

Югорский физико-математический лицей

В.П. Чуваков

Задача С6

(Теория чисел на ЕГЭ)

Учебно-методическое пособие

Ханты-Мансийск
2011

В.П. Чуваков

Задача С6 (Теория чисел на ЕГЭ): Учебно-методическое пособие, - Ханты-Мансийск, Югорский физико-математический лицей, 36 с.

В сборнике собраны задачи по теории чисел различной степени сложности, которые часто встречаются на предметных и вузовских олимпиадах по математике, ЕГЭ (задача С6). Для решения большинства задач необходимо иметь первичные сведения, в том числе, и выходящие за пределы обычной школьной программы (свойства делимости, признаки делимости, сведения о простых числах, десятичное представление натуральных чисел, некоторые формулы и факты из теории чисел, свойства НОД и НОК).

К задачам приведены ответы и комментарии к решениям.

Пособие предназначено для углубленного изучения математики, подготовки к предметным олимпиадам и ЕГЭ.

Адресовано школьникам старших классов и преподавателям.

Задачи

1. Найдите все пары взаимно простых натуральных чисел a и b таких что, если к десятичной записи числа a приписать справа через запятую десятичную запись числа b , то получится десятичная запись числа $\frac{b}{a}$.
2. Найдите хотя бы три десятичных числа, делящихся на 11, в записи которых используются все цифры от 0 до 9?
3. Найдите все натуральные числа, которые делятся на 42 и имеют ровно 42 различных натуральных делителя (включая 1 и само число).
4. Найдите все натуральные числа, последняя цифра которых равна 0 и которые имеют ровно 15 различных натуральных делителей (включая 1 и само число).
5. Найдите все натуральные числа, которые делятся на 30 и имеют ровно 99 различных натуральных делителя (включая 1 и само число).
6. Найдите все натуральные числа, которые делятся на 5600 и имеют ровно 105 различных натуральных делителя (включая 1 и само число).
7. Натуральное число n имеет ровно 6 натуральных делителей (включая 1 и само число), сумма которых равна 104. Найдите n .
8. Натуральное число n имеет ровно 6 натуральных делителей (включая 1 и само число), сумма которых равна 3500. Найдите n .

- 9.** Натуральное число n имеет ровно 9 натуральных делителей (включая 1 и само число), сумма которых равна 1767. Найдите n .
- 10.** Решите в натуральных числах уравнение $1 + 2! + 3! + \dots + n! = k^2$.
- 11.** Решите в натуральных числах уравнение $13 + 5n + n! = k^2$.
- 12.** Найдите все натуральные числа, являющиеся степенью двойки, такие, что после зачеркивания первой цифры их десятичной записи снова получается число, являющееся степенью двойки.
- 13.** Решите в натуральных числах уравнение $x! + y! = (x + y)!$.
- 14.** Решите в натуральных числах уравнение $2k! = m! - 2n!$.
- 15.** Решите в натуральных числах уравнение $n! + 4n - 9 = k^2$.
- 16.** Найдите все пары пятизначных чисел (x, y) такие, что число \overline{xy} , полученное приписыванием десятичной записи числа y после десятичной записи числа x , делится на xy .
- 17.** Решите в натуральных числах уравнение $2xy = x^2 + 2y$.
- 18.** Решите в целых числах уравнение $m^4 - 2n^2 = 1$.
- 19.** Произведение нескольких различных простых чисел делится на каждое из этих чисел, уменьшенное на 1. Чему может быть равно это произведение?
- 20.** Натуральные числа m и n таковы, что $m^3 + n$ и $m + m^3$ делится на $m^2 + n^2$. Найдите m и n .

- 21.** При каком наименьшем натуральном n число 2009 не делится на n^n ?
- 22.** Найдите наибольшее натуральное n , для которого каждое из чисел k^k при $k=1,2,\dots,n$ является делителем числа 2013!.
- 23.** Найдите наибольшее натуральное число n , для которого число 2009 делится на каждое из чисел k^k при $k=1,2,3,\dots,n$.
- 24.** Решите в целых числах уравнение $1+2^x=y^2$.
- 25.** Решите в целых числах уравнение $\sqrt{x-\frac{1}{5}}+\sqrt{y-\frac{1}{5}}=\sqrt{5}$.
- 26.** Найдите наибольший общий делитель всех чисел вида p^2-1 , где p – простое число, большее 3, но меньшее 2010.
- 27.** Решите в целых числах уравнение $3^n+8=x^2$.
- 28.** Решите в целых числах уравнение $2^n+2^{2n}+2^{3n}+\dots+2^{k\cdot n}=2006$
- 29.** Решите в целых числах уравнение $3^n+3^{2n}+3^{3n}+\dots+3^{k\cdot n}=2007$.
- 30.** Найдите пятизначное число, произведение которого с числом 9 есть пятизначное число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке.
- 31.** Найдите наименьшее натуральное число, первая цифра которого 1, а ее перестановка в конец числа приводит к увеличению числа в три раза.

32. Одно из двух двузначных натуральных чисел в два раза больше другого. Найдите все пары таких чисел, если цифры меньшего из них равны сумме и разности цифр большего.

33. Найдите все пары натуральных чисел, наименьшее общее кратное которых 78, а наибольший общий делитель равен 13.

34. Решите в натуральных числах уравнение

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1.$$

35. Найдите шестизначное число, которое уменьшается в 6 раз, если три его первые цифры, не меняя порядка, переставить в конец числа.

36. Найдите все натуральные числа, первая цифра которых 6, а при зачеркивании этой цифры число уменьшаются в 25 раз.

37. Решите в натуральных числах уравнение $xy = 13(x + y)$.

38. Решите в натуральных числах уравнение $xy = 17(x + y)$.

39. Решите в натуральных числах уравнение $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{25}$, где $m > n$.

40. Решите в целых числах уравнение $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{9}$ ($x > y$).

41. Найдите все пары двузначных чисел (x, y) такие, что x простое меньше 20, а число $\overline{xy} + \overline{yx}$ является полным квадратом.

42. Все правильные несократимые дроби с двузначными числами в числителе и знаменателе упорядочили по

возрастанию. Между какими двумя последовательными дробями оказалось число $\frac{5}{8}$?

43. Среди обыкновенных дробей с положительными знаменателями, расположенными между числами $\frac{96}{35}$ и $\frac{97}{36}$ найдите такую, знаменатель которой минимален.

44. Решите в простых числах уравнение $p^6 - q^2 = 0,5(p - q)^2$.

45. Решите в целых числах уравнение $x! + y! = 10z + 13$.

46. Решите в целых числах уравнение $x! + y! = 10z + 17$.

47. Решите в натуральных числах уравнение $n! + 4n - 9 = k^2$.

48. Решите в натуральных числах уравнение $12n! + 11^n + 2 = k^2$.

49. Множество A состоит из n натуральных чисел ($n > 7$). Наименьшее общее кратное всех чисел равно 210, а *НОД* любых двух чисел из A больше единицы. Найдите эти числа, если произведение всех чисел из A делится на 1920 и не является квадратом никакого натурального числа.

50. Найдите две последние цифры числа 11^{10} .

51. Найдите последнюю цифру числа 2^{3^4} .

52. Найдите две последние цифры числа 2^{999} .

53. Докажите, что число $\frac{11\dots1}{2n} - \frac{22\dots2}{n}$ является полным квадратом.

54. Докажите, что число $\frac{11\dots1}{100} \frac{55\dots56}{100}$ является полным

квадратом.

55. Докажите, что число $(10^n + 10^{n-1} + \dots + 10)(10^{n+1} + 5) + 1$ является полным квадратом.

56. Найдите произведение двух трехзначных чисел, если оно втрое меньше шестизначного числа, полученного приписыванием одного из этих двух чисел вслед за другим.

