

Югорский физико-математический лицей

В.П. Чуваков

Ускользящая парабола

**или
задачи, сводящиеся
к квадратичным**

Учебно-методическое пособие

Ханты-Мансийск
2012

В.П. Чуваков

Ускользящая парабола или задачи, сводящиеся к квадратичным: Учебно-методическое пособие, Ханты-Мансийск: Югорский физико-математический лицей, 28 с.

В пособии рассматриваются задачи повышенного уровня сложности с параметрами, сводящиеся к квадратичным. Подобные задачи часто встречаются на вступительных экзаменах в серьезные вузы и в разделе «С» на ЕГЭ.

Для некоторого класса задач сведение к квадратичным происходит за один шаг (замена переменных и начальных условий), для других - сведение к квадратичным целое искусство, требующее больших усилий и математического изящества.

Сведения о квадратичных функциях и задачах, сводящихся к исследованиям квадратичных функций, можно найти в работах [1 – 10].

Пособие предназначено для подготовки к предметным и вузовским олимпиадам по математике и Единому государственному экзамену.

Адресовано школьникам старших классов и преподавателям.

© Чуваков В.П., 2012

1. Основные сведения о квадратичной функции

Квадратным трехчленом называется выражение вида, $f(x)=ax^2+bx+c$, $D=b^2-4ac$ – дискриминант квадратного трехчлена.

1. Выделение «полного квадрата»

$$ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}.$$

2. График квадратного трехчлена – парабола с вершиной в

$$\text{точке } (x_b; y_b) = \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2-4ac}{4a}\right) = \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{D}{4a}\right).$$

3. График функции пересекается с осью OY в точке $y_0 = f(0) = c$.

4. Если $a > 0$, то функция $f(x) = ax^2 + bx + c$ монотонно убывает на интервале $(-\infty; x_b]$ и монотонно возрастает на интервале $[x_b; \infty)$.

5. Если $a < 0$, то функция $f(x) = ax^2 + bx + c$ монотонно возрастает на интервале $(-\infty; x_b]$ и монотонно убывает на интервале $[x_b; \infty)$.

6. Если $a > 0$, то $ax^2 + bx + c \geq \frac{4ac - b^2}{4a}$ для любого $x \in R$.

7. Если $a < 0$, то $ax^2 + bx + c \leq \frac{4ac - b^2}{4a}$ для любого $x \in R$.

8. Парабола $f(x) = ax^2 + bx + c$ симметрична относительно оси $x = x_b = \frac{-b}{2a}$.

9. Корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

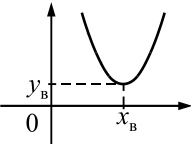
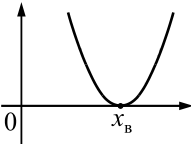
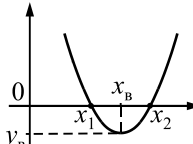
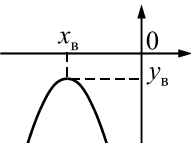
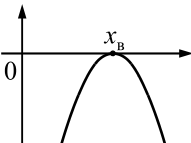
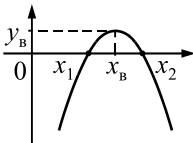
▪ Если $D < 0$, то уравнение не имеет корней;

▪ Если $D = 0$, то имеет один корень $x_1 = \frac{-b}{2a}$,

- Если $D > 0$, то два различных корня $x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

110. $x_2 - x_1 = \frac{\sqrt{D}}{a}$

11. Графическая интерпретация теоремы о существовании корней.

$a > 0$		
 <p>$D < 0$ (нет корней)</p>	 <p>$D = 0$ (один корень)</p>	 <p>$D > 0$ (два корня)</p>
$a < 0$		
 <p>$D < 0$ (нет корней)</p>	 <p>$D = 0$ (один корень)</p>	 <p>$D > 0$ (два корня)</p>

11. Теорема Виета.
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

12. Обратная теорема Виета: Если числа x_1, x_2 удовлетворяют соотношениям $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$, то x_1, x_2 являются корнями приведенного уравнения $x^2 + px + q = 0$.

