,$ но меньшее $2010.$

24. Решите в целых числах уравнение $3^n+8=x^2.$

25. Решите в целых числах уравнение $2^n+2^{2n}+2^{3n}+\ldots+2^{k\cdot n}=2006.$

26. Решите в целых числах уравнение $3^n+3^{2n}+3^{3n}+\ldots+3^{k\cdot n}=2007.$

27. Найдите пятизначное число, произведение которого с числом 9 есть пятизначное число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке.

28. Найдите наименьшее натуральное число, первая цифра которого $1,$ а ее перестановка в конец числа приводит к увеличению числа в три раза.

29. Одно из двух двузначных натуральных чисел в два раза больше другого. Найдите все пары таких чисел, если цифры меньшего из них равны сумме и разности цифр большего.

30. Найдите все пары натуральных чисел, наименьшее общее кратное которых $78,$ а наибольший общий делитель равен $13.$

31. Решите в натуральных числах уравнение $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1.$

32. Найдите шестизначное число, которое уменьшается в 6 раз, если три его первые цифры, не меняя порядка, переставить в конец числа.

33. Найдите все натуральные числа, первая цифра которых $6,$ а при зачеркивании этой цифры число уменьшаются в 25 раз.

34. Решите в натуральных числах уравнение $xy = 13(x+y)$.

35. Решите в натуральных числах уравнение $xy = 17(x+y)$.

36. Решите в натуральных числах уравнение $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{25}$, где $m > n$.

37. Решите в целых числах уравнение $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{9}$ $(x > y)$.

38. Найдите все пары двузначных чисел (x, y) такие, что x простое меньше 20, а число $\overline{xy} + \overline{yx}$ является полным квадратом.

39. Все правильные несократимые дроби с двузначными числами в числителе и знаменателе упорядочили по возрастанию. Между какими двумя последовательными дробями оказалось число $\frac{5}{8}$?

40. Среди обыкновенных дробей с положительными знаменателями, расположенными между числами $^{96}\!/_{35}$ и 97/36 найдите такую, знаменатель которой минимален.

41. Решите в простых числах уравнение $p^6 - q^2 = 0{,}5(p-q)^2$.

42. Решите в целых числах уравнение $x! + y! = 10z + 13$.

43. Решите в целых числах уравнение $x! + y! = 10z + 17$.

44. Решите в натуральных числах уравнение $n! + 4n - 9 = k^2$.

45. Решите в натуральных числах уравнение $12n! + 11^n + 2 = k^2$.

46. Множество A состоит их n натуральных чисел $(n > 7)$. Наименьшее общее кратное всех чисел равно 210, а $НОД$ любых двух чисел из A больше единицы. Найдите эти числа, если произведение всех чисел из A делится на 1920 и не является квадратом никакого натурального числа.

47. Найдите две последние цифры числа 11^{10}.

48. Найдите последнюю цифру числа 2^{3^4}.

49. Найдите две последние цифры числа 2^{999}.

50. Докажите, что число $\underbrace{11....1}_{2n}-\underbrace{22...2}_{n}$ является полным квадратом.

51. Докажите, что число $\underbrace{11...1}_{100}\underbrace{55...56}_{100}$ является полным квадратом.

52. Докажите, что число $(10^n+10^{n-1}+...+10)(10^{n+1}+5)+1$ является полным квадратом.

53. Найдите все натуральные n, при которых дробь $\dfrac{7n^2+11n+4}{6n^2+5n}$ сократима.

54. Найдите произведение двух трехзначных чисел, если оно втрое меньше шестизначного числа, полученного приписыванием одного из этих двух чисел вслед за другим.

55. Решите в натуральных числах уравнение $k!=5\cdot m!+12\cdot n!$.

56. Решите в натуральных числах уравнение $k!=2\cdot m!-7\cdot n!$.

57. Найдите все пары натуральных чисел a и b, удовлетворяющие равенству $a^b+127=\overline{ab}$.

58. Найдите все пары натуральных чисел a и b, удовлетворяющие равенству $a^b+320=\overline{ab9}$.

59. Найдите все пары натуральных чисел a и b, такие, что если к десятичной записи полученного числа a^2 приписать справа десятичную запись числа b, то получится число, большее произведения $a \cdot b$ в три раза.

60. Найдите все пары натуральных чисел a и b, такие, что если к десятичной записи числа a приписать справа десятичную запись числа b^2, то получится число, большее произведения $a \cdot b$ ровно в семь раз.

61. Решите в натуральных числах уравнение $3^m + 7 = 2^n$.

62. Решите в натуральных числах уравнение $3 \cdot 2^m + 1 = n^2$.

63.Решите в натуральных числах уравнение $[n \cdot \lg 2] + [n \cdot \lg 5] = 2010$, где $[x]$– целая часть числа x.

64. Решите в натуральных числах уравнение $y^2 = 16 + z^x$, где z – простое число.

65. Найдите наибольшую сумму значений параметров a и b, если известно, что числа $a, a \cdot b, \overline{ab} + 2b^2 - b - 20, \overline{ba} + 2b^3 - 10b - 2$ образуют геометрическую прогрессию, причем $\overline{ab} + \overline{ba}$ – квадрат натурального числа.

66. Найдите наименьшую сумму значений параметров a и b, если известно, что числа $2a + 2,\ 3b - 3,\ \overline{ab} + 2b^2 - 7 - 2a,\ \overline{ba} + 2 + 5a - 6b$ образуют арифметическую прогрессию, причем $\overline{ab} - \overline{ba}$ – квадрат натурального числа и $a \neq 0$.

67. Найдите наименьшую сумму значений параметров a и b, если известно, что числа $b,\ ab,\ \overline{ba}+a^2-a-20,\ \overline{ab}-2$ образуют геометрической прогрессию, причем $b>0$.

68. Найдите сумму квадратов всех значений параметров a и b, если известно, что числа $2a,\ 3b,\ \overline{ab}-2a,\ \overline{ba}+5a-6b$ образуют арифметическую прогрессию, причем $\overline{ab}-\overline{ba}$ – квадрат натурального числа.

69. Найдите наибольшее натуральное число, из которого вычеркиванием цифр нельзя получить число, делящееся на 11.

70. Решите в натуральных числах уравнение $n^5+n^4=7^m-1$

71. Докажите, что $\underbrace{33\ldots3}_{n}{}^2=\underbrace{11\ldots1}_{n}0\underbrace{88\ldots89}_{n}$

72. Докажите, что $\underbrace{33\ldots34}_{n}{}^2=\underbrace{11\ldots1}_{n+1}\underbrace{55\ldots56}_{n}$

73. Докажите, что числа $10017, 100117, 1001117, \ldots$ делятся на 53.

74. Докажите, что число $\underbrace{11\ldots1}_{n}2\underbrace{11\ldots1}_{n}$ - составное.

75. Докажите, что число $\sqrt{\underbrace{44\ldots4}_{1980}-11\cdot\underbrace{44\ldots4}_{990}+9}$ – целое.

76. Докажите, что если в числе 12008 между нулями вставить любое количество троек, то получится число, делящееся на 19.

77. Известно, что числа $\overline{ab71}$ и $\overline{b71a}$ делятся на простое трехзначное число p. Найдите числа p, a, b.

78. Решите в целых числах уравнение $m^4-2n^2=1$.

79. Решите в целых числах уравнение $3^m+4^n=5^k$.

80. Решите в целых числах уравнение $m \cdot n^2 = 10^5 \cdot n + m.$

81. Решите в целых числах уравнение $1 + 2^k + 2^{2k+1} = n^2.$

82. Найдите все тройки натуральных чисел, удовлетворяющих условию $5 \cdot k! = m! - n!.$

83. Найдите все тройки натуральных чисел, удовлетворяющих условию $k! = 3 \cdot m! + 6 \cdot n!.$

84. Решите в натуральных числах уравнение $n! + k! + m! = p!.$

85. Найдите все натуральные числа $n,$ при которых выражение $n^2 + 5n + 16$ делится на $169.$

86. Докажите, что для всех натуральных n выражение $n^2 + 3n + 5$ не делится на $121.$

87. Найдите все натуральные числа, меньшие 10^5, которые делятся на 1999 и у которых сумма цифр равна $25.$

88. Решите в натуральных числах уравнение $2^m - 3^n = 1.$

89. Решите в натуральных числах уравнение $3^n - 2^m = 1.$

90. При каких натуральных n существует рациональное число $x,$ удовлетворяющее равенству $n^2 + 1 = (2n - 1)^x$?