57. Решите в натуральных числах уравнение $k! = 5 \cdot m! + 12 \cdot n!$.

58. Решите в натуральных числах уравнение $k! = 2 \cdot m! - 7 \cdot n!$.

59. Найдите все пары натуральных чисел a и b , удовлетворяющие равенству $a^b + 127 = \overline{ab}$.

60. Найдите все пары натуральных чисел a и b , удовлетворяющие равенству $a^b + 320 = \overline{ab9}$.

61. Найдите все пары натуральных чисел a и b , такие, что если к десятичной записи полученного числа a^2 приписать справа десятичную запись числа b , то получится число, большее произведения $a \cdot b$ в три раза.

62. Найдите все пары натуральных чисел a и b , такие, что если к десятичной записи числа a приписать справа

десятичную запись числа b^2 , то получится число, большее произведения $a \cdot b$ ровно в семь раз.

63. Решите в натуральных числах уравнение $3^m + 7 = 2^n$.

64. Решите в натуральных числах уравнение $3 \cdot 2^m + 1 = n^2$.

65. Решите в натуральных числах уравнение $[n \cdot \lg 2] + [n \cdot \lg 5] = 2010$, где $[x]$ – целая часть числа x .

66. Решите в натуральных числах уравнение $y^2 = 16 + z^x$, где z – простое число.

67. Найдите наибольшую сумму значений параметров a и b , если известно, что числа $a, a \cdot b, \overline{ab} + 2b^2 - b - 20, \overline{ba} + 2b^3 - 10b - 2$ образуют геометрическую прогрессию, причем $\overline{ab} + \overline{ba} -$ квадрат натурального числа.

68. Найдите наименьшую сумму значений параметров a и b , если известно, что числа $2a + 2, 3b - 3, \overline{ab} + 2b^2 - 7 - 2a, \overline{ba} + 2 + 5a - 6b$ образуют арифметическую прогрессию, причем $\overline{ab} - \overline{ba} -$ квадрат натурального числа и $a \neq 0$.

69. Найдите все значения параметров a и b , при которых числа $a, ab, \overline{ab} + 2b^2 - b - 20, \overline{ba} + 2b^2 - 10b - 2$ образуют геометрической прогрессию, а $\overline{ba} + \overline{ab} -$ квадрат натурального числа.

70. Найдите сумму квадратов всех значений параметров a и b , если известно, что числа $2a, 3b, \overline{ab} - 2a, \overline{ba} + 5a - 6b$ образуют арифметическую прогрессию, причем $\overline{ab} - \overline{ba}$ – квадрат натурального числа.

71. Найдите наибольшее натуральное число, из которого вычеркиванием цифр нельзя получить число, делящееся на 11.

72. Решите в натуральных числах уравнение $n^5 + n^4 = 7^m - 1$

73. Докажите, что $\underbrace{33\dots3}_n^2 = \underbrace{11\dots1}_n \underbrace{1088\dots89}_n$

74. Докажите, что $\underbrace{33\dots34}_n^2 = \underbrace{11\dots1}_{n+1} \underbrace{55\dots56}_n$

75. Докажите, что числа $10017, 100117, 1001117, \dots$ делятся на 53.

76. Докажите, что число $\underbrace{11\dots1}_n \underbrace{21\dots1}_n$ – составное.

77. Докажите, что число $\sqrt{\frac{44\dots4}{1980} - 11 \cdot \frac{44\dots4}{990} + 9}$ – целое.

78. Докажите, что если в числе 12008 между нулями вставить любое количество троек, то получится число, делящееся на 19.

79. Известно, что числа $\overline{ab71}$ и $\overline{b71a}$ делятся на простое трехзначное число p . Найдите p, a, b .

80. Установите, является ли дробь $\frac{19043}{20413}$ сократимой, и если является, то сократите ее.

81. Найдите несократимую дробь $\frac{p}{q} = \frac{123456788 \dots \overbrace{87654321}^{2000}}{1234567899 \dots \underbrace{987654321}_{1999}}$.

82. Найдите все значения n , при которых дробь $\frac{3n^3 - 8n^2 + 14n - 8}{3n - 5}$ сократима.

83. Найдите все значения n , при которых дробь $\frac{5n^3 + 2n^2 - 4n + 28}{5n + 7}$ сократима.

84. Найдите все значения n , при которых дробь $\frac{7n^2 + 11n + 4}{6n^2 + 5n}$ сократима.

85. Известно, что дробь $\frac{m}{n}$ несократима, а дробь $\frac{5m - 3n}{2m + 5n}$ сократима. На какое число ее можно сократить?

Ответы:

1. $a=2, b=5$.	21. 47.
2. 95768432109873546210 9876513240	22. 46.
3. $2^13^27^6, 3^12^27^6, 2^17^23^6,$ $3^17^22^6, 7^13^22^6, 7^12^23^6$.	23. 46.
4. 2500, 400.	24. (3;3),(3;-3).
5. $2^23^25^{10}, 2^23^{10}5^2, 2^{10}3^25^2$.	25. (1;2),(2;1).
6. $2^65^47^2, 2^65^27^4$.	26. 24.
7. 63.	27. $n=0, x=\pm 3$.
8. 1996	28. $n=0, k=2006$.
9. 1225.	29. $n=0, k=2007$
10. $n=k=3$.	30. 10989
11. $n=2, k=5$.	31. 142857.
12. 32, 64.	32. 34, 17.
13. $x=1, y=1$.	33. (13, 78); (26, 39).
14. (1, 2, 3); (2, 1, 3); (3, 3, 4).	34. (3, 3, 3); (2, 4, 4); (2, 3, 6).
15. (2; 1); (3, 3).	35. 857142
16. $x=16667, y=33334$	36. $n=625 \cdot 10^{k-2}$.
17. $x=4, y=8$.	37. (182; 14), (26; 26).
18. $n=0, m=\pm 1$.	38. (306; 18), (34; 34).
19. 6, 42, 1806	39. $m=150, n=30, m=650, n=26$.
20. $m=n=1$.	40. (32; 12), (90; 10), (8; -72), (6; -18), (-72; 8), (-18; 6).
	41. 11, 90, 13, 88, 17, 84, 19, 82

$$42. \frac{58}{93} < \frac{5}{8} < \frac{62}{99}.$$

$$43. \frac{19}{7}.$$

$$44. (3, 23).$$

$$45. \begin{aligned} x=1, y=2, z=-1; \\ x=2, y=1, z=-1. \end{aligned}$$

$$46. \begin{aligned} x=1, y=3, z=-1; x=3, \\ y=1, z=-1. \end{aligned}$$

$$47. n=2, k=1; n=3, k=3.$$

$$48. n=1, k=5.$$

$$49. 2, 6, 10, 14, 30, 42, 70, 210.$$

$$50. 01.$$

$$51. 2.$$

$$52. 88.$$

$$53. \underbrace{(33\dots3)}_n^2.$$

$$54. \underbrace{(33\dots34)}_{99}^2.$$

$$55. \underbrace{(33\dots34)}_n^2.$$

$$56. 55778$$

$$57. \begin{aligned} k=17, n=m=16; \\ n=5, k=7, m=6. \end{aligned}$$

$$58.$$

$$k=n=3, m=4; k=m=7, n=6.$$

$$59. a=1, b=28; a=14, b=1.$$

$$60. a=3, b=2; a=97, b=2.$$

$$61. \begin{aligned} a=1, b=5 \cdot 10^{k-1}; \\ a=2, b=8 \cdot 10^{k-1}. \end{aligned}$$

$$62. a=1, b=2.$$

$$63. n=4, m=2.$$

$$64. n=5, m=3; n=7, m=4.$$

$$65. 2011.$$

$$66. (7; 12; 2), (2; 5; 3).$$

$$67. 11.$$

$$68. 3.$$

$$69. a=2, b=9.$$

$$70. 85.$$

$$71. 987654321$$

$$72. n=2, m=2.$$

$$79. p=101, a=7, b=1.$$

$$80. \text{ на } 137; \frac{139}{149}.$$

$$81. \frac{11111111}{11111111}$$

$$82. n=7t+4.$$

83. $n = 11t + 3.$	
84. $n = 2t; n = 11t + 1.$	
85. на 31.	