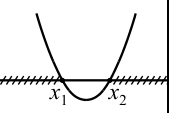
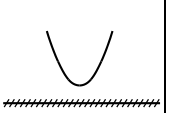
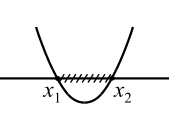

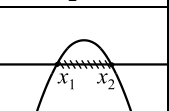

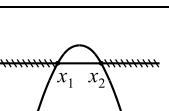
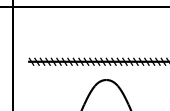
13. Разложение квадратного трехчлена на линейные множители $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

15. Корни x_1, x_2 одного знака, если $D > 0, x_1 x_2 = \frac{c}{a} > 0$.

Если $\frac{-b}{a} = x_1 + x_2 > 0$, то оба корня положительны, а если

$\frac{-b}{a} = x_1 + x_2 < 0$, то оба корня отрицательны.

14. Решение квадратных неравенств и их графическая интерпретация

	$ax^2 + bx + c > 0$		$ax^2 + bx + c < 0$	
	$D > 0$	$D < 0$	$D > 0$	$D < 0$
$a > 0$	 $x < x_1$ $x > x_2$	 $x \in R$	 $x_1 < x < x_2$	 нет решений
$a < 0$	 $x_1 < x < x_2$	 нет решений	 $x < x_1$ $x > x_2$	 $x \in R$

16. Используя теорему Виета, можно вычислять некоторые симметрические выражения от корней, не находя самих корней.

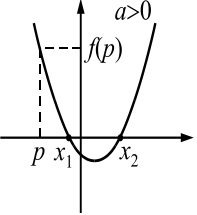
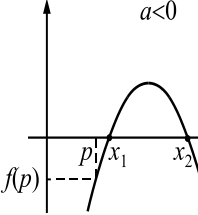
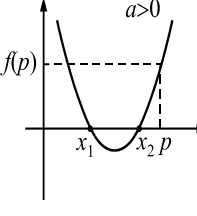
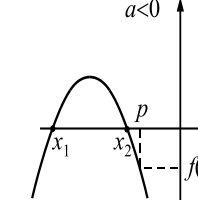
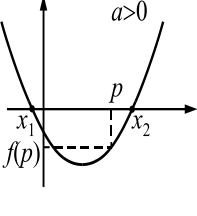
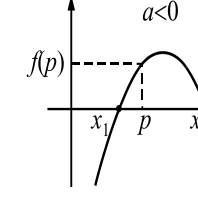
Например: $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2}, x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2,$

$$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2.$$

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2) = (x_1 + x_2)((x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2),$$

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}, \frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3}.$$

18. Расположение корней квадратного уравнения и их графическая интерпретация

Вопрос: Оба корня больше числа p			
		$\begin{cases} a > 0 \\ D > 0 \\ x_b = \frac{-b}{2a} > p \\ f(p) > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} a < 0 \\ D > 0 \\ x_b = \frac{-b}{2a} > p \\ f(p) < 0 \end{cases}$
Вопрос: Оба корня меньше числа p			
		$\begin{cases} a > 0 \\ D > 0 \\ x_b = \frac{-b}{2a} < p \\ f(p) > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} a < 0 \\ D > 0 \\ x_b = \frac{-b}{2a} < p \\ f(p) < 0 \end{cases}$
Вопрос: Число p находится между корнями			
		$\begin{cases} a > 0 \\ f(p) < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} a < 0 \\ f(p) > 0 \end{cases}$

В данном пособии рассматриваются задачи из [1-10] и авторские задачи.

2. Решение задач с помощью замены переменных

Алгоритм решения:

- сделайте замену переменных;
- сформулируйте условие задачи для новой переменной;
- сведите исходную задачу к классической задаче на квадратичную функцию с новыми условиями и решите ее;
- вернитесь к исходным переменным и запишите ответ.

Некоторые варианты замены переменных:

$$y = a^x (y > 0), \quad a^{|x|} = y (y > 1 \text{ при } a > 1, \quad y < 1 \text{ при } a < 1),$$

$$y = \sin x, \quad y = \cos x (|y| \leq 1), \quad a^{-|x|} = y (0 < y < 1), \quad y = \sqrt{x} (y \geq 0),$$

$$y = x^2 (y \geq 0), \quad \log_a \sin x = y (y < 0 \text{ при } a > 1, \quad y > 0 \text{ при } a < 1),$$

$$y = \sin x \cdot \cos x (-0,5 \leq y \leq 0,5), \quad a^{\sin x} = y (a > 1 \Rightarrow \frac{1}{a} < y < a),$$

$$y = x + \frac{1}{x} (y \geq 2), \quad y = \sin x + \cos x (-\sqrt{2} \leq y \leq \sqrt{2}),$$

Пример 2.1 При каких значениях параметра p уравнение $(p-4)9^x + (p+1)3^x + 2p-1=0$ не имеет решений?