91. На числовой прямой отмечены точки с целыми координатами. Разрешается прыгать на 1 или 4 точки вправо или влево. Можно ли за 2010 прыжков попасть из точки 1 в точку 2, ни разу не попадая в точку с координатами, кратными 4.

83. При каком наибольшем n найдется n семизначных чисел, являющихся последовательными членами геометрической прогрессии?

Ответы:

1. $a=2, b=5.$	21. $(3;3),(3;-3).$
2. $9576843210, 9873546210,$ $9876513240.$	22. $(1;2),(2;1).$
3. $2^1 3^2 7^6$, $3^1 2^2 7^6$, $2^1 7^2 3^6$, $3^1 7^2 2^6$, $7^1 3^2 2^6$, $7^1 2^2 3^6$.	23. $24.$
4. $2500, 400.$	24. $n=0, x=\pm 3.$
5. $2^2 3^2 5^{10}$, $2^2 3^{10} 5^2$, $2^{10} 3^2 5^2$.	25. $n=0, k=2006.$
6. $2^6 5^4 7^2$, $2^6 5^2 7^4$.	26. $n=0, k=2007$
7. $1996.$	27. $10989.$
8. $1225.$	28. $142857.$
9. $n=k=3.$	29. $34, 17.$
10. $n=2, k=5.$	30. $(13, 78);(26, 39).$
11. $32, 64.$	31. $(3,3,3);(2,4,4);(2,3,6).$
12. $x=1, y=1.$	32. 857142
15. $x=16667, y=33334.$	33. $n=625\cdot 10^{k-2}.$
14. $x=4, y=8.$	34. $(182;14)$, $(26;26).$
15. $n=0, m=\pm 1.$	35. $(306;18)$, $(34;34).$
16. $6, 42, 1806.$	36. $m=150, n=30, m=650, n=26.$
17. $m=n=1.$	37. $(32;12)$, $(90;10)$, $(8;-72)$, $(6;-18),(-72;8),(-18;6).$
18. $47.$	38. $11, 90, 13, 88, 17, 84, 19, 82$
19. $46.$	39. $\frac{58}{93}<\frac{5}{8}<\frac{62}{99}.$
20. $46.$	40. $\frac{19}{7}.$

41. $(3,23)$.	59. $a=1, b=5\cdot 10^{k-1}$; $a=2, b=8\cdot 10^{k-1}$.
42. $x=1, y=2, z=-1$; $x=2, y=1, z=-1$.	60. $a=1, b=2$.
43. $x=1, y=3, z=-1; x=3,$ $y=1, \quad z=-1$.	61. $n=4, m=2.$ 2. 2.
44. $n=2, k=1;\ n=3, k=3$.	62. 85.
45. $n=1, k=5$.	63. 2011.
46. $2, 6, 10, 14, 30, 42, 70, 210$.	64. $(7;12;2),\ (2;\ 5;3)$.
47. 01.	65. 11.
48. 2.	67. 987654321
49. 88.	68. $n=2,\ m=2$.
50. $(\underbrace{33...3}_{n})^2$.	69. 987654321
51. $(\underbrace{33...3}_{99}4)^2$.	70. $n=m=2$
52. $(\underbrace{33...3}_{n}4)^2$.	77. $p=101, a=7, b=1$.
53. $n=2p;\ n=11p+1$.	78. $a=7, b=1$.
54. 55778.	79. $m=n=k=2$.
55. $k=17, n=m=16$; $n=5, k=7, m=6$.	80. $n=3, \quad m=37500;\ n=9, m=11250$.
56. $k=n=3, m=4;\ k=m=7, n=6$.	81. $k=0,\ n=\pm 2;\ k=4,\ n=\pm 23$.
57. $a=1, b=28; a=14, b=1$.	82. $m=3, k=n=1;\ m=6, k=n=5$.
58. $a=3, b=2; a=97, b=2$.	83. $m=3, k=4, n=1;\ m=8, k=9, n=8$.
	84. $n=k=m=2,\ p=3$.
	85. Таких чисел нет.
	87. $n=k=m=2,\ p=3$.
	88. $n=1, m=2$.

89. $n=1, m=12;\ n=2, m=3.$ 90. $n=5.$ 91. Нельзя	67. $n=5, m=3;\ n=7, m=4.$

Комментарии

1. Пусть b $n-$значное число. Тогда $\dfrac{b}{a}=a+\dfrac{b}{10^n}$ и $10^n(b-a^2)=ab.$

Далее, $(a,b)=1 \Rightarrow (b-a^2, ab)=1 \Rightarrow$

$b-a^2=1, ab=10^n \Rightarrow a=2^n, b=5^n \Rightarrow a=2, b=5.$

2. Рассмотрим число $N=9876543210$ содержащее все цифры, но не делящееся на 11. У него сумма четных цифр равна 25, а сумма нечетных -20. Чтобы это число делилось на 11, надо переставить местами нечетную цифру p и четную цифру q так, чтобы $25-p+q-(20-q+p)=11$. Т.е. $q-p=3$. Это варианты $8-5, 6-3, 4-1$ и числа $9576843210, 9873546210, 9876513240$ Можно начинать, например, с числа $N=1234567890$

3. Если a делится на $42=2\cdot3\cdot7$, то $a=2^x\cdot3^y\cdot7^z\cdot p$, а число делителей a равно $N(a)=(1+x)(1+y)(1+z)(1+t)=42=2\cdot3\cdot7$. Но число 42 имеет только три множителя, поэтому $p=1$, а степени простых сомножителей равны одному из чисел $2,3,7$. Возможны 6 вариантов: $(1+x,\ 1+y,\ 1+z)-$ перестановка трех чисел $(2,3,7)$.

4. Решение аналогично предыдущему: a делится на $10=2\cdot 5 \Rightarrow$ $a=2^x\cdot 5^y\cdot p,$ $N(a)=(1+x)(1+y)(1+t)=15=5\cdot 3.$ Число 15 имеет только два множителя, поэтому $p=1,$ а степени простых сомножителей равны одному из чисел $5,3.$ Возможны 2 варианта: $a=2^2\cdot 5^4=2500, a=2^4\cdot 5^2=400.$

7. Пусть $n=p_1^x p_2^y p_3^z\ldots,$ тогда число делителей числа n равно $N(n)=(1+x)(1+y)(1+z)\ldots=6=2\cdot 3.$ Значит n имеет всего 2 простых делителя, степени 1 и 2. Сумма всех делителей числа n равна $(1+p_1)(1+p_2+p_2^2)=3500=4\cdot 5\cdot 25\cdot 7.$ Так как p_1, p_2- простые, то $p_1\neq 2,$ p_1+1-четное, а $1+p_2+p_2^2-$нечетное. Возможны варианты: $(1+p_1)(1+p_2+p_2^2)=500\cdot 7=100\cdot 35=20\cdot 175=28\cdot 125=140\cdot 25=700\cdot 5.$ В первом случае $1+p_1=500, 1+p_2+p_2^2=7\Rightarrow p_1=499, p_2=2,$ а в остальных случаях простых чисел с такими условиями не существует.

9. Докажем, что $n<5.$ Если $n\geq 5,$ то левая часть равенства $1+2!+3!\ldots+n!\equiv 1+2!+3!+4!(\mathrm{mod}5)\equiv 3(\mathrm{mod}5),$ а при делении на 5 правой части равенства (квадрата натурального числа) в остатке будет только $0,1,4.$ Осталось проверить числа $n=1,2,3,4.$

10. Докажем, что $n<5.$ Если $n\geq 5,$ то левая часть равенства $13+5n+n!\equiv 3(\mathrm{mod}5),$ а при делении на 5 правой части равенства (квадрата натурального числа) в остатке может получиться только $0,1,4.$ Проверяем числа $n=1,2,3,4.$

11. Пусть $2^n = a\cdot 10^k + 2^m$. Если $k=1$, то $2^n = a\cdot 10 + 2^m$. Это два числа: $2^5 = 30+2$; $2^6 = 64 = 60 + 2^2$. Если $k=2$, то трехзначные степени двойки – это числа $128, 256, 512$, которые не являются числами требуемого вида. Если $k=3$, то четырехзначные степени двойки – это числа $1024, 2048, 4096, 8192$, которые опять не являются числами заданного вида. И так далее…

Приведем строгое доказательство. Для чисел такого вида должно выполняться равенство $2^m(2^n-1) = p\cdot 10^k$, где $k-$количество знаков в десятичной записи степени двойки после зачеркивания первой цифры p. Число 2^n-1 делится на 5 только при $n=4k$ $(2^{4k}-1 = 16^k-1 = (15+1)^k-1)$.