Комментарии

1. Пусть b n -значное число. Тогда $\frac{b}{a} = a + \frac{b}{10^n}$ и

$$10^n(b - a^2) = ab. \text{ Далее, } (a, b) = 1 \Rightarrow (b - a^2, ab) = 1 \Rightarrow$$

$$b - a^2 = 1, ab = 10^n \Rightarrow a = 2^n, b = 5^n \Rightarrow a = 2, b = 5.$$

2. Рассмотрим число $N = 9876543210$ содержащее все цифры, но не делящееся на 11. У него сумма четных цифр равна 25, а сумма нечетных – 20. Чтобы это число делилось на 11, надо переставить местами нечетную цифру p и четную цифру q так, чтобы $25 - p + q - (20 - q + p) = 11$. Т.е. $q - p = 3$. Это варианты 8–5, 6–3, 4–1 и числа 957684321098735462109876513240

Можно начинать, например, с числа $N = 1234567890$

3. Если a делится на $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$, то $a = 2^x \cdot 3^y \cdot 7^z \cdot p$, а число делителей a равно $N(a) = (1+x)(1+y)(1+z)(1+t) = 42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$. Но число 42 имеет только три множителя, поэтому $p = 1$, а степени простых сомножителей равны одному из чисел 2, 3, 7. Возможны 6 вариантов: $(1+x, 1+y, 1+z)$ – перестановка трех чисел (2, 3, 7).

4. Решение аналогично предыдущему: a делится на $10=2 \cdot 5 \Rightarrow a=2^x \cdot 5^y \cdot p$, $N(a)=(1+x)(1+y)(1+t)=15=5 \cdot 3$. Число 15 имеет только два множителя, поэтому $p=1$, а степени простых сомножителей равны одному из чисел 5,3. Возможны 2 варианта: $a=2^2 \cdot 5^4=2500$, $a=2^4 \cdot 5^2=400$.

8. Пусть $n=p_1^x p_2^y p_3^z \dots$, тогда число делителей числа n равно $N(n)=(1+x)(1+y)(1+z)\dots=6=2 \cdot 3$. Значит n имеет всего 2 простых делителя, степени 1 и 2. Сумма всех делителей числа n равна $(1+p_1)(1+p_2+p_2^2)=3500=4 \cdot 5 \cdot 25 \cdot 7$. Так как p_1, p_2 — простые, то $p_1 \neq 2$, p_1+1 — четное, а $1+p_2+p_2^2$ — нечетное. Возможны варианты:

$$(1+p_1)(1+p_2+p_2^2)=500 \cdot 7=100 \cdot 35=20 \cdot 175=28 \cdot 125=140 \cdot 25=700 \cdot 5.$$

В первом случае $1+p_1=500$, $1+p_2+p_2^2=7 \Rightarrow p_1=499$, $p_2=2$, а в остальных случаях простых чисел с такими условиями не существует.

10. Докажем, что $n < 5$. Если $n \geq 5$, то левая часть равенства $1+2!+3!+\dots+n! \equiv 1+2!+3!+4! \pmod{5} \equiv 3 \pmod{5}$, а при делении на 5 правой части равенства (квадрата натурального числа) в остатке будет только 0,1,4. Осталось проверить числа $n=1,2,3,4$.

11. Докажем, что $n < 5$. Если $n \geq 5$, то левая часть равенства $13+5n+n! \equiv 3 \pmod{5}$, а при делении на 5 правой части равенства (квадрата натурального числа) в остатке может получиться только 0,1,4. Проверяем числа $n=1,2,3,4$.

12. Пусть $2^n = a \cdot 10^k + 2^m$. Если $k=1$, то $2^n = a \cdot 10 + 2^m$. Это два числа: $2^5 = 30 + 2$; $2^6 = 64 = 60 + 2^2$. Если $k=2$, то трехзначные степени двойки – это числа 128, 256, 512, которые не являются числами требуемого вида. Если $k=3$, то четырехзначные степени двойки – это числа 1024, 2048, 4096, 8192, которые опять не являются числами заданного вида. И так далее...

13. Если $x < y$, то правая часть исходного равенства делится на $x+1$, а левая – нет:

$$x!(1+(x+1)(x+2)\dots y) = x!(x+1)(x+2)\dots(x+y).$$

$$\text{Значит } x=y \Rightarrow 2 \cdot x! = (2x)! \Rightarrow 2 = (x+1)(x+2)\dots(2x) \Rightarrow x+1=2.$$

Почему других нет?

14. Запишем уравнение в виде $2(k!+n!) = m!$. Отсюда следует, что $k \leq n \leq m$ или $n \leq k \leq m$.

Если $n = k$, то $4n! = m!$ и, разделив обе части на $k!$, получим $4 = (n+1)(n+2)\dots m$. Т.е. $n+1 = 2$ или $n+1 = 4$. Если $n = 1$, то $4 = m!(\emptyset)$, а если $n = 3$, то $4 \cdot 3! = m! \Rightarrow m = 4$.

$$\text{Если } k > n, \text{ то } 2k!(1+(k+1)\cdot(k+2)\dots n) = m! \Rightarrow$$

$$2(1+(k+1)\dots n) = (k+1)(k+2)\dots m.$$

Отсюда следует, что $k+1 = n = 2$ и тройка чисел $(1; 2; 3)$, является решением, а, следовательно, и тройка $(2; 1; 3)$ – решение.

Ответ: $(3; 3; 4)$, $(1; 2; 3)$, $(2; 1; 3)$.

15. Заметим, что $n < 4$, иначе при делении числа k^2 на 4 в остатке будет получаться число 3, а это невозможно. Если $n = 1$, то $1 + 4 - 9 = k^2 \Rightarrow \emptyset$. Если $n = 2$, то $2 + 8 - 9 = k^2 \Rightarrow k = 1$. Если $n = 3$, то $6 + 12 - 9 = k^2 \Rightarrow k = 3$. Ответ: (2;1), (3;3).

16. $N = x \cdot 10^5 + y = (xy) \cdot p \Rightarrow y$ делится на $x \Rightarrow y = x \cdot n$.
 $x \cdot 10^5 + x \cdot n = (x \cdot xn) \cdot p \Rightarrow 10^5 + n = x \cdot n \cdot p \Rightarrow n$ делит 10^5 . Так как все числа пятизначные, то n -цифра и $n = 2, 4, 5, 8$.

Если $n = 2$, то $10^5 + 2 = 100002 = 2 \cdot 50001 = 2 \cdot 3 \cdot 16667 = 2 \cdot x \cdot p$. Так как все числа пятизначные, то возможен только один вариант:
 $x = 16667, y = 2x = 33334$

Если $n = 4$, то $10^5 + 4 = 100004 = 4 \cdot 25001 = x \cdot 2 \cdot p$. Так как числа пятизначные, то вариантов нет. Аналогично разбираются случаи $n = 5, 8$.