Комментарии. Пусть $y=3^x > 0$. Новое условие: При каких значениях параметра уравнение $(p-4)y^2 + (p+1)y + 2p-1=0$ не имеет положительных решений? Уравнение может вообще не иметь решений, а может иметь решения, но не положительные. Возможны следующие варианты:

1) $p-4=0$, т.е. уравнение превращается в линейное

$$5t+7=0 \Rightarrow t = \frac{-7}{5} < 0.$$

2) $p-4 \neq 0$

2.1 $D < 0$, уравнение вообще не имеет решений;

2.2 $D \geq 0$ и решения не положительные

Рассмотрим эти случаи.

$$D = (p+1)^2 - 4(p-4)(2p-1) = -7p^2 + 38p - 15 = -(7p-3)(p-5).$$

$$2.1: D < 0 \Rightarrow p < \frac{3}{7}, p > 5.$$

$$2.2: \text{При } p - 4 > 0$$

$$D \geq 0, f(0) \geq 0, x_b < 0 \Rightarrow -\frac{3}{7} \leq p \leq 5, 2p - 1 \geq 0, -\frac{p+1}{p-4} < 0 \Rightarrow p > 4.$$

$$\text{При } p - 4 < 0$$

$$D \geq 0, f(0) \leq 0, x_b < 0 \Rightarrow 2p - 1 \geq 0, -\frac{p+1}{p-4} < 0, -\frac{3}{7} \leq p \leq 5 \Rightarrow \emptyset$$

$$\text{Ответ: } p < \frac{3}{7}, p \geq 4.$$

Пример 2.2 При каких значениях параметра a уравнение $5^{2x} - 10^x + 4^{x-1}(a-2) = 0$ имеет единственное решение?

Комментарии. Легко заметить, что уравнение легко сводится к квадратному заменой $t = \frac{5^x}{2^x} > 0$.

Новое условие: При каких значениях параметра уравнение $t^2 - t + \frac{a-2}{4} = 0$ имеет единственное положительное решение.

Возможны следующие варианты решения задачи:

1) $D = 0$, т.е. уравнение имеет единственное решение и оно положительное.

2) $D \geq 0$, но одно из решений не положительное.

Рассмотрим эти случаи.

$$D = 3 - a = 0 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow t^2 - 1 + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2} > 0.$$

$$D = a - 3 \geq 0, f(0) = \frac{a-2}{4} < 0 \Rightarrow a \leq 2. \quad \text{Ответ: } a \leq 2, a = 3.$$

Пример 2.3 При каких значениях параметра a уравнение $7^{2x} - 2 \cdot 21^x + (2a-1)9^x = 0$ имеет единственное решение?

Ответ: $a \leq 0,5, a = 1$.

Пример 2.4 При каких значениях параметра a неравенство $(a-1)9^x - (2a-1)3^x - 1 = 0$ имеет два различных корня?

Ответ: $a \geq 1$.

Пример 2.5 При каких значениях параметра a неравенство $a9^x + 4(a-1)3^x + a > 1$ справедливо для всех x ? Ответ: $a < -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Пример 2.6 При каких значениях параметра a уравнение $4^x + 2^{x+2} + 7 = a - 4^{-x} - 2 \cdot 2^{1-x}$ имеет решение? Ответ: $[17; \infty)$.

Пример 2.7 При каких значениях параметра a уравнение $9^{-|x-2|} - 4 \cdot 3^{-|x-2|} - a = 0$ имеет один корень?

Комментарии. Пусть $y = 3^{-|x-2|}$ ($0 < y \leq 1$). Новое условие: При каких значениях параметра уравнение $y^2 - 4y - a = 0$ имеет только один корень из промежутка $(0; 1]$?

1) $D = 16 + 4a = 0 \Rightarrow a = -4 \Rightarrow t^2 - 4t + 4 = 0 \Rightarrow t = 2 > 1 \Rightarrow \emptyset$.