Если $k=1$, то $p=2$, $p=6$, числа 32 и 64. Если $k>1$, то $2^{4k}-1 = (2^{2k}-1)(2^{2k}+1)$. Числа $2^{2k}-1$, $2^{2k}+1$ не делятся на 2, оба одновременно, не могут делиться на 5 и оба больше 15. Но тогда равенство $2^m(2^{2k}-1)(2^{2k}+1) = p\cdot 10^k$ невозможно!

12. Если $x<y$, то правая часть исходного равенства делится на $x+1$, а левая – нет: $x!(1+(x+1)(x+2)\ldots.y) = x!\,(x+1)(x+2)\ldots.(x+y)$.

Значит $x=y \Rightarrow 2\cdot x! = (2x)! \Rightarrow 2 = (x+1)(x+2)\cdots(2x) \Rightarrow x+1=2$.

Почему других нет?

13. $N = x\cdot 10^5 + y = (xy)\cdot p \Rightarrow$ y делится на $x \Rightarrow y = x\cdot n$.

$x\cdot 10^5 + x\cdot n = (x\cdot xn)\cdot p \Rightarrow 10^5 + n = x\cdot n\cdot p \Rightarrow$ n делит 10^5. Так как все числа пятизначные, то $n-$цифра и $n = 2, 4, 5, 8$.

Если $n=2$, то $10^5+2=100002=2\cdot 50001=2\cdot 3\cdot 16667=2\cdot x\cdot p$. Так как все числа пятизначные, то возможен только один вариант: $x=16667, y=2x=33334$.

Если $n=4$, то $10^5+4=100004=4\cdot 25001=x\cdot 2\cdot p$. Так как числа пятизначные, то вариантов нет. Аналогично разбираются случаи $n=5,\ 8$.

14. Обыграем четность чисел:

$$2xy = x^2+2y \Rightarrow x=2p \Rightarrow 2py = 2p^2+y \Rightarrow y=2k.$$

$$2pk=p^2+k \Rightarrow k=pt \Rightarrow pt=p+t \Rightarrow t=pn \Rightarrow pn=1+n \Rightarrow n=1, p=2.$$

15. $m^4-2n^2=1 \Rightarrow 2n^2=m^4-1 \Rightarrow n-$ четное, а $m-$ нечетное. $m^4+n^4=n^4+2n^2+1=(n^2+1)^2 \Rightarrow n^4=(n^2+1-m^2)(n^2+1+m^2)$. Если $1-m^2<0$, то $n^2+1-m^2<n^2$ и n^2+1+m^2 делится на n^2, а, следовательно, $1+m^2$ должно делиться на 4, что невозможно. Следовательно, $1-m^2=0 \Rightarrow m=\pm 1, \Rightarrow n=0$.

16. Пусть $N=p_1\cdot p_2\cdot\ldots p_n \div (p_1-1),(p_2-1),(p_3-1),\ldots,(p_n-1)$, где $p_1<p_2<p_3<..<p_n-$простые числа, причем, $p_1-1=1$, а $(p_2-1),(p_3-1),\ldots,(p_n-1)$ $-$четные числа. Значит $p_1=2,\ p_2-1=2, p_3-1=6, p_4=42 \Rightarrow N=2\cdot 3\cdot 7\cdot 43\cdot p_5\ldots=1\cdot 2\cdot 6\cdot 42.(p_5-1)$. p_5-простое число, p_5-1- четное и может быть равно одному из чисел: $43\cdot 2, 43\cdot 3\cdot 2, 43\cdot 7\cdot 2, 43\cdot 21\cdot 2$. Однако во всех этих случаях p_5 не является простым числом.

17. Так как $m, n-$ натуральные числа, то $m^2 > m,\ n^2 > n.$ Если $m \leq n,$ то $n-m=(m^2+n^2)(p-q),$ однако число слева меньше $n,$ а число справа больше $n.$ Значит $n-m=0.$ Далее, $n^3+n=2n^2 \cdot p \Rightarrow n^2+1=2np \Rightarrow n=1.$

18. Число n^n делит $2009!=1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2009,$ если в этом произведении встречаются числа $n, 2n, 3n, 4n, \ldots, n \cdot n.$ Так как $45 \cdot 45 = 2025,$ то при любом $n<45$ число n^n будет делить $2009!.$ Пусть $n=45.$ Тогда $45 \cdot 44 = 1980,$ поэтому 45^{44} делит $2009!.$ Но $45=5 \cdot 9,$ поэтому 45^{45} тоже делит $2009!.$ Пусть $n=46, 46 \cdot 43 = 1978,$ поэтому 46^{43} делит $2009!.$ Но $46=2 \cdot 23-$ составное, поэтому 46^{46} тоже делит $2009!.$ Пусть $n=47-$ простое число и $47 \cdot 42 = 1974,$ поэтому 47^{42} делит $2009!,$ а 47^{47} уже не делит $2009!.$

19. Доказательство аналогично предыдущему. Пусть $n=45.$ Тогда $45 \cdot 44 = 1980,$ поэтому 45^{44} делит $2013!.$ Но $45=5 \cdot 9,$ поэтому 45^{45} тоже делит $2013!.$ Пусть $n=46, 46 \cdot 43 = 1978,$ поэтому 46^{43} делит $2013!.$ Но $46=2 \cdot 23-$ составное, поэтому 46^{46} тоже делит $2013!.$ Пусть $n=47-$ простое число и $47 \cdot 42 = 1974,$ поэтому 47^{42} делит $2013!,$ а 47^{47} уже не делит $2013!.$

21. $2^x = y^2 - 1 = (y-1)(y+1) \Rightarrow$ числа $y-1, y+1$ степени 2, т.е. $y-1 = 2^p, y+1 = 2^p + 2 \Rightarrow 2^x = 2^p(2^p + 2).$ Если $p \geq 2,$ то $2^{x-1} = 2^p(2^{p-1}+1) \Rightarrow 2^{p-1} = 1 \Rightarrow p-1 = 0 \Rightarrow p = 1 \Rightarrow 2^x = 8.$

22. $\sqrt{5x-1} + \sqrt{5y-1} = 5 \Rightarrow \sqrt{5x-1} \leq 5 \Rightarrow x \leq \dfrac{26}{5} \Rightarrow x = 1, 2, 3, 4, 5.$ Решим уравнение $\sqrt{5y-1} = 5 - \sqrt{5x-1}$ при всех возможных значениях x и получим ответ.

23. $p^2 - 1 = (p-1)(p+1),$ а $p-1,\ p,\ p+1 -$ три подряд стоящих числа, причем $p -$ простое нечетное число. Поэтому $p-1,\ p+1 -$ два четных числа, причем одно из них делится на 3.

24. Натуральное число x^2 при делении на 3 дает в остатке 0 или 1, а при $n > 0$ левая часть при делении на 3 даст в остатке 2. Значит $n = 0, x^2 = 9.$

25. Одно решение получается сразу: $n = 0, k = 2006.$ Докажем, что других решений нет. Если $n > 0,$ то

$2^n(1 + 2^n + \ldots + 2^{n(k-1)}) = 2 \cdot 1003 \Rightarrow 2^n = 2,\ 1 + 2 + \ldots + 2^{k-1} = 1003 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{2^k - 1}{2 - 1} = 1003.$ Однако, последнее уравнение не имеет решений.

26. Решение аналогично предыдущему: $n = 0, k = 2010.$ При $n > 0,$

$3^n(1 + 3^n + \ldots + 3^{n(k-1)}) = 3 \cdot 670 \Rightarrow 3^n = 3,\ 1 + 3 + \ldots + 3^{k-1} = 670 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{3^k - 1}{3 - 1} = 670.$ Однако последнее уравнение не имеет решений.