17. Обыграем четность чисел:

$$2xy = x^2 + 2y \Rightarrow x = 2p \Rightarrow 2py = 2p^2 + y \Rightarrow y = 2k.$$

$$2pk = p^2 + k \Rightarrow k = pt \Rightarrow pt = p + t \Rightarrow t = pn \Rightarrow pn = 1 + n \Rightarrow n = 1, p = 2.$$

18. $m^4 - 2n^2 = 1 \Rightarrow 2n^2 = m^4 - 1 \Rightarrow n$ – четное, а m – нечетное.

$$m^4 + n^4 = n^4 + 2n^2 + 1 = (n^2 + 1)^2 \Rightarrow n^4 = (n^2 + 1 - m^2)(n^2 + 1 + m^2).$$

Если $1 - m^2 < 0$, то $n^2 + 1 - m^2 < n^2$ и $n^2 + 1 + m^2$ делится на n^2 , а, следовательно, $1 + m^2$ должно делиться на 4, что невозможно.

Следовательно, $1 - m^2 = 0 \Rightarrow m = \pm 1, \Rightarrow n = 0$.

19. Пусть $N = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n \div (p_1 - 1)(p_2 - 1)(p_3 - 1) \dots (p_n - 1)$, где $p_1 < p_2 < p_3 < \dots < p_n$ – простые числа, причем, $p_1 - 1 = 1$, а $(p_2 - 1)(p_3 - 1) \dots (p_n - 1)$ – четные числа. Значит $p_1 = 2, p_2 - 1 = 2, p_3 - 1 = 6, p_4 = 42 \Rightarrow N = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 43 \cdot p_5 \dots = 1 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 42 \cdot (p_5 - 1)$. Так как p_5 – простое число, то $p_5 - 1$ – четное и может быть равно одному из чисел: $43 \cdot 2, 43 \cdot 3 \cdot 2, 43 \cdot 7 \cdot 2, 43 \cdot 21 \cdot 2$. Однако во всех этих случаях p_5 не является простым числом.

20. Так как m, n – натуральные числа, то $m^2 > m, n^2 > n$. Если $m \leq n$, то $n - m = (m^2 + n^2)(p - q)$, однако число слева меньше n , а число справа больше n . Значит $n - m = 0$. Далее, $n^3 + n = 2n^2 \cdot p \Rightarrow n^2 + 1 = 2np \Rightarrow n = 1$.

21. Число n^n делит $2009! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2009$, если в этом произведении встречаются числа $n, 2n, 3n, 4n, \dots, n \cdot n$. Так как $45 \cdot 45 = 2025$, то при любом $n < 45$ число n^n будет делить $2009!$. Пусть $n = 45$. Тогда $45 \cdot 44 = 1980$, поэтому 45^{44} делит $2009!$. Но $45 = 5 \cdot 9$, поэтому 45^{45} тоже делит $2009!$. Пусть $n = 46, 46 \cdot 43 = 1978$ поэтому 46^{43} делит $2009!$. Но $46 = 2 \cdot 23$ – составное, поэтому 46^{46} тоже делит $2009!$. Пусть $n = 47$ – простое число и $47 \cdot 42 = 1974$, поэтому 47^{42} делит $2009!$, а 47^{47} уже не делит $2009!$.

22. Доказательство аналогично предыдущему. Пусть $n=45$. Тогда $45 \cdot 44=1980$, поэтому 45^{44} делит 2013. Но $45=5 \cdot 9$, поэтому 45^{45} тоже делит 2013. Пусть $n=46, 46 \cdot 43=1978$ поэтому 46^{43} делит 2013. Но $46=2 \cdot 23$ – составное, поэтому 46^{46} тоже делит 2013. Пусть $n=47$ – простое число и $47 \cdot 42=1974$, поэтому 47^{42} делит 2013, а 47^{47} уже не делит 2013.

24. $2^x = y^2 - 1 = (y-1)(y+1) \Rightarrow$ числа $y-1, y+1$ степени 2, т.е. $y-1=2^p, y+1=2^p+2 \Rightarrow 2^x = 2^p(2^p+2)$. Если $p \geq 2$, то $2^{x-1} = 2^p(2^{p-1}+1) \Rightarrow 2^{p-1} = 1 \Rightarrow p-1=0 \Rightarrow p=1 \Rightarrow 2^x = 8$.

25. $\sqrt{5x-1} + \sqrt{5y-1} = 5 \Rightarrow \sqrt{5x-1} \leq 5 \Rightarrow x \leq \frac{26}{5} \Rightarrow x=1, 2, 3, 4, 5$.

Решим уравнение $\sqrt{5y-1} = 5 - \sqrt{5x-1}$ при всех возможных значениях x и получим ответ.

26. $p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$, а $p-1, p, p+1$ – три подряд стоящих числа, причем p – простое нечетное число. Поэтому $p-1, p+1$ – два четных числа, причем одно из них делится на 3.

27. Натуральное число x^2 при делении на 3 дает в остатке 0 или 1, а при $n > 0$ левая часть при делении на 3 даст в остатке 2. Значит $n=0, x^2=9$.

28. Одно решение получается сразу: $n=0, k=2006$. Докажем, что других решений нет. Если $n > 0$, то

$$2^n(1+2^n+\dots+2^{n(k-1)})=2\cdot 1003 \Rightarrow 2^n=2, 1+2+\dots+2^{k-1}=1003 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{2^k-1}{2-1}=1003. \text{ Однако, последнее уравнение не имеет решений.}$$

29. Решение аналогично предыдущему: $n=0, k=2010$. При $n>0$,

$$3^n(1+3^n+\dots+3^{n(k-1)})=3\cdot 670 \Rightarrow 3^n=3, 1+3+\dots+3^{k-1}=670 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{3^k-1}{3-1}=670. \text{ Однако последнее уравнение не имеет решений.}$$

30. Пусть $n = \overline{abcde}$, $\overline{abcde} \cdot 9 = \overline{edcba}$. Так как пятизначное число

при умножении на 9 остается пятизначным, то $a=1$, а $b=0$ или

$b=1$. При $b=0$

$$10cde \times 9 = edc01 \Rightarrow e=9 \Rightarrow 10cd9 \times 9 = 9dc01 \Rightarrow 9d+8 \text{ оканчивается}$$

на 0 $\Rightarrow d=8$. Далее $10c89 \times 9 = 98c01 \Rightarrow 9c+8$ оканчивается на

$$c \Rightarrow d=7. \text{ Если } b=1, \text{ то } 11cde \times 9 = edc11 \Rightarrow e=9, 9d+8$$

оканчивается на 1 $\Rightarrow d=7$. Далее, $11c79 \times 9 = 997c11 \Rightarrow 9c+7$

оканчивается на c , однако таких чисел не существует.

31. Пусть $n=1\cdot 10^m+x$, $k=10x+1$, $k=3n \Rightarrow 7x=3\cdot 10^m-1$, т.е.

$3\cdot 10^m \equiv 1 \pmod{7}$. Если делить "столбиком" получим, то можно

получить, что $300000=7\times 42857+1 \Rightarrow x=42857, n=142857$.

32. $n=10a+b$, $m=10x+y$, $10a+b=20x+2y \Rightarrow$

$$10a+b=20(a-b+2(a+b)) \Rightarrow 19b=12a \Rightarrow \emptyset.$$

Если $10a+b=20x+2y=20(a+b+2(a-b)) \Rightarrow 3b=4a \Rightarrow b=4, a=3$.

33. $78=13\cdot 2\cdot 3$, а 13—простое число. Тогда возможны варианты:

$$a=13\cdot 3\cdot 2, b=13; a=13\cdot 2, b=13\cdot 3.$$

34. Пусть $x \leq y \leq z$. $1 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{3}{x} \Rightarrow x \leq 3, x \neq 1$.

1) $x=2 \Rightarrow \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2} \Rightarrow y \neq 2$. Если $y=3$, то $z=6$. Если $y=4$, то

$z=4$. А если $y=5$, то $\frac{1}{5} + \frac{1}{z} \leq \frac{2}{5} < \frac{1}{2}$. Значит, при $x=2$ других

решений нет.