2) $D > 0$, но только один корень из отрезка $(0; 1]$.

$$D = 16 + 4a > 0 \Rightarrow f(0) \cdot f(1) < 0 \Rightarrow a(a+3) < 0 \Rightarrow -3 < a < 0.$$

Если $D = 0 \Rightarrow a = 0, a = -3$.

При $a = 0$ уравнение имеет вид $t^2 - 4t = 0 \Rightarrow t = 0, t = 4 \Rightarrow \emptyset$.

При $a = -3$ уравнение имеет вид $t^2 - 4t + 3 = 0 \Rightarrow t = 3, t = 1$

Ответ: $-3 < a < 0$.

Пример 2.8 Найдите все значения параметра a , при которых значения функции $y = a4^x + (a+2)2^x + 2$ не положительны для всех x из промежутка $[0; 1]$.

Комментарии. Сделаем замену переменных $t = 2^x$ ($0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq t \leq 2$). Ответ: $a \leq -2$.

Пример 2.9 При каких значениях параметра a неравенство $4^{\cos x} - 2(a-3)2^{\cos x} + a+3 > 0$ выполняется для всех x ?

Ответ: $a < \frac{19}{3}$.

Пример 2.10 При каких значениях параметра b уравнение $2(b^2 + 1)\cos^2 x + 4b^2 \cos x + 1 = 0$ не имеет решений?

Комментарии. Сделаем замену переменных $y = \cos x$ ($|y| \leq 1$). Новое условие: При каких значениях параметра уравнение $2(b^2 + 1)y^2 + 4b^2 y + 1 = 0$ не имеет корней из промежутка $[-1; 1]$.

1) $D < 0$, уравнение вообще не имеет решений;

2) $D > 0$, но корни не принадлежат интервалу $[-1; 1]$

$$D = 16b^4 - 8(b^2 + 1) = 8(2b^4 - b^2 - 1) = 8(2b^2 + 1)(b^2 - 1).$$

$$D < 0 \Rightarrow b^2 < 1$$

$D > 0 \Rightarrow b^2 > 1$ и отрезок $[-1; 1]$ должен либо лежать справа от параболы, либо внутри параболы, либо слева от параболы. Рассмотрим эти случаи.

- $f(1) = 6b^2 + 3 > 0$, $f(-1) = 3 - 2b^2$, поэтому второй случай невозможен.

$$- f(-1) = 3 - 2b^2 > 0, x_b = \frac{-b^2}{b^2 + 1} < -1 \Rightarrow \emptyset$$

$$- f(1) = 6b^2 + 3 > 0, x_b = \frac{-b^2}{b^2 + 1} > 1 \Rightarrow \emptyset$$

$$- D = 0 \Rightarrow b^2 = 1 \Rightarrow 4t^2 + 4t + 1 = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{2} \Rightarrow b^2 = 1.$$

Ответ: $|b| \leq 1$.

Пример 2.11 При каких значениях параметра a уравнение $(a^2 + 1)\sin^2 x + 2a^2 \sin x + \frac{1}{2} = 0$ имеет хотя бы одно решение?

Ответ: $|a| \geq 1$.

Пример 2.12 При каких значениях параметра a уравнение $\sin x + \cos x + \sin x \cos x = a$ имеет решение?

Ответ: $-1 \leq a \leq 0,5 + \sqrt{2}$.

Пример 2.13 При каких значениях параметра a неравенство $\sin^6 x + \cos^6 x + a \sin x \cdot \cos x \geq 0$ выполняется для всех x ?

Комментарии.

$$\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3 \sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x).$$

Сделаем замену переменных $y = \sin x \cdot \cos x$ ($|y| \leq \frac{1}{2}$). Ответ: $|a| \leq \frac{1}{2}$.

Пример 2.14 Найдите все значения параметра a , при которых неравенство $a^2 + a - \sin^2 x - 2a \cos x > 1$ справедливо для любого x ? Ответ: $a < \frac{-3 - \sqrt{13}}{2}$, $a > 2$.

Пример 2.15 Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $\sin^2 x - \sin x \cos x - 2 \cos x^2 = a$ имеет корни.

Ответ: $a = 1$, $-\frac{\sqrt{10}+1}{2} \leq a \leq \frac{\sqrt{10}-1}{2}$.

Пример 2.16 Найдите множество значений функции $f(x) = 2 \cos 2x + 2 \cos x + 1$.

Комментарии. Сделаем замену переменных $t = \cos x$. Новое условие: Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $f(t) = 4t^2 + 2t - 1 = 0$ на отрезке $[-1; 1]$.