27. Пусть $n=\overline{abcde}$, $\overline{abcde}\cdot 9=\overline{edcba}$. Так как пятизначное число при умножении на 9 остается пятизначным, то $a=1$, а $b=0$ или $b=1$. При $b=0$ $10cde\times 9=edc01\Rightarrow e=9\Rightarrow 10cd9\times 9=9dc01\Rightarrow 9d+8$ оканчивается на $0\Rightarrow d=8$. Далее $10c89\times 9=98c01\Rightarrow 9c+8$ оканчивается на $c\Rightarrow d=7$. Если $b=1$, то $11cde\times 9=edc11\Rightarrow e=9$, $9d+8$ оканчивается на $1\Rightarrow d=7$. Далее, $11c79\times 997c11\Rightarrow 9c+7$ оканчивается на c, однако таких чисел не существует.

28. Пусть $n=1\cdot 10^m+x$, $k=10x+1$, $k=3n$ $\Rightarrow 7x=3\cdot 10^m-1$, т.е. $3\cdot 10^m\equiv 1(\mathrm{mod}\,7)$. Если делить "столбиком" получим, то можно получить, что $300000=7\times 42857+1\Rightarrow x=42857$, $n=142857$.

29. $n=10a+b$, $m=10x+y$, $10a+b=20x+2y\Rightarrow$

$10a+b=20(a-b+2(a+b)\Rightarrow 19b=12a\Rightarrow\varnothing$.

Если $10a+b=20x+2y=20(a+b+2(a-b)\Rightarrow 3b=4a\Rightarrow b=4$, $a=3$.

30. $78=13\cdot 2\cdot 3$, а $13-$ простое число. Тогда возможны варианты: $a=13\cdot 3\cdot 2$, $b=13$; $a=13\cdot 2, b=13\cdot 3$.

31. Пусть $x\le y\le z$. $1=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\le\frac{3}{x}\Rightarrow x\le 3$, $x\ne 1$.

1) $x=2\Rightarrow\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}\Rightarrow y\ne 2$. Если $y=3$, то $z=6$. Если $y=4$, то $z=4$. А если $y=5$, то $\frac{1}{5}+\frac{1}{z}\le\frac{2}{5}<\frac{1}{2}$. Значит, при $x=2$ других решений нет.

2) $x=3 \Rightarrow \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{2}{3}$. Если $y=3$, то $z=3$. Если $y=4$, то $\frac{1}{4}+\frac{1}{z}\le \frac{2}{4}< \frac{2}{3} \Rightarrow \varnothing$.

32. Пусть $n=\overline{abcxyz}=\overline{p}\,\overline{q}$, $m=\overline{xyzabc}=\overline{q}\,\overline{p}$, $n=1000\cdot p+q$. Тогда $1000\cdot p+q=6(1000\cdot q+p) \Rightarrow 994\cdot p=5\cdot 999\cdot q \Rightarrow 142p=857q$. Так как, $(p,\ q)=1 \Rightarrow q=142,\ p=857$.

33. Пусть $n=\overline{6abc.....}=6\cdot 10^{k}+p$.

Тогда $6\cdot 10^{k}+p=25p \Rightarrow 6\cdot 10^{k}=4p \Rightarrow p=25\cdot 10^{k-2} \Rightarrow n=625\cdot 10^{k-2}$.

34. $xy=13(x+y) \Rightarrow xy-13x-13y+169-169=0$.

$(x-13)(y-13)=169 \Rightarrow x-13=169, y-13=1 \vee [-13=13, y-13=13$.

36. $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{25} \Rightarrow mn-25(m+n)=0 \Rightarrow (m-25)(n-25)=625$.

Так как $m>n$, то $m-25>n-25$ и возможны варианты: $m-25=625,\ n-25=1; m-25=125, n-25=25$.

38. Пусть x, y – исходные числа. Тогда $100x+y+100y+x=k^{2} \Rightarrow 101(x+y)=k^{2}$. Из свойств делимости следует, что k делится на 101. Следовательно, $101(x+y)=p^{2}101^{2}$. Но $x,\ y$ – двузначные числа, поэтому $p=1,\ x+y=101$. Ответ: $(11;90), (13;88), (17;84), (19;82)$.

39. Пусть $\frac{m}{n}<\frac{5}{8}<\frac{k}{p} \Rightarrow 5n-8m>0,\ 8k-5p>0$. Будем искать дробь, ближайшую к $\frac{5}{8}$. Разность между двумя дробями будет наименьшей, если числитель наименьший, а знаменатель -

наибольший. Сведем все к решению диофантовых уравнений:

$$\frac{5n-8m}{8n} \Rightarrow 5n-8m=1,\ 10 \le n \le 99 \Rightarrow n=5+8t,\ m=3+5t \Rightarrow t=11,\ n=93, m=58;$$

$$\frac{8k-5p}{8p} \Rightarrow 8k-5p=1,\ 10 \le p \le 99 \Rightarrow k=2+5t,\ p=3+8t \Rightarrow t=12, k=62, p=99.$$

40. $\frac{96}{35}=\frac{3456}{35\cdot 36}, \frac{97}{36}=\frac{3395}{35\cdot 36} \Rightarrow \frac{3395}{35\cdot 36} < \frac{m}{n} < \frac{3456}{35\cdot 36}.$ Среди дробей, знаменатель которых равен $35\cdot 36=5\cdot 7\cdot 6^2$, выберем те, у которых числитель и знаменатель имеют общие множители (тогда можно будет сократить на этот множитель и уменьшить знаменатель).

Между числами 3395 и 3456 содержится только несколько чисел, пропорциональных $5,6,7$: $3430=35\cdot 98, 3420=36\cdot 95, 3420=42\cdot 81,$ $3444=42\cdot 82.$ Выпишем все дроби с этими числителями:

$$\frac{3420}{36\cdot 35}=\frac{19}{7}, \frac{3430}{35\cdot 36}=\frac{49}{18}, \frac{3402}{35\cdot 36}=\frac{27}{10}, \frac{3444}{35\cdot 36}=\frac{41}{15}.$$

41. $p^6-q^2=0{,}5(p-q)^2 \Rightarrow 2p^6-2q^2=p^2-2pq+q^2 \Rightarrow$

$3q^2=p^2-2pq-p^6$. Отсюда следует, что простое число p делит $3q$, т.е. p делит простое число 3 или простое число q. Но,

$p \ne q\,(p^6-p^2 \ne 0)$, поэтому $p=3$, $3q^2=6q+1449 \Rightarrow q=23, q=21.$

42. Из уравнения видно, что правая часть всегда нечетная, а левая будет нечетной, если одно число больше единицы, а другое – равно единице.

Пусть $x=1 \Rightarrow y!=10z+12 \Rightarrow y<5 \Rightarrow y=2, z=-1.$ Если $y \ge 5$, то 12 разделится на 10 без остатка.

44. Докажем, что $n<3$. Если $n\geq 4$, то левая часть уравнения всегда делится на 4, а правая часть при делении на 4 даст остаток 1 или 2. Рассмотрим случаи $n=1,2,3$: $n=1(1+4-9\neq k^2)$, $n=2(2+8-9=1)$, $n=3(6+12-9=9)$.

45. Докажем, что $n\leq 4$. Если $n\geq 5$, то левая часть уравнения $12n!+11^n-1+3=12n!+10(11^{n-1}+...+1)+3$ всегда даст в остатке 3 при делении на 5, а правая часть уравнения (квадрат натурального числа) при делении на 5 даст в остатке $0, 1$ или 4. Рассмотрим все случаи: $n=1(12+11+2=25=5^2)$, а при $n=2,3,4(12n!+11^n+2\neq k^2)$,

46. *НОК* всех чисел равно $210=2\cdot 3\cdot 5\cdot 7$, следовательно, простые делители $2,3,5,7$ входят в разложение всех чисел в степени не выше первой. Если $p-$ наименьшее число из A, то любое число из A имеет с $p\neq 1$ общий делитель. Произведение всех чисел не является полным квадратом и делится на $1920=2^7\cdot 3\cdot 5\Rightarrow$ это числа $6,10,14,30,42,70,210,105$. Набор $2,6,10,14,30,42,70,210$ условию задачи не удовлетворяет (произведение этих чисел полный квадрат).

47. Последняя цифра числа равна остатку от деления числа на 10. Найдем последнюю цифру числа $11^{10}-1$: $11^{10}-1=(11-1)(11^9+11^8+...+11+1)$. В этом произведении оба сомножителя делятся на 10, поэтому число $11^{10}-1$ оканчивается на два нуля.