2) $x=3 \Rightarrow \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{2}{3}$. Если $y=3$, то $z=3$. Если $y=4$, то

$\frac{1}{4} + \frac{1}{z} \leq \frac{2}{4} < \frac{2}{3} \Rightarrow \emptyset$.

35. Пусть $n = \overline{abcxyz} = \overline{pq}$, $m = \overline{xyzabc} = \overline{qp}$, $n = 1000 \cdot p + q$. Тогда $1000 \cdot p + q = 6(1000 \cdot q + p) \Rightarrow 994 \cdot p = 5 \cdot 999 \cdot q \Rightarrow 142p = 857q$. Так как, $(p, q) = 1 \Rightarrow q = 142, p = 857$.

36. Пусть $n = \overline{6abc\dots} = 6 \cdot 10^k + p$.

Тогда $6 \cdot 10^k + p = 25p \Rightarrow 6 \cdot 10^k = 4p \Rightarrow p = 25 \cdot 10^{k-2} \Rightarrow n = 625 \cdot 10^{k-2}$.

37. $xy = 13(x + y) \Rightarrow xy - 13x - 13y + 169 - 169 = 0$.

$(x - 13)(y - 13) = 169 \Rightarrow x - 13 = 169, y - 13 = 1 \vee [-13 = 13, y - 13 = 13]$.

39. $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{25} \Rightarrow mn - 25(m + n) = 0 \Rightarrow (m - 25)(n - 25) = 625$.

Так как $m > n$, то $m - 25 > n - 25$ и возможны варианты:

$m - 25 = 625, n - 25 = 1; m - 25 = 125, n - 25 = 25$.

41. Пусть x, y – исходные числа. Тогда $100x + y + 100y + x = k^2 \Rightarrow$

$101(x + y) = k^2$. Из свойств делимости следует, что k делится на

101. Следовательно, $101(x+y) = p^2 101^2$. Но x, y – двузначные числа, поэтому $p=1, x+y=101$. Ответ: (11;90), (13;88), (17;84), (19;82).

42. Пусть $\frac{m}{n} < \frac{5}{8} < \frac{k}{p} \Rightarrow 5n - 8m > 0, 8k - 5p > 0$. Будем искать

дробь, ближайшую к $\frac{5}{8}$. Разность между двумя дробями будет наименьшей, если числитель наименьший, а знаменатель – наибольший. Сведем все к решению диофантовых уравнений:

$$\frac{5n-8m}{8n} \Rightarrow 5n-8m=1, 10 \leq n \leq 99 \Rightarrow n=5+8t, m=3+5t \Rightarrow t=11, \\ n=93, m=58;$$

$$\frac{8k-5p}{8p} \Rightarrow 8k-5p=1, 10 \leq p \leq 99 \Rightarrow k=2+5t, p=3+8t \Rightarrow t=12, \\ k=62, p=99.$$

43. $\frac{96}{35} = \frac{3456}{35 \cdot 36}, \frac{97}{36} = \frac{3395}{35 \cdot 36} \Rightarrow \frac{3395}{35 \cdot 36} < \frac{m}{n} < \frac{3456}{35 \cdot 36}$. Среди дробей,

знаменатель которых равен $35 \cdot 36 = 5 \cdot 7 \cdot 6^2$, выберем те, у которых числитель и знаменатель имеют общие множители (тогда можно будет сократить на этот множитель и уменьшить знаменатель).

Между числами 3395 и 3456 содержится только несколько чисел, пропорциональных 5,6,7: $3430=35 \cdot 98, 3420=36 \cdot 95, 3420=42 \cdot 81, 3444=42 \cdot 82$. Выпишем все дроби с этими числителями:

$$\frac{3420}{36 \cdot 35} = \frac{19}{7}, \frac{3430}{35 \cdot 36} = \frac{49}{18}, \frac{3402}{35 \cdot 36} = \frac{27}{10}, \frac{3444}{35 \cdot 36} = \frac{41}{15}.$$

$$44. p^6 - q^2 = 0,5(p - q)^2 \Rightarrow 2p^6 - 2q^2 = p^2 - 2pq + q^2 \Rightarrow$$

$3q^2 = p^2 - 2pq - p^6$. Отсюда следует, что простое число p делит

$3q$, т.е. p делит простое число 3 или простое число q . Но,

$p \neq q (p^6 - p^2 \neq 0)$, поэтому $p=3$, $3q^2 = 6q + 1449 \Rightarrow q=23, q=21$.

45. Из уравнения видно, что правая часть всегда нечетная, а левая будет нечетной, если одно число больше единицы, а другое – равно единице.

Пусть $x=1 \Rightarrow y!=10z+12 \Rightarrow y < 5 \Rightarrow y=2, z=-1$. Если $y \geq 5$, то 12 разделится на 10 без остатка.

48. Докажем, что $n \leq 4$. Если $n \geq 5$, то левая часть уравнения $12n! + 11^n - 1 + 3 = 12n! + 10(11^{n-1} + \dots + 1) + 3$ всегда даст в остатке 3 при делении на 5, а правая часть уравнения (квадрат натурального числа) при делении на 5 даст в остатке 0, 1 или

4. Рассмотрим все случаи: $n=1(12+11+2=25=5^2)$, а при $n=2, 3, 4(12n!+11^n + 2 \neq k^2)$,

49. НОК всех чисел равно $210=2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, следовательно, простые делители 2, 3, 5, 7 входят в разложение всех чисел в степени не выше первой. Если p – наименьшее число из A , то любое число из A имеет с $p \neq 1$ общий делитель. Произведение всех чисел не является полным квадратом и делится на $1920=2^7 \cdot 3 \cdot 5 \Rightarrow$ это числа 6, 10, 14, 30, 42, 70, 210, 105. Набор

2,6,10,14,30,42,70,210 условию задачи не удовлетворяет (произведение этих чисел полный квадрат).

50. Последняя цифра числа равна остатку от деления числа на 10. Найдем последнюю цифру числа $11^{10} - 1$:
 $11^{10} - 1 = (11 - 1)(11^9 + 11^8 + \dots + 11 + 1)$. В этом произведении оба сомножителя делятся на 10, поэтому число $11^{10} - 1$ оканчивается на два нуля.

51. Последняя цифра числа 2^n изменяется циклически в зависимости от значения $n: 2, 4, 8, 6, 2, \dots$. Найдем последнюю цифру числа 2^{3^4} : $2^{3^4} = 2 \cdot 2^{3^4 - 1}$, $3^4 - 1 = (9 - 1)(9 + 1) = 80$. $2^4 = 16 \Rightarrow 16^n$ оканчивается на 6 $\Rightarrow 2^{3^4 - 1}$ оканчивается на 6 $\Rightarrow 2^{3^4}$ оканчивается на 2.

52. $2^{999} = \frac{2^{1000}}{2}$. Докажем, что $2^{1000} - 1$ делится на 25.

$$2^{20} - 1 = (2^{10} - 1)(2^{10} + 1) = 1025 \cdot 1023 \Rightarrow 2^{1000} - 1 = (2^{20})^{50} - 1 = (2^{20} - 1)(\dots).$$

Т.е. $2^{1000} - 1$ делится на 25 и оканчивается на 00, 25, 75. Тогда 2^{1000} может оканчиваться на 01, 26, 76, но 2^{1000} делится на 4 и должно оканчиваться на 76. Вопрос: Назовите две последние цифры числа p , если известно, что $2p$ оканчивается на 76?