Так как вершина параболы расположена в точке $x_b = -\frac{1}{4} \in [-1; 1]$, то наименьшее значение на отрезке будет

$f(x_b) = f(-\frac{1}{4}) = -\frac{5}{4}$, а наибольшее - $f(1) = 5$. Ответ: $[-\frac{5}{4}; 5]$.

Пример 2.17 Найдите множество значений функции $f(x) = 2\cos 2x + 2\sin x - 1$. Ответ: $[-5; \frac{5}{4}]$.

Пример 2.18 При каких значениях a уравнение $\lg^2(\sin x) - 2a \lg(\sin x) - a^2 + 2 = 0$ имеет решение?

Комментарии. Сделаем замену переменных $y = \lg(\sin x) < 0$. Новое условие: При каких значениях параметра a уравнение $y^2 - 2ay - a^2 + 2 = 0$ имеет хотя бы одно отрицательное решение? Ответ: $-\sqrt{2} \leq a < -1, a \geq \sqrt{2}$.

Пример 2.19 Найдите все значения параметра a , при которых система $\begin{cases} x^2 + 4x - 3y + 3 = 0 \\ y^2 + (5 - 2a)y + a^2 - 2a = 0 \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение. Ответ: $\frac{3}{2} - \sqrt{2} \leq a < \frac{3}{2} + \sqrt{2}$.

Пример 2.20 При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{a(2^x - 2)} = 1 - 2^x$ имеет единственное решение?

Комментарии. Сделаем замену переменных $t = 2^x > 0, 1 - t \geq 0$. Новое условие: При каких значениях параметра уравнение $(1 - t)^2 = a(t - 2)$ имеет хотя бы одно решение, удовлетворяющее условию $0 < t \leq 1$? Ответ: $0 < a \leq 1$.

Пример 2.21 При каких значениях параметра a уравнения $\log_{4x}(1 + ax) = \frac{1}{2}$ имеет единственное решение? Ответ: $a < 0, a = 1$.

Пример 2.22 При каких значениях параметра a уравнения $\log_{(x+1)} ax = 2$ имеет единственное решение? Ответ: $a < 0, a = 4$.

Пример 2.23 Найдите все значения $b < 0$, при которых неравенство $2b \cos 2(x-y) + 8b^2 \cos(x-y) + 8b^2(b+1) + 5b < 0$ выполняется для любых x, y .

Комментарии. Если x, y принимают все возможные значения, то $\cos(x-y)$ принимает все значения от -1 до 1 . Сделаем замену переменных $\cos(x-y) = t$, $\cos 2(x-y) = 2t^2 - 1$. Новое условие: При каких значениях b неравенство $2b(2t^2 - 1) + 8b^2 t + 8b^2(b+1) < 0$ выполняется для всех x на отрезке $[-1; 1]$? *Ответ:* $b < -1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}$, $-\frac{1}{2} < b < 0$.

Пример 2.24 Найдите все значения параметра a , при которых для каждого x из промежутка $[1; 2)$ выражение $x^6 - 6x^3 - 1$ не равно выражению ax^3 ?

Комментарии. Сделаем замену переменных $t = x^3$. Новое условие: При каких значениях параметра корни уравнения $t^2 - 6t - 1 = at$ не принадлежат отрезку $[1; 8)$?

Возможны два варианта:

- 1) $D < 0$, уравнение вообще не имеет решений;
- 2) $D \geq 0$, но корни не принадлежат промежутку $[1; 8)$.

Но, $D = (6+a)^2 + 4 > 0$, поэтому первый случай не реализуется.

Если промежуток $[1; 8)$ лежит между корнями, то

$$f(1) = -6 - a < 0, f(8) \leq 0 \Rightarrow a \geq \frac{15}{8} \Rightarrow b^2 < 1$$

Если промежуток $[1; 8)$ лежит слева от корней, то

$$f(8) \geq 0, x_b = \frac{6+a}{2} > 8 \Rightarrow a > 5$$

Если промежуток $[1; 8)$ справа от корней, то

$$f(1) = -6 - a > 0, x_b = \frac{6+a}{2} < 1 \Rightarrow a < -6. \text{ Ответ: } a < -6, a \geq \frac{15}{8}.$$

Пример 2.25 Найдите все значения параметра a , для которых при всех $b > 0$ в интервале $(0; 0,5)$ существуют решения уравнения $\log_2(1-x-x^2) = a \log_{1-x-x^2} 2 + b$.