48. Последняя цифра числа 2^n изменяется циклически в зависимости от значения $n: 2, 4, 8, 6, 2\ldots$ Найдем последнюю цифру числа 2^{3^4}: $2^{3^4} = 2 \cdot 2^{3^4-1}$, $3^4 - 1 = (9-1)(9+1) = 80.$ $2^4 = 16$ $\Rightarrow 16^n$ оканчивается на $6 \Rightarrow 2^{3^4-1}$ оканчивается на $6 \Rightarrow 2^{3^4}$ оканчивается на $2.$

49. $2^{999} = \dfrac{2^{1000}}{2}$. Докажем, что $2^{1000}-1$ делится на $25.$

$2^{20}-1=(2^{10}-1)(2^{10}+1)=1025 \cdot 1023 \Rightarrow 2^{1000}-1=(2^{20})^{50}-1=(2^{20}-1)(\ldots).$

Т.е. $2^{1000}-1$ делится на 25 и оканчивается на $00,\ 25,\ 75.$ Тогда 2^{1000} может оканчиваться на $01,\ 26,\ 76,$ но 2^{1000} делится на 4 и должно оканчиваться на $76.$ Вопрос: Назовите две последние цифры числа $p,$ если известно, что $2p$ оканчивается на 76?

50. $\underbrace{11\ldots1}_{2n} - \underbrace{11\ldots1}_{n} = \dfrac{10^{2n}-1}{9} + 2\dfrac{10^n-1}{9} = \dfrac{10^{2n}-2\cdot10^n+1}{9} = \dfrac{(10^n-1)^2}{9}.$

51. $\underbrace{11\ldots1}_{100}\,\underbrace{55\ldots56}_{100} = \underbrace{11\ldots.1}_{200} + \underbrace{44\ldots4}_{100} + 1 = \dfrac{10^{200}-1}{9} + 4\dfrac{10^{100}-1}{9} + 1 =$

$= \dfrac{10^{200}+4\cdot10^{100}+4}{9} = \dfrac{10^{200}+2\cdot10^{100}+1+2\cdot10^{100}+2+1}{9} =$

$= \dfrac{(10^{100}+1)+2(10^{100}+1)+1}{9} = \dfrac{(10^{100}+2)^2}{9}$. Наконец, $\dfrac{10^{100}+2}{3} =$

$= \dfrac{3\cdot10^{100}-3+9}{9} = 3\cdot\dfrac{10^{100}-1}{9} + 1 = \underbrace{33\ldots3}_{100} + 1 = \underbrace{33\ldots.34}_{100}$

52. Домножим и разделим первую скобку на $9=(10-1)$. Тогда

$$\frac{1}{9}(10^n+10^{n-1}+...+10)(10-1)(10^{n+1}+5)+1=\frac{1}{9}(10^{n+1}-1)(10^{n+1}+5)+1=$$

$$=\frac{1}{9}(10^{2n+2}+4\cdot 10^{n+1}+4)=\frac{(10^{n+1}+2)^2}{9}=\left(\frac{10^{n+1}+2}{3}\right)^2.$$ Остается показать, что последняя дробь является целым числом:

$$\frac{10^{n+1}+2}{3}=\frac{10^{n+1}-1+3}{3}=\frac{10^{n+1}-1}{3}+1.$$

53. Дробь сократима, если $\dfrac{7n^2+11n+4}{6n^2+5n}=\dfrac{p\cdot m}{p\cdot k}$, т.е. у числителя и знаменателя есть общие делители. Заметим, что $\dfrac{7n^2+11n+4}{6n^2+5n}=\dfrac{(n+1)(7n+4)}{n(6n+5)}$. Дробь будет сократима, если у сомножителей в числителе и знаменателе найдутся общие делители.

Вычислим:

$$НОД(n+1,n)=1;$$
$$НОД(n,7n+4)=(n,4);$$

$$НОД(6n+5,n+1)=(-1;n+1)=(-1;n)=1;$$
$$НОД(6n+5,\ 7n+4)=(5n+5,n-1)=(11,\ n-1).$$

Легко заметить, что при $n=2p$ или $n-1=11p$ не все $НОД$ равны нулю, а сократить можно будет на 2 или 11.

54. Пусть a, $b-$ трехзначные числа, $\overline{ab}=3ab\Rightarrow 1000a+b=3ab.$ Отсюда следует, что $1000a=b\cdot(3a-1)$ и $3a-1$ делитель числа $1000.$

Но $3a-1\le 300-1=299$ и $3a-1$ может быть равно 500 или 1000. Если $3a-1=500$, то $a=167$, $b=2a=334$, $a\cdot b=55778$.

А уравнение $3a-1=1000$ не имеет решений в целых числах.

55. Из уравнения $k!=5\cdot m!+12\cdot n!$ следует, что $k>m$, $k>n$. Пусть $s=\max(m;\ n)$, $k=.s+p$. Тогда $(s+p)!=5\cdot m!+12\cdot n!<17s!$ и $(s+1)(s+2)\ldots(s+p)<17$. Откуда следует, что $p<3$, иначе $(s+1)(s+2)(s+3)>2\cdot 3\cdot 4=24$. Рассмотрим два случая: $p=1, k=s+1$ и $p=2, k=p+2$.

1.1. $p=1, k=s+1, n=m=s\Rightarrow (n+1)n!=17n!\Rightarrow n+1=17, n=16.$

1.2. $p=1, k=s+1, m=s>n\Rightarrow (m+1)m!=5m!+12n!\Rightarrow (m-4)m!=12n!.$

Отсюда следует, что

$m\ge 5;\ 12n!=(m-4)m!>(m-4)(m)n!\Rightarrow 12>(m-4)m\Rightarrow m=5, m=6.$

Если $m=5\Rightarrow 12n!=5!\Rightarrow 12n!=120\Rightarrow n!=10\Rightarrow\varnothing.$

Если $m=6\Rightarrow 12n!=2\cdot 6!\Rightarrow n!=120\Rightarrow n=5\Rightarrow m=6, k=7.$

1.3. $p=1, k=s+1, n=s>m\Rightarrow (n+1)n!=5m!+12n!\Rightarrow (n-11)n!=5m!.$

Отсюда $n\ge 11;\ 5m!=(n-11)n!>(n-11)\cdot n\cdot m!\Rightarrow 5>(n-11)n\Rightarrow\varnothing.$

57. Пусть $a^b+127=\overline{ab}$. Если $a=1$, то $b=28$. Пусть $a\ge 2$. Если $b<9$ (b – цифра), то $a^b+127=10a+b$. Если $b=1$, то $a+127=10a=1$. Отсюда, $126=9a$, $a=14$. Если $b\ge 2$, то $10a+b=a^b+127>a^2+127$. Отсюда получаем неравенство $a^2-10a+118\le 0$, которое не имеет решений в натуральных числах.

Докажем, что при $a \geq 2$ и $b > 9$ задача не имеет решений. Пусть $b -$ $n -$значное число $(10^n - 1 \leq b < 10^n)$, $a^b + 127 = 10^n \cdot a + b$.

Тогда $a^b + 127 > a^{b-1} \cdot a > 2^{b-1} \cdot a$, а $10^n + b < 10^n + 10^n < 10^n \cdot 2a$.

Отсюда, $2^{b-1} \cdot a < 10^n \cdot 2a \Rightarrow 2^{b-1} < 10^n$, где $b -$ $n -$значное число.

Докажем, что последнее неравенство не верно, т.е. $2^{b-1} > 10^n$.

Так как, $b > 10^{n-1}$, то $2^{b-1} > 2^{10^n - 2}$. Докажем, что $2^{10^n - 2} > 10^n$ при всех $n > 2$. При $n = 2$ неравенство имеет вид $2^{10^2 - 2} = 2^8 > 10^2$, а при переходе к $n+1$ левая часть неравенства увеличивается в 2^{90} раз, а правая – только в 10 раз.

59. По условию задачи $\overline{a^2 b} = 3a \cdot b$. Пусть $b -$ $n -$значное число $(10^{n-1} \leq b < 10^n)$. Тогда

$a^2 \cdot 10^n + b = 3ab \Rightarrow a^2 \cdot 10^n = b(3a - 1) < 10^n \cdot (3a - 1)$.