53.
$$\underbrace{11\dots1}_{2n} - \underbrace{11\dots1}_n = \frac{10^{2n} - 1}{9} + 2 \frac{10^n - 1}{9} = \frac{10^{2n} - 2 \cdot 10^n + 1}{9} = \frac{(10^n - 1)^2}{9}.$$

54.
$$\underbrace{11\dots1}_{100} \underbrace{55\dots56}_{100} = \underbrace{11\dots1}_{200} + \underbrace{44\dots4}_{100} + 1 = \frac{10^{200} - 1}{9} + 4 \frac{10^{100} - 1}{9} + 1 =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{10^{200} + 4 \cdot 10^{100} + 4}{9} = \frac{10^{200} + 2 \cdot 10^{100} + 1 + 2 \cdot 10^{100} + 2 + 1}{9} = \\
&= \frac{(10^{100} + 1) + 2(10^{100} + 1) + 1}{9} = \frac{(10^{100} + 2)^2}{9}. \text{ Наконец, } \frac{10^{100} + 2}{3} = \\
&= \frac{3 \cdot 10^{100} - 3 + 9}{9} = 3 \cdot \frac{10^{100} - 1}{9} + 1 = \underbrace{33\dots3}_{100} + 1 = \underbrace{33\dots34}_{100}
\end{aligned}$$

55. Домножим и разделим первую скобку на $9 = (10 - 1)$. Тогда

$$\frac{1}{9}(10^n + 10^{n-1} + \dots + 10)(10 - 1)(10^{n+1} + 5) + 1 = \frac{1}{9}(10^{n+1} - 1)(10^{n+1} + 5) + 1 =$$

$$= \frac{1}{9}(10^{2n+2} + 4 \cdot 10^{n+1} + 4) = \frac{(10^{n+1} + 2)^2}{9} = \left(\frac{10^{n+1} + 2}{3}\right)^2. \text{ Остается}$$

показать, что последняя дробь является целым числом:

$$\frac{10^{n+1} + 2}{3} = \frac{10^{n+1} - 1 + 3}{3} = \frac{10^{n+1} - 1}{3} + 1.$$

56. Пусть a, b – трехзначные числа, $\overline{ab} = 3ab \Rightarrow 1000a + b = 3ab$.

Отсюда следует, что $1000a = b \cdot (3a - 1)$ и $3a - 1$ делитель числа

1000. Но $3a - 1 \leq 300 - 1 = 299$ и $3a - 1$ может быть равно 500 или

1000. Если $3a - 1 = 500$, то $a = 167$, $b = 2a = 334$, $a \cdot b = 55778$

А уравнение $3a - 1 = 1000$ не имеет решений в целых числах.

57. Из уравнения $k! = 5 \cdot m! + 12 \cdot n!$ следует, что $k > m$, $k > n$.

Пусть $s = \max(m, n)$, $k = s + p$. Тогда $(s + p)! = 5 \cdot m! + 12 \cdot n! < 17s!$ и

$(s + 1)(s + 2) \dots (s + p) < 17$. Откуда следует, что $p < 3$, иначе

$(s+1)(s+2)(s+3) > 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$. Рассмотрим два случая:
 $p=1, k=s+1$ и $p=2, k=p+2$.

А) $p=1, k=s+1, n=m=s \Rightarrow (n+1)n! = 17n! \Rightarrow n+1=17, n=16$.

В) $p=1, k=s+1, m=s > n \Rightarrow (m+1)m! = 5m! + 12n! \Rightarrow (m-4)m! = 12n!$.

Отсюда следует, что

$$m \geq 5; 12n! = (m-4)m! > (m-4)(m)n! \Rightarrow 12 > (m-4)m \Rightarrow m=5, m=6.$$

Если $m=5 \Rightarrow 12n! = 5! \Rightarrow 12n! = 120 \Rightarrow n! = 10 \Rightarrow \emptyset$.

Если $m=6 \Rightarrow 12n! = 2 \cdot 6! \Rightarrow n! = 120 \Rightarrow n=5 \Rightarrow m=6, k=7$.

С) $p=1, k=s+1, n=s > m \Rightarrow (n+1)n! = 5m! + 12n! \Rightarrow (n-11)n! = 5m!$.

Отсюда $n \geq 11; 5m! = (n-11)n! > (n-11) \cdot n \cdot m! \Rightarrow 5 > (n-11)n \Rightarrow \emptyset$.

59. Пусть $a^b + 127 = \overline{ab}$. Если $a=1$, то $b=28$. Пусть $a \geq 2$.

Если $b < 9$ (b – цифра), то $a^b + 127 = 10a + b$. Если $b=1$, то

$$a + 127 = 10a = 1. \quad \text{Отсюда,} \quad 126 = 9a, \quad a = 14. \quad \text{Если} \quad b \geq 2, \quad \text{то}$$

$10a + b = a^b + 127 > a^2 + 127$. Отсюда получаем неравенство

$$a^2 - 10a + 118 \leq 0, \quad \text{которое не имеет решений в натуральных числах.}$$

Докажем, что при $a \geq 2$ и $b > 9$ задача не имеет решений.

Пусть b – n – значное число

$$(10^n - 1 \leq b < 10^n), \quad a^b + 127 = 10^n \cdot a + b.$$

Тогда $a^b + 127 > a^{b-1} \cdot a > 2^{b-1} \cdot a$, а $10^n + b < 10^n + 10^n < 10^n \cdot 2a$.

Отсюда, $2^{b-1} \cdot a < 10^n \cdot 2a \Rightarrow 2^{b-1} < 10^n$, где b – n – значное число.

Докажем, что последнее неравенство не верно, т.е. $2^{b-1} > 10^n$.

Так как, $b > 10^{n-1}$, то $2^{b-1} > 2^{10^n-2}$. Докажем, что $2^{10^n-2} > 10^n$ при всех $n > 2$. При $n=2$ неравенство имеет вид $2^{10^2-2} = 2^8 > 10^2$, а при переходе к $n+1$ левая часть неравенства увеличивается в 2^{90} раз, а правая – только в 10 раз.

61. По условию задачи $\overline{a^2b} = 3a \cdot b$. Пусть b – n -значное число ($10^{n-1} \leq b < 10^n$). Тогда

$$a^2 \cdot 10^n + b = 3ab \Rightarrow a^2 \cdot 10^n = b(3a-1) < 10^n \cdot (3a-1).$$

Среди решений неравенства $a^2 - 3a + 1 < 0$ содержится только два натуральных числа $a=1$ или $a=2$.

Если $a=1$, то $10^n + b = 3b \Rightarrow b = 5 \cdot 10^{n-1}$.

Если $a=2$, то $4 \cdot 10^n + b = 6b \Rightarrow 4 \cdot 10^n = 5b \Rightarrow b = 8 \cdot 10^{n-1}$.

62. По условию задачи $\overline{ab^2} = 7a \cdot b$. Пусть b – n -значное число ($10^{n-1} \leq b < 10^n$). Тогда $10^{2n-2} \leq b^2 < 10^{2n} \Rightarrow \overline{ab^2} > a \cdot 10^{2n-1} \Rightarrow$
 $\Rightarrow 7ab > a \cdot 10^{2n-1} \Rightarrow 10^{n+1} > 10b > 7b \geq 10^{2n-1}$.

Неравенство $10^{n+1} > 10^{2n-1}$ справедливо только при $n=1$, т.е

b – цифра и уравнение имеет вид $a \cdot 10^n + b^2 = 3ab$;

$b=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$; $n=1, 2$. Если $b=1$, то $10a+1=3a \Rightarrow \emptyset$.

Если $b=2$, то $a \cdot 10 + 4 = 14a \Rightarrow 4 \cdot a = 4 \Rightarrow a=1$.

Аналогичным способом убеждаемся, что при $b=3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ уравнение $a \cdot 10^n + b^2 = 3ab$ не имеет решений в натуральных

числах. Например, при $b=7$, уравнение будет иметь вид $a \cdot 100 + 49 = 49a$.