Комментарии. Сделаем замену переменных $y = \log_2 2(1-x-x^2)$. Так как $0 < x < 0,5$, то $\frac{1}{4} < 1-x-x^2 < 1$ и $-2 < \log_2(1-x-x^2) < 0$. Новое условие: При каких значениях параметра a для любого $b > 0$ уравнение $y^2 - by - a = 0$ имеет хотя бы один корень в интервале $(-2; 0)$? *Ответ:* $0 < a \leq 4$.

Пример 2.26 При каких значениях параметра a уравнения $\log_2(4^x - a) = x$ имеет два решения? *Ответ:* $a < -0,25, a > 0$.

Пример 2.27 Найдите все значения a , при которых уравнение $(a-1)\cos^2 x - (a^2 + a - 2)\cos x + 2a^2 - 4a = 2 = 0$ имеет более одного решения на отрезке $[0; 4\pi/3]$. *Ответ:* $\frac{1}{3} < a \leq \frac{3}{10}; a = 1$.

Пример 2.28 Найдите все значения параметра a , при каждом из которых отрезок $[-3; -1]$ целиком содержится среди решений неравенства $\frac{x-3a}{a-2x} < 0$. *Ответ:* $a < -6, a > -\frac{1}{3}$.

Пример 2.29 При каких значениях параметра a функция $y = \frac{3^{x^2}}{3^{ax-11}}$ имеет минимум при $x = 6$? *Ответ:* $a = 12$.

3. Задачи повышенной сложности

В данный раздел включены задачи, в которых трудности не только технические, а логические или идейные.

Пример 3.1 При каких значениях параметра a найдутся такие значения x , что числа $2^x - a$, -2^{-x-1} , $4^x + 4^{-x}$ образуют арифметическую прогрессию?

Комментарии.

Признак арифметической прогрессии: числа a, b, c образуют арифметическую прогрессию \Leftrightarrow когда $2b = a + c$.

Из признака арифметической прогрессии получаем:

$$-2 \frac{1}{2^{x+1}} = 2^x - a + 4^x + 4^{-x}. \text{ Сделаем замену переменных}$$

$t = 2^x + 2^{-x}$, $t \geq 2$, $t^2 = 4^x + 4^{-x}$. Новое условие: При каких значениях параметра уравнение $t^2 + t - 2 - a = 0$ имеет хотя бы одно решение больше 2? *Ответ: $a \geq 4$.*

Пример 3.2 При каких значениях параметра a найдутся такие значения x , что числа $5^{1+x} - a$, $-\frac{9}{2}5^{1-x}$, $25^x + 25^{-x}$ образуют арифметическую прогрессию? *Ответ: $a \geq 48$.*

Пример 3.3 Пусть x_1, x_2 – корни уравнения $x^2 + 4x + a = 0$, y_1, y_2 – корни уравнения $y^2 + 8y + b = 0$. Известно, что x_1, x_2, y_1, y_2 образуют арифметическую прогрессию. Найдите a, b . *Ответ: $a = 0, b = 12$.*

Пример 3.4 При каких значениях параметра a множество решений системы $\begin{cases} x^2 - (a-2)x - 2 \leq y, \\ 2x + y - a \leq 0 \end{cases}$ содержит отрезок $[-1; 0]$ оси OX ? *Ответ: $[0; 3]$.*

Пример 3.5 При каких значениях параметра a множество решений системы
$$\begin{cases} 8x^2 + 4(a+2)x - 4 \leq y, \\ 2x + 3y + (a+2) \geq 0 \end{cases}$$
 содержит отрезок $[0; \frac{1}{2}]$ оси OX ? *Ответ:* $[-2; -1]$.

Пример 3.6 При каких значениях параметра p уравнение $(2p - 5,75) \cdot 32^{0,8x+0,4} + (11p - 38) \cdot 0,25^{-x} + 13 - 3p = 0$ имеет ровно $(2-p)(p-4)$ решений?