Среди решений неравенства $a^2 - 3a + 1 < 0$ содержится только два натуральных числа $a = 1$ или $a = 2$.

Если $a = 1$, то $10^n + b = 3b \Rightarrow b = 5 \cdot 10^{n-1}$.

Если $a = 2$, то $4 \cdot 10^n + b = 6b \Rightarrow 4 \cdot 10^n = 5b \Rightarrow b = 8 \cdot 10^{n-1}$.

60. По условию задачи $\overline{a\, b^2} = 7a \cdot b$. Пусть $b -$ $n -$значное число $(10^{n-1} \leq b < 10^n)$. Тогда $10^{2n-2} \leq b^2 < 10^{2n} \Rightarrow \overline{ab^2} > a \cdot 10^{2n-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow 7ab > a \cdot 10^{2n-1} \Rightarrow 10^{n+1} > 10b > 7b \geq 10^{2n-1}$.

Неравенство $10^{n+1} > 10^{2n-1}$ справедливо только при $n=1,$ т.е $b-$ цифра и уравнение имеет вид $a\cdot 10^n + b^2 = 3ab;$ $b=1,2,3,4,5,6,7,8,9;$ $n=1,2.$ Если $b=1,$ то $10a+1=3a \Rightarrow \varnothing.$

Если $b=2,$ то $a\cdot 10+4=14a \Rightarrow 4\cdot a=4 \Rightarrow a=1.$

Аналогичным способом убеждаемся, что при $b=3,4,5,6,7,8,9$ уравнение $a\cdot 10^n + b^2 = 3ab$ не имеет решений в натуральных числах. Например, при $b=7,$ уравнение будет иметь вид $a\cdot 100+49=49a.$

61. Из уравнения видно, что $2^n \equiv 1(\mathrm{mod}3),$ т.е. n – четное число ($n=2p \Rightarrow 2^{2p}=4^p \equiv 1(\mathrm{mod}3)$). Далее, $3^m+3 \equiv 0(\mathrm{mod}4) \Rightarrow m-$ четное ($3^{2k}+3=9^k+3 \equiv 1+3(\mathrm{mod}4)$). Наконец,

$3^{2k}+7=2^{2p} \Rightarrow 7=(2^p)^2-(3^k)^2 = (2^p-3^k)(2^p+3^k)=1\cdot 7=7\cdot 1.$

62. $3\cdot 2^m = n^2-1=(n-1)(n+1)-$четное число, т.е. $n-$нечетное число. Возможны два варианта представления нечетного числа.

1) $n=2p+1,$ где $p-$нечетное: тогда $3\cdot 2^m = 2p(2p+2)=4p(p+1).$ Так, как p нечетное, то p делит $3 \Rightarrow p=1 \vee p=3.$ Если $p=1,$ то $3\cdot 2^m = 4\cdot 1\cdot 2 \Rightarrow \varnothing.$ Если $p=3,$ то $3\cdot 2^m=4\cdot 3\cdot 4 \Rightarrow m=4.$

2) $n=2^k\cdot p+1,$ где $p-$нечетное. Тогда

$3\cdot 2^m = 2^k\cdot p(2^k p+2)=2^{k+1}p(2^{k-1}p+1).$ Отсюда следует, что

$m=k+1,\ 3=p(2^{k-1}p+1) \Rightarrow p=1, k-1=1,\ m=3,\ n=5.$

63. Пусть $a=n\cdot\lg 2$, $b=n\cdot\lg 5$. Тогда: a и b иррациональные числа; $a+b=n\cdot\lg 10=n$; $a=[a]+\{a\}$, $b=[b]+\{b\}$.

Далее, $2010=a+b=[a]+[b]+\{a\}+\{b\}$, причем $0\le\{a\}+\{b\}<2$. Отсюда следует, что $0\le\{a\}+\{b\}=2010-[a]-[b]=2010-n<2$. Т.е. $\{a\}+\{b\}=1$, $n=2011$.

64. $y^2=16+z^x \Rightarrow z^x=y^2-16=(y-4)(y+4)=p\cdot(p+8)$. Так как $z-$простое, то $p=1$, либо $p=z^k$. Если $p=1$, то

$p+8=9=3^2, y^2=16+9=25=5^2$.

Если $p=z^k$, то $z^x=z^k(z^k+8)$. Значит, простое число z в некоторой степени делит число $8 \Rightarrow z^k=2\Rightarrow z^k+8=10$, что невозможно. Или $z^x=8\Rightarrow z^k+8=16\Rightarrow z^x=8\cdot 16=144=12^2$.

66. $\overline{ab}+\overline{ba}=11(a+b)\Rightarrow a+b=11$. Далее, знаменатель прогрессии равен $q=\dfrac{ab}{a}=b>1$ ($b-$цифра). Из свойств прогрессии $a\cdot b^2=10a+b+2b^2-b-20$, $a\cdot b^3=10b+a+2b^3-10b-2$.

Отсюда $(2-a)(b^2+10)=0$, $b^3(a-2)=a-2$. Так как a и b – цифры, то $a=2, b=9$. Обратно, если $a=2, b=9$, то исходная последовательность имеет вид $2, 2\cdot 9, 2\cdot 9^2$, $2\cdot 9^3$.

68. Если числа $2a, 3b, 10a+b-2a, 10b+a+5a-6b$ образуют арифметическую прогрессию, то $b=2a$. С другой стороны, a, b –

цифры, $a-b\leq 8$ и $\overline{ab}-\overline{ba}=9(a-b)=p^2$. Отсюда $a-b=1\Rightarrow a=2,b=2$ или $a-b=4\Rightarrow a=4,b=8$, а сумма квадратов всех чисел равна 85.

69. Пусть $N=\overline{a_n a_{n-1}\ldots a_2 a_1}$. В записи N не должно быть нулей или двух одинаковых цифр. Значит в записи N должно быть все 9 цифр, а наибольшее число такого вида $N=987654321$ Докажем, что N не делится на 11. Действительно, $9-8+7-6+5-3+3-1+1=5<11.$

70. Справедливо равенство $n^5+n^4+1=(n^2+n+1)(n^3-n+1)$. Отсюда $7^m=(n^2+n+1)(n^3-n+1)$. Легко заметить, что при $n=2$ $n^2+n+1=7$, $n^3-n+1=7$, т.е. пара $n=2, m=2$ – решение. Докажем, что других решений нет. Пусть $n\geq 3$, тогда $n^2+n+1>1$, $n^3-n+1>1$ и $7^p=n^2+n+1$, $7^q=n^3-n+1$. Отсюда $7^p-1=n(n+1)$, $7^q-1=n(n^2-1)\Rightarrow 7^p-1=(7^q-1)\cdot k\Rightarrow$ q делит p. Т.е. $n^3-n+1=7^p=7^{q\cdot t}=(n^2+n+1)^t$. Однако, $(n^2+n+1)^2>(n^3-n+1)$, т.е. $1<t<2$, однако это неверно. Следовательно, других решений нет.

71. Первый способ.

$$\underbrace{11\ldots1}_{n+1}{}^2=\left(\frac{10^n-1}{3}\right)^2=\frac{10^{n+2}-2\cdot10^{n+1}-1}{9}=10^{n+1}\cdot\frac{10^{n+1}-1}{9}-\frac{10^{n+1}-1}{9}=$$

$$\underbrace{11\ldots1}_{n+1}\underbrace{00\ldots0}_{n+1}-\underbrace{11\ldots1}_{n+1}=\underbrace{11\ldots1}_{n}0\underbrace{88\ldots8}_{n}9.$$

Второй способ.

$$\underbrace{33\ldots3}_{n+1}{}^2=\left(\frac{10^{n=1}-1}{3}\right)^2=\frac{10^{2n+2}-2\cdot10^{n+1}1}{9}=\frac{10^n-1}{9}\cdot10^{n+2}+8\cdot\frac{10^{n+1}-1}{9}+1=$$

$$\underbrace{11\ldots1}_{n}\underbrace{00\ldots0}_{n+2}+\underbrace{88\ldots8}_{n+1}+1.$$

72. Первый способ.