63. Из уравнения видно, что $2^n \equiv 1 \pmod{3}$, т.е. n – четное число ($n=2p \Rightarrow 2^{2p} = 4^p \equiv 1 \pmod{3}$). Далее, $3^m + 3 \equiv 0 \pmod{4} \Rightarrow m$ – четное ($3^{2k} + 3 = 9^k + 3 \equiv 1 + 3 \pmod{4}$). Наконец,

$$3^{2k} + 7 = 2^{2p} \Rightarrow 7 = (2^p)^2 - (3^k)^2 = (2^p - 3^k)(2^p + 3^k) = 1 \cdot 7 = 7 \cdot 1.$$

64. $3 \cdot 2^m = n^2 - 1 = (n-1)(n+1)$ – четное число, т.е. n – нечетное число. Возможны два варианта представления нечетного числа.

1) $n = 2p + 1$, где p – нечетное: тогда $3 \cdot 2^m = 2p(2p + 2) = 4p(p + 1)$.

Так, как p нечетное, то p делит 3 $\Rightarrow p = 1 \vee p = 3$. Если $p = 1$, то

$$3 \cdot 2^m = 4 \cdot 1 \cdot 2 \Rightarrow \emptyset. \text{ Если } p = 3, \text{ то } 3 \cdot 2^m = 4 \cdot 3 \cdot 4 \Rightarrow m = 4.$$

2) $n = 2^k \cdot p + 1$, где p – нечетное. Тогда

$$3 \cdot 2^m = 2^k \cdot p(2^k p + 2) = 2^{k+1} p(2^{k-1} p + 1). \text{ Отсюда следует, что}$$

$$m = k + 1, 3 = p(2^{k-1} p + 1) \Rightarrow p = 1, k - 1 = 1, m = 3, n = 5.$$

65. Пусть $a = n \cdot \lg 2$, $b = n \cdot \lg 5$. Тогда: a и b иррациональные числа; $a + b = n \cdot \lg 10 = n$; $a = [a] + \{a\}$, $b = [b] + \{b\}$.

Далее, $2010 = a + b = [a] + [b] + \{a\} + \{b\}$, причем $0 \leq \{a\} + \{b\} < 2$.

Отсюда следует, что $0 \leq \{a\} + \{b\} = 2010 - [a] - [b] = 2010 - n < 2$. Т.е.

$$\{a\} + \{b\} = 1, n = 2011.$$

66. $y^2 = 16 + z^x \Rightarrow z^x = y^2 - 16 = (y-4)(y+4) = p \cdot (p+8)$. Так как

z – простое, то $p=1$, либо $p=z^k$. Если $p=1$, то

$$p+8=9=3^2, y^2=16+9=25=5^2.$$

Если $p=z^k$, то $z^x = z^k(z^k+8)$. Значит, простое число z в

некоторой степени делит число $8 \Rightarrow z^k = 2 \Rightarrow z^k + 8 = 10$, что

невозможно. Или $z^x = 8 \Rightarrow z^k + 8 = 16 \Rightarrow z^x = 8 \cdot 16 = 144 = 12^2$.

69. $\overline{ab} + \overline{ba} = 11(a+b) \Rightarrow a+b=11$. Далее, знаменатель прогрессии

равен $q = \frac{ab}{a} = b > 1$ (b – цифра). Из свойств прогрессии

$$a \cdot b^2 = 10a + b + 2b^2 - b - 20, a \cdot b^3 = 10b + a + 2b^3 - 10b - 2.$$

Отсюда $(2-a)(b^2+10)=0, b^3(a-2)=a-2$. Так как a и b –

цифры, то $a=2, b=9$. Обратно, если $a=2, b=9$, то исходная

последовательность имеет вид $2, 2 \cdot 9, 2 \cdot 9^2, 2 \cdot 9^3$.

70. Если числа $2a, 3b, 10a+b-2a, 10b+a+5a-6b$ образуют арифметическую прогрессию, то $b=2a$. С другой стороны, a, b –

цифры, $a-b \leq 8$ и $\overline{ab} - \overline{ba} = 9(a-b) = p^2$. Отсюда

$a-b=1 \Rightarrow a=2, b=2$ или $a-b=4 \Rightarrow a=4, b=8$, а сумма

квадратов всех чисел равна 85.

71. Пусть $N = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1}$. В записи N не должно быть нулей или двух одинаковых цифр. Значит в записи N должно быть все 9 цифр, а наибольшее число такого вида $N = 987654321$

Докажем, что N не делится на 11. Действительно,

$$9-8+7-6+5-3+3-1+1=5 < 11.$$

72. Справедливо равенство $n^5 + n^4 + 1 = (n^2 + n + 1)(n^3 - n + 1)$.

Отсюда $7^m = (n^2 + n + 1)(n^3 - n + 1)$. Легко заметить, что при $n = 2$ $n^2 + n + 1 = 7$, $n^3 - n + 1 = 7$, т.е. пара $n = 2, m = 2$ – решение.

Докажем, что других решений нет. Пусть $n \geq 3$, тогда $n^2 + n + 1 > 1$, $n^3 - n + 1 > 1$ и $7^p = n^2 + n + 1$, $7^q = n^3 - n + 1$. Отсюда $7^p - 1 = n(n + 1)$, $7^q - 1 = n(n^2 - 1) \Rightarrow 7^p - 1 = (7^q - 1) \cdot k \Rightarrow q$ делит p .

Т.е. $n^3 - n + 1 = 7^p = 7^{qt} = (n^2 + n + 1)^t$. Однако,

$(n^2 + n + 1)^2 > (n^3 - n + 1)$, т.е. $1 < t < 2$, однако это неверно.

Следовательно, других решений нет.

73. Первый способ.

$$\underbrace{11\dots1}_{n+1}^2 = \left(\frac{10^n - 1}{3} \right)^2 = \frac{10^{2n+2} - 2 \cdot 10^{n+1} - 1}{9} = 10^{n+1} \cdot \frac{10^{n+1} - 1}{9} - \frac{10^{n+1} - 1}{9} =$$

$$\underbrace{11\dots100\dots0}_{n+1} - \underbrace{11\dots1}_{n+1} = \underbrace{11\dots1088\dots89}_n.$$

Второй способ.

$$\underbrace{33\dots3}_{n+1}^2 = \left(\frac{10^{n+1} - 1}{3} \right)^2 = \frac{10^{2n+2} - 2 \cdot 10^{n+1} + 1}{9} = \frac{10^n - 1}{9} \cdot 10^{n+2} + 8 \cdot \frac{10^{n+1} - 1}{9} + 1 =$$

$$\underbrace{11\dots100\dots0}_n + \underbrace{88\dots8}_{n+1} + 1.$$

74. Первый способ.

$$\underbrace{33\dots34}_n^2 = \left(\frac{10^{n+1} + 2}{3} \right)^2 = \frac{10^{2n+2} + 4 \cdot 10^{n+1} + 4}{9} = \frac{10^{2n+2} - 1 + 40 \cdot (10^n - 1) + 45}{9} =$$

$$\frac{10^{2n+2} - 1}{9} + 40 \cdot \frac{10^n - 1}{9} + 5 = \underbrace{11\dots1}_{2n+1} + \underbrace{44\dots40}_n + 5 = \underbrace{11\dots155\dots56}_n.$$

Второй способ. Заметим, что если $x = \underbrace{33\dots34}_n$, то $3x = \underbrace{100\dots02}_n$, а

$$(3x)^2 = \underbrace{100\dots0400\dots0}_n.$$

75. Первый способ.

$$\begin{aligned}
 x &= 100\underbrace{11\dots17}_n = \underbrace{100\dots0}_{n+3} + \underbrace{11\dots1}_{n+1} + 6 = 10^{n+3} + \frac{10^{n+1} - 1}{9} + 6 = \frac{1}{9}(9 \cdot 10^{n+3} + 10^{n+1} + 53) = \\
 &= \frac{1}{9} \cdot (900 \cdot 10^{n+1} + 10^{n+1} + 53) = \frac{1}{9} \cdot (901 \cdot 10^{n+1} + 53) = \frac{1}{9} \cdot (901 \cdot 10^{n+1} - 901 - 954) = \\
 &= \frac{1}{9} \cdot (901 \cdot (10^{n+1} - 1) + 954) = 53 \cdot \frac{1}{9} \cdot (17 \cdot (10^{n+1} - 1) + 18).
 \end{aligned}$$

Второй способ. Пусть $b_n = 100\underbrace{11\dots17}_n$. Тогда

$$b_{n+1} = 100\underbrace{11\dots17}_{n+1} = 100\underbrace{11\dots117}_{n+1} = b_n \cdot 100 + 17 = 100\underbrace{11\dots170}_{n+1} - 70 + 17 = 10 \cdot b_n - 53.$$

Отсюда следует, что если b_n делится на 53, то b_{n+1} тоже делится на 53. Так как $b_1 = 10017 = 53 \cdot 89$, то все доказано.