Комментарии. Легко заметить, что $32^{0,4} = 2^4 = 16$, $32^{0,8x} = (32^{\frac{4}{5}})^x = 16^x = (4^x)^2$, $(0,25)^{-x} = 4^x$. Сделаем замену переменных: $t = 4^x$, $t > 0$. Новое условие: При каких значениях параметра p уравнение $16(2p - 5,75) \cdot t^2 + (11p - 38) \cdot t + 13 - 3p = 0$ имеет $(2-p)(p-4)$ положительных решений? Так, как полученное уравнение квадратное, то число $(2-p)(p-4)$ может быть равно 0, 1 или 2. Рассмотрев все случаи, можно получить ответ. *Ответ:* $p = 4$.

Пример 3.7 При каких значениях параметра a наименьшее значение функции $f(x) = 4^x - a2^{3+x} + 7a^2$ на отрезке $[-2; 0]$ отрицательно? *Ответ:* $\frac{1}{28} < a < 1$.

Пример 3.8 Найдите точку с наибольшей ординатой, удовлетворяющую системе неравенств

$$\begin{cases} y - 2x \geq 0 \\ -x^2 + 2ax - a^2 + a + 1 - y \geq 0. \end{cases}$$

Комментарии. Второе неравенство задает множество точек плоскости, лежащих под графиком параболы $y = -x^2 + 2ax - a^2 + a + 1$. Вершины этих парабол имеют координаты $(x_b; y_b) = (a; a + 1)$ и лежат на прямой $y = x + 1$.

Первое неравенство системы задает множество точек плоскости над графиком прямой $y = 2x$.

Если вершина параболы лежит выше прямой $y = 2x$, то вершина и будет искомой точкой, а если вершина параболы лежит ниже прямой, то точкой с наибольшей ординатой будет верхняя точка пересечения прямой и параболы.

Прямые $y = 2x$ и $y = x + 1$ пересекаются в точке $x = 1$. Таким образом, если $a \leq 1$, то вершина лежит выше прямой, а если $a > 1$, то ниже. *Ответ:* $x = a (a \leq 1)$, $x = a - 1 + \sqrt{2 - a} (1 < a \leq 2)$.

Пример 3.9 Действительные числа x, y таковы, что система $\begin{cases} x + y = 2a - 1, \\ x^2 + y^2 = a^2 + 2a - 3 \end{cases}$ имеет единственное решение. При каких значениях a произведение xy принимает наименьшее значение?

Комментарии. Из симметрии системы следует, что если пара (x, y) - решение, то и пара (y, x) - тоже решение. Тогда из условия единственности следует, что $x = y$. *Ответ:* $a = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Пример 3.10 При каких значениях параметра a система $\begin{cases} x^2 - (2a + 1)x + a^2 - 3 = y \\ y^2 - (2a + 1)y + a^2 - 3 = x \end{cases}$ имеет единственное решение?
Ответ: $a = -2$.

Пример 3.11 Найдите все значения параметра a , при которых система $\begin{cases} \log_2(3 - x + y) + 3 = \log_2(25 - 6x + 7y) \\ y + 2 = (x - 2a)^2 + a + 2x \end{cases}$ имеет ровно два решения?

Комментарии. Решим первое уравнение. $\begin{cases} 3 - x + y > 0 \\ 8(3 - x + y) = 25 - 6x + 7y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y > x - 3 \\ y = 2x + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -4 \\ y = 2x + 1. \end{cases}$ Подставим выражение y во второе уравнение. Новое условие: При каких

значениях параметра оба корня уравнения $2x+3=(x-2a)^2+a+2x$ больше -4 ? *Ответ:* $(-1;3)$.

Пример 3.12 Найдите все значения параметра a , при которых $\min_{[0;2]}(4x^2-4ax+a^2-2a+2)=3$.

Комментарии. Рассмотрим график параболы $f(x)=4x^2-4ax+a^2-2a+2$ с вершиной $x_b=\frac{a}{2}$. Исследуем зависимость наименьшего значения параболы на отрезке $[0;2]$ от расположения вершины параболы по отношению к этому отрезку.

Если $x_b \in [0;2]$, то $\min_{[0;2]}(4x^2-4ax+a^2-2a+2)=f(\frac{a}{2})=3 \Rightarrow -2a^2+2a+1=3 \Rightarrow \emptyset$.