$$\underbrace{33\ldots3}_{n}4^2=\left(\frac{10^{n+1}+2}{3}\right)^2=\frac{10^{n+2}+4\cdot10^{n+1}+4}{9}=\frac{10^{n+2}-1+40\cdot(10^n-1)+45}{9}=$$

$$\frac{10^{2n+2}-1}{9}+40\cdot\frac{10^n-1}{9}+5=\underbrace{11\ldots1}_{2n+1}+\underbrace{44\ldots4}_{n}0+5=\underbrace{11\ldots1}_{n+1}\underbrace{55\ldots5}_{n}6.$$

Второй способ. Заметим, что если $x=\underbrace{33\ldots3}_{n}4$, то $3x=1\underbrace{00\ldots0}_{n}2$, а

$$(3x)^2=1\underbrace{00\ldots0}_{n}4\underbrace{00\ldots0}_{n}.$$

73. Первый способ.

$$x=100\underbrace{11\ldots1}_{n}7=1\underbrace{00\ldots0}_{n+3}+\underbrace{11\ldots1}_{n+1}+6=10^{n+3}+\frac{10^{n+1}-1}{9}+6=\frac{1}{9}(9\cdot10^{n+3}+10^{n+1}+53)=$$

$$\frac{1}{9}\cdot(900\cdot10^{n+1}+10^{n+1}+53)=\frac{1}{9}\cdot(901\cdot10^{n+1}+53)=\frac{1}{9}\cdot(901\cdot10^{n+1}-901-954)=$$

$$\frac{1}{9}\cdot(901\cdot(10^{n+1}-1)+954)=53\cdot\frac{1}{9}\cdot(17\cdot(10^{n+1}-1)+18).$$

Второй способ. Пусть $b_n=100\underbrace{11\ldots1}_{n}7$. Тогда

$$b_{n+1}=100\underbrace{11\ldots1}_{n+1}7=100\underbrace{11\ldots1}_{n+1}17=b_n\cdot100+17=100\underbrace{11\ldots1}_{n+1}70-70+17=10\cdot b_n-53.$$

Отсюда следует, что если b_n делится на 53, то b_{n+1} тоже делится на 53. Так как $b_1=10017=53\cdot89$, то все доказано.

Третий способ. Из предыдущего

$$b_{n+1}-b_n=9\cdot b_n-53=9\cdot100\underbrace{11\ldots1}_{n}7-53=9\cdot(100\underbrace{11\ldots1}_{n}1+6)-53=9\cdot100\underbrace{11\ldots1}_{n+1}+1=$$

$$900\underbrace{99\ldots9}_{n+1}+1=901\underbrace{00\ldots0}_{n+1}=901\cdot10^{n+1}=53\cdot17\cdot10^{n+1}.$$

74. $\underbrace{11\ldots1}_{n}2\underbrace{11\ldots1}_{n}=\underbrace{11\ldots1}_{n+1}\underbrace{00\ldots0}_{n}+\underbrace{11\ldots1}_{n+1}=\underbrace{11\ldots1}_{n+1}\cdot1\underbrace{00\ldots0}_{n-1}1.$

Например, легко заметить, что при нечетных n последнее произведение делится на 11^2.

75. $\underbrace{44\ldots4}_{1980}-11\cdot\underbrace{44\ldots4}_{990}+9=4\cdot\dfrac{10^{1980}-1}{9}-11\cdot4\cdot\dfrac{10^{990}-1}{9}+9=\left(\dfrac{2\cdot10^{990}-11}{3}\right)^2.$

Далее, $\dfrac{2\cdot 10^{990}-11}{3}=\dfrac{2(10^{990}-1)-9}{3}=2\cdot\underbrace{33\ldots3}_{990}-3=\underbrace{66\ldots6}_{989}3.$

Второй способ. Пусть $a=\underbrace{11\ldots1}_{990}$.

Тогда $\underbrace{44\ldots4}_{1980}-11\cdot\underbrace{44\ldots4}_{990}+9=4a(9a+1)+4a-44a+9=(6a-3)^2.$

76. Первый способ.

$$120\underbrace{33\ldots3}_{n}08=12\cdot 10^{n+3}+\frac{10^n-1}{3}\cdot 100+8=\frac{1}{3}\cdot(360\cdot 10^{n+1}+10^{n+2}-100+24)=$$

$$\frac{1}{3}\cdot(361\cdot 10^{n+2}-76)=19\cdot\frac{1}{3}\cdot(19\cdot 10^{n+2}-4)=\frac{19}{3}\cdot(19\cdot(10^{n+2}-1)+15).$$

Легко заметить, что число в скобках делится на 3.

Второй способ. $a_1=120308=19\cdot 6332-$делится на 19.

Пусть $a_n=120\underbrace{33\ldots3}_{n}08.$ Тогда $a_{n+1}=120\underbrace{33\ldots.3}_{n+1}08=120\underbrace{33\ldots.3}_{n}000+308=$ $=120\underbrace{33\ldots3}_{n}080+228=10\cdot a_n+228=10a_n+19\cdot 12.$ Так как a_1 делится на 19, то для любого n a_{n+1} делится на 19.

77. $\overline{ab71}=1000\cdot a+\overline{b71},\ \overline{b71a}=10\cdot\overline{b71}+a.$ Отсюда видно, что $\overline{ab71}\cdot 10-\overline{b71a}=9999a=9\cdot 11\cdot 101\cdot a.$ Из свойств делимости следует, что это число должно делиться на трехзначное простое число p и это может быть только число 101.

Далее, $\overline{ab71}=71+100\cdot\overline{ab}=71-\overline{ab}+101\cdot\overline{ab}.$ Из условия задачи следует, что число $71-\overline{ab}$ должно делиться на 101, а это возможно только в случае $71-\overline{ab}=0\Rightarrow a=7, b=1.$

78. Из равенства $m^4=2n^2+1$ следует, что $m-$ нечетное число, а знаки чисел n и m могут быть произвольными. Пусть $m=2p+1,$ тогда $m^4-1=(m-1)(m+1)(m^2+1)=2p(2p+2)(4p^2+4p+2)=2n^2.$

Откуда следует, что $n-$четное число, т.е. $n=2k$, а произведение взаимно простых чисел $p, p+1, 2p^2+2p+1$ является полным квадратом $p(p+1)(2p^2+2p+1)=k^2$. Это возможно только в случае, если каждый сомножитель является полным квадратом.
Следовательно, $p=0, k=0$. Ответ: $m=\pm 1, n=0$.

79. Левая часть уравнения при делении на 3 дает в остатке 1, следовательно, $k-$ четное число ($k=2p$). Но тогда правая часть уравнения при делении на 4 дает в остатке 1, и, следовательно, $m-$должно быть четным числом ($m=2t$)..

Тогда $4^n=2^{2n}=5^{2p}-3^{2t}=(5^p-3^t)(5^p+3^t)$, откуда $5^p-3^t=2^q$, $5^q+3^t=2^s$ или $5^p=\dfrac{2^q+2^s}{2}$, $3^s=\dfrac{2^q-2^s}{2}=2^{q-1}-2^{s-1}$. Из последнего соотношения следует, что $s-1=0$, а $3^{s-1}=2^{q-1}-1$, $q-1$ четное число, а $3^{s-1}=(2^t+1)(2^t-1)$. Последнее равенство возможно, только если $2^t-1=1$, $2^t+1=3 \Rightarrow t=1$, $s=2, q=2$, $p-1$, $n=m=k=2$.
Ответ: $m=n=k=2$.

80. Перепишем исходное уравнение в виде $m\,(n^2-1)=10^5 n$. Заметим, что $m=n=0$ решение уравнения. Пусть $m,\ n>0$. Тогда $m(n+1)(n-1)=10^5 n$, откуда следует, что m делится на $n\,(m=pn)$. Т.е. $p\,(n+1)\,(n-1)=10^5$. Если n четное, то одно из соседних чисел $n+1,\ n-1$ имеет простой делитель, отличный от 5, что невозможно. Значит, $n-$нечетное, а $n+1, n-1-$два соседних четных числа, не имеющих простых делителей кроме 2 и 5. Выпишем все такие четные числа $n-1$, не имеющие простых делителей кроме 2 и 5, у которых произведение $(n-1)(n+1)$ не превосходит 10^5.

2	$2\cdot 5=10$	$2\cdot 25=50$	$2\cdot 125=250$
4	$4\cdot 5=20$	$4\cdot 25=100$	
8	$8\cdot 5=40$	$8\cdot 25=200$	
16	$16\cdot 5=80$		

Легко заметить, что только для чисел $n-1=2, n-1=8$ числа $n+1=4,\ n+1=10$ не содержат простых делителей, кроме 2 и 5.