Третий способ. Из предыдущего

$$\begin{aligned}
 b_{n+1} - b_n &= 9 \cdot b_n - 53 = 9 \cdot 100\underbrace{11\dots17}_n - 53 = 9 \cdot (100\underbrace{11\dots11}_n + 6) - 53 = 9 \cdot 100\underbrace{11\dots1}_{n+1} + 1 = \\
 &= 90\underbrace{099\dots9}_{n+1} + 1 = 90\underbrace{100\dots0}_{n+1} = 901 \cdot 10^{n+1} = 53 \cdot 17 \cdot 10^{n+1}.
 \end{aligned}$$

76. $\underbrace{11\dots121}_{n+1} \underbrace{11\dots1}_n = \underbrace{11\dots100\dots0}_{n+1} + \underbrace{11\dots1}_n = \underbrace{11\dots1}_{n+1} \cdot \underbrace{100\dots01}_{n-1}$.

Например, легко заметить, что при нечетных n последнее произведение делится на 11^2 .

77. $\underbrace{44\dots4}_{1980} - 11 \cdot \underbrace{44\dots4}_{990} + 9 = 4 \cdot \frac{10^{1980} - 1}{9} - 11 \cdot 4 \cdot \frac{10^{990} - 1}{9} + 9 = \left(\frac{2 \cdot 10^{990} - 11}{3} \right)^2$.

Далее, $\frac{2 \cdot 10^{990} - 11}{3} = \frac{2(10^{990} - 1) - 9}{3} = 2 \cdot \underbrace{33\dots3}_{990} - 3 = \underbrace{66\dots63}_{989}$.

Второй способ. Пусть $a = \underbrace{11\dots1}_{990}$.

Тогда $\underbrace{44\dots4}_{1980} - 11 \cdot \underbrace{44\dots4}_{990} + 9 = 4a(9a + 1) + 4a - 44a + 9 = (6a - 3)^2$.

78. Первый способ.

$$\underbrace{12033\dots308}_n = 12 \cdot 10^{n+3} + \frac{10^n - 1}{3} \cdot 100 + 8 = \frac{1}{3} \cdot (360 \cdot 10^{n+1} + 10^{n+2} - 100 + 24) =$$

$$\frac{1}{3} \cdot (361 \cdot 10^{n+2} - 76) = 19 \cdot \frac{1}{3} \cdot (19 \cdot 10^{n+2} - 4) = \frac{19}{3} \cdot (19 \cdot (10^{n+2} - 1) + 15).$$

Легко заметить, что число в скобках делится на 3.

Второй способ. $a_1 = 120308 = 19 \cdot 6332$ – делится на 19.

Пусть $a_n = 12033\dots308$. Тогда

$$a_{n+1} = \underbrace{12033\dots308}_{n+1} = \underbrace{12033\dots3000}_n + 308 =$$

$$= \underbrace{12033\dots3080}_n + 228 = 10 \cdot a_n + 228 = 10a_n + 19 \cdot 12. \text{ Так как } a_1 \text{ делится}$$

на 19, то для любого n a_{n+1} делится на 19.

79. $\overline{ab71} = 1000 \cdot a + \overline{b71}$, $\overline{b71a} = 10 \cdot \overline{b71} + a$. Отсюда видно, что $\overline{ab71} \cdot 10 - \overline{b71a} = 9999a = 9 \cdot 11 \cdot 101 \cdot a$. Из свойств делимости следует, что это число должно делиться на трехзначное простое число p , а, значит, это число может быть равно только 101.

Далее, $\overline{ab71} = 71 + 100 \cdot \overline{ab} = 71 - \overline{ab} + 101 \cdot \overline{ab}$. Из условия задачи следует, что число $71 - \overline{ab}$ должно делиться на 101, а это возможно

только в случае $71 - \overline{ab} = 0 \Rightarrow a = 7, b = 1$.

80. Вычислим НОД этих чисел: $(20413, 19043) = (1370, 19043) =$
 $(1370, 19043 - 1370 \cdot 13) = (1370, 1233) = (137, 1233) = (137, 137 \cdot 9) = 137$.

81. Заметим, что $q - p = \overbrace{11\dots100\dots0}^{2007 \text{ } 8}$, а $q - 10p = \underbrace{11\dots1}_{2007}$. Отсюда

$$q - p = (q - 10p) \cdot 10^8 \Rightarrow (10^9 - 1)p = (10^8 - 1)q \Rightarrow \frac{p}{q} = \frac{10^8 - 1}{10^9 - 1}. \text{ то}$$

Ответ: $\frac{p}{q} = \frac{11111111}{111111111}$.

$$82. 3n^3 - 8n^2 + 14n - 8 = (3n - 5)(n^2 - n + 3) + 7.$$

Отсюда $(3n^3 - 8n^2 + 14n - 8, 3n - 5) = (7, 3n - 5)$. Так как число 7 – простое, то НОД этих чисел равен 1 или 7. В первом случае дробь несократима. Во втором, $7p = 3n - 5 \Rightarrow 3n = 7p + 5$.

Отсюда $n = 2p + 2 + \frac{p+2}{3}$. Так как n – целое, то $p = 3k + 1$,

$$n = \frac{7(3k+1)+5}{3} = 7k+4. \text{ Ответ: } n = 7k+4.$$

84. Дробь сократима, если $\frac{7n^2 + 11n + 4}{6n^2 + 5n} = \frac{p \cdot m}{p \cdot k}$, т.е. у числителя и

знаменателя есть общие делители. Заметим, что

$$\frac{7n^2 + 11n + 4}{6n^2 + 5n} = \frac{(n+1)(7n+4)}{n(6n+5)}.$$
 Дробь будет сократима, если у

сомножителей в числителе и знаменателе найдутся общие делители. Вычислим НОД всех сомножителей:

$$\text{НОД}(n+1, n) = 1; \text{НОД}(n, 7n+4) = (n, 4);$$

$$\text{НОД}(6n+5, n+1) = (-1; n+1) = (-1; n) = 1;$$

$$\text{НОД}(6n+5, 7n+4) = (5n+5, n-1) = (11, n-1).$$

Легко заметить, что при $n=2p$ или $n-1=11p$ не все НОД равны единице и сократить можно будет на 2 или 11.

Ответ: Если $n = 2p$, то можно сократить на 2. Если $n = 11p + 1$, то можно сократить на 11.

Содержание

Задачи	3
Ответы	12
Комментарии к решениям	14
Содержание	35

Учебное издание

**Задача С6
(Теория чисел на ЕГЭ)**

Составитель

Чуваков Валерий Петрович
(chv@uriit.ru)

Югорский физико–математический лицей
г. Ханты–Мансийск, ул. Мира, 151