Если $n=3$, то $p=12500,\ m=37500$.

Если $n=9$, то $p=1250,\ m=11250$.

Ответ: $n=3,\ m=37500$; $n=9,\ m=11250$.

81. Заметим, что $k=0, n=\pm 2$ являются решением. Если $k<0$, то $1+2^k+2^{2k+1}<2$ и, следовательно, уравнение не имеет решений, $k=1$ не является решением. Пусть $k\geq 2$.

Если $k-$ четное, то остаток от деления левой части уравнения на 3 равен 1, а если $k-$ нечетное, то остаток при делении на 3 левой части равен 2. Однако, при делении квадрата целого числа на 3 в остатке не может получиться 2, поэтому, $k-$ четное число. Пусть $k=2p, n=2m+1$ а уравнение имеет вид $1+4^p+2\cdot 4^{2p}=n^2=4m^2+4m+1$. Отсюда, $4^{p-1}(1+8\cdot 4^{p-1})=m(m+1)$.

Только одно из двух чисел $m,\ m+1$ четное и оно должно делиться на 4^{p-1}.

Пусть $m=4^{p-1}\cdot d$, причем число $d-$нечетное. Тогда $4^{p-1}(1+8\cdot 4^{p-1})=4^{p-1}\cdot d(4^{p-1}\cdot d+1) \Rightarrow 1+8\cdot 4^{p-1}=d(4^{p-1}\cdot d+1)\Rightarrow$ $4^{p-1}(8-d^2)=d-1\Rightarrow 8-d^2>0\Rightarrow d=1\Rightarrow \varnothing$.

Пусть $m+1=4^{p-1}\cdot d$. Тогда уравнение имеет вид $4^{p-1}(1+8\cdot 4^{p-1})=(d\cdot 4^{p-1}-1)\cdot d\cdot 4^{p-1} \Rightarrow 1+8\cdot 4^{p-1}=d^2\cdot 4^{p-1}-d \Rightarrow$ $4^{p-1}(d^2-8)=d+1$.

Если $d=3$, то $p-1=1$ и $k=4, n=\pm\ 23$.

Если $d>3$, то $d^2-8>d+1$ и уравнение не имеет решений.

Ответ: $k=0,\ n=\pm 2;\ k=4,\ n=\pm 23$.

82. Из условия задачи следует, что $m>n,\ m>k$. Рассмотрим три случая: $1)\,k>n; 2)\,k<n; 3)\,k=n$.

1)Если $k>n,$ то левая часть уравнения делится на $k!$, а правая – нет.
2) Если $k<n,$ то, сократив обе части равенства на $k!$, получим равенство $5=(k+1)(k+2)...m-(k+1)(k+2)...n$. Отсюда следует, что $k+1=5,\ n=5,\ 2\cdot 5!=m! \Rightarrow \varnothing.$
3) Если $k=n,$ то $6\cdot k!=m!=k!\cdot(k+1)(k+2)\ldots m \Rightarrow$ $6=(k+1)(k+2)...m \Rightarrow k+1=2,\ k=n=1, m=3$ или $m=6, k=n=5.$
Ответ: $m=3, k=n=1;\ m=6, k=n=5.$

84. Пусть $n\geq k\geq m, p>n.$ Тогда $(n+1)!\leq p!=n!+k!+m!\leq 3n!,$ что невозможно при $n>3$. Если $n\leq 3,$ то возможен только один вариант $n=k=m=2, p=3.$

85. Заметим, что $n^2+5n+16=(n+9)(n-4)+52,\ (n+9)-(n-4)=13.$ Отсюда следует, что оба числа $n+9,\ n-4$ делятся на простое число 13. Тогда их произведение будет делиться на 169, однако число 52 не делится на 169. Ответ: таких чисел нет.

87. Искомые числа имеют вид $1999\cdot n\ (n\leq 50)$. По условия задачи сумма цифр этого числа равна 25, поэтому остаток от деления этого числа на 9 равен 7. Остаток от деления числа 1999 на 9 равен 1, поэтому остаток от деления числа n на 9 равен 7, т.е. $n=7,\ 16,\ 25,\ 34, 43.$
Проверим все эти числа, отметив некоторые «хитрости» вычислений: $1999\cdot n=2000\cdot n-n.$ Существует всего два числа такого вида, сумма цифр которых равна 25:
$1999\cdot 7=14000-7=13993;\ 1999\cdot 16=32000-16=31984.$
Ответ: $13993,\ 31984.$

88. Перепишем уравнение в виде: $2^m=3^n+1$. Попробуем подобрать решение: $m=1\Rightarrow\varnothing; m=2\Rightarrow n=1,$ но других решений не получается. Попробуем доказать, что других решений нет методом «от противного». Пусть $m\geq 3,\ 2^m=3^n+1.$ Тогда левая часть равенства делится на 8, а правая часть в зависимости от n при делении на 8 дает в остатке 2 или 4. Противоречие.

89. Подберем решение: $n=1 \Rightarrow m=1$; $n=2 \Rightarrow m=3$, но других решений не получается. Докажем методом «от противного», что других решений нет. Пусть $n \geq 3$, $3^n - 1 = 2^m$. У числа $3^n - 1$ остатки при делении на 8 равны $2, 0, 2, 0\ldots$т.е. $3^n - 1$ делится на 8 только при четных n. Пусть $n = 2k$. Тогда $3^n - 1 = (3^k - 1)(3^k + 1) = 2^m$, а каждый из сомножителей $3^k - 1$ и $3^k + 1$ являются степенями двойки. Если $3^k - 1 = 2^p$, а $3^k + 1 = 2^q$, то $2 = 2^q - 2^p = 2^p(2^{q-p} - 1)$. Это равенство справедливо только при $q = 2, p = 1$. Тогда $k = 1$, $n = 2$. Противоречие с условием $n \geq 3$.

90. Так как при всех натуральных n верно неравенство $n^2 + 2 > 2n - 1$, то $x = \dfrac{p}{q} > 1$. Из уравнения следует, что $(n^2 + 2)^q = (2n - 1)^p$, а из единственности разложения на простые множители следует, что числа $2n - 1$ и $n^2 + 2$ имеют одинаковые простые делители, т.е. число $n^2 + 2$ делится на $2n - 1$.

$$n^2 + 2 = (2n - 1)\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{4}\right) + \frac{9}{4} \Rightarrow \frac{n^2 + 2}{2n - 1} = \frac{n}{2} + \frac{1}{4} + \frac{9}{4(2n - 1)}.$$

Если выражение справа – целое число, то $4 \cdot \dfrac{n^2 + 2}{2n - 1} = 2n + 1 + \dfrac{9}{(2n - 1)}$ тоже целое число, а это возможно только при $n = 1, 3, 5$.

Рассмотрим все эти числа:

$$n = 1,\ 2n - 1 = 1; \quad n = 3,\ \frac{n^2 + 2}{2n - 1} = \frac{11}{5};\ n = 5,\ \frac{n^2 + 2}{2n - 1} = \frac{27}{9} = 3.$$ Ответ: $n = 5$.

91. Пусть условие задачи выполнено и мы попали из точки с координатой 1 в точку 2. Точки вида $4 \cdot n$ разбивают координатную ось на интервалы длины 4. Точки 1 и 2 лежат в одном интервале, поэтому из точки 1 в точку 2 того же интервала можно попасть, только совершив четное число прыжков длины 4 (сколько вправо, столько и влево). Пусть число шагов длины 4 равно m, число единичных шагов вправо - n, а число единичных шагов влево - k. Тогда из точки 1 можно попасть в точку с координатой 2 следующим способом: $1+4m-4m+n-k = 2 \Rightarrow n-k=1 \Rightarrow n+k=2k+1$.

Т.е. число единичных шагов нечетное, что противоречит условию о четности общего количества шагов.

Ответ: в условиях задачи нельзя попасть из точки 1 в точку с координатой 2

Содержание

Учебное издание

Задача С6 (Теория чисел на ЕГЭ)

Составитель

Чуваков Валерий Петрович
(chv@uriit.ru)

Югорский физико–математический лицей
г. Ханты–Мансийск, ул. Мира, 151