Если $x_b < 0$, то $\min_{[0;2]}(4x^2-4ax+a^2-2a+2)=f(0)=3 \Rightarrow$

$$a^2-2a-1=0 \Rightarrow a=1-\sqrt{2}.$$

Если $x_b > 2$, то $\min_{[0;2]}(4x^2-4ax+a^2-2a+2)=f(2)=3 \Rightarrow$

$$a^2-10a+15=0 \Rightarrow a=5+\sqrt{10}. \quad \text{Ответ: } a=1-\sqrt{2}, a=5+\sqrt{10}.$$

Пример 3.13 Найдите все значения параметра a , при которых расстояние между вершинами парабол $y=2x^2+3ax+1$ и $y=x^2+ax-\frac{3}{8}a^2$ меньше $\frac{\sqrt{5}}{2}$. *Ответ:* $|a|<2$.

Пример 3.14 Найдите все значения параметра a , при которых система $\begin{cases} (a-1)y^2-2(3a+1)y+9a=0 \\ y=-\sqrt{x-3}+2 \end{cases}$ имеет решение.

Комментарии. Из второго уравнения следует, что $y \leq 2$. Новое условие: При каких значениях параметра a первое уравнение имеет хотя бы один корень ≤ 2 . Ответ: $-\frac{1}{15} \leq a \leq 8$.

Пример 3.15 Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $ax^2 + 5x + 4a^2 + 5 = 0$ имеет только целые корни.

Комментарии. Если $a = 0$, то $x = -1$ – целое решение.

Если $a \neq 0$, то по теореме Виета $x_1 + x_2 = -\frac{5}{a}$, $x_1 x_2 = 4a + \frac{5}{a}$.

Так как x_1, x_2 – целые, то числа $\frac{5}{a}$, $4a$ – тоже целые.

Рассмотрим эти условия:

$\frac{5}{a}$ – целое $\Rightarrow a = \pm 1, \pm 5, \pm \frac{1}{n}, \pm \frac{5}{n}$;

$4a$ – целое $\Rightarrow a = \pm p, \pm \frac{p}{2}, \pm \frac{p}{4}$, где n, p – натуральные числа.

Так как должны выполняться оба этих условия, то возможны варианты $a = \pm 1, \pm 5, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{5}{2}, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{5}{4}$.

Доказательство заканчивается перебором всех претендентов и проверкой целочисленности корней получающихся уравнений.

При $a = -\frac{1}{4}$ уравнение $x^2 - 20x - 21 = 0 \Rightarrow x_1 = 21, x_2 = -1$.

При $a = \frac{5}{2}$ уравнение $x^2 + 2x + 4 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = -2$.

При остальных значениях a либо дискриминант полученного уравнения отрицательный, либо корни не являются целыми числами.

Ответ: $a = 0, -\frac{1}{4}, \frac{5}{2}$.

Пример 3.16 Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $ax^2 + 3x + 2a^2 - 3 = 0$ имеет только целые корни. *Ответ:* $a = 0, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$.

Пример 3.17 При каких значениях параметра a уравнение $\log_a^2 \sin x + \log_a \sin x - a = 0$ имеет решение.

Комментарии. Сделаем замену переменных $y = \log_a \sin x$. Так как $0 < \sin x \leq 1$, то $\log_a \sin x \leq 0$ при $a > 1$ и $\log_a \sin x \geq 0$ при $a < 1$. Новые задачи:

- При каких значениях параметра $a > 1$ существует хотя бы одно неположительное решение уравнения $y^2 + y - a = 0$.

- При каких значениях параметра $0 < a < 1$ существует хотя бы одно неотрицательное решение уравнения $y^2 + y - a = 0$,

Ответ: $0 < a < 1, a > 1$.

Пример 3.18 Найдите все значения a , при каждом из которых числа $3a \cdot 8^a$ и $12a \cdot 8^a + 2 - 72a^2 \cdot 64^{a-0,5}$ лежат в интервалах $(1,5; 2,5)$ и $[6; 7)$.

Комментарии. Сделаем замену переменных $t = 3a \cdot 8^a$. Новое условие: При каких значениях параметра a оба числа t и $f(t) = 2 + 4t - t^2$ лежат в интервалах $(1,5; 2,5)$ и $[6; 7)$.

Из свойств параболы следует, что:

- если $t \in (1,5; 2,5)$, то $f(t) \in (5,75; 6]$, причем $f(2) = 6$. Условие

задачи будет выполнено, если $3a \cdot 8^a = 2 \Rightarrow 8^a = \frac{2}{3a} \Rightarrow a = \frac{1}{3}$. Из

свойств монотонности последнее равенство имеет единственное решение относительно параметра a ;

- если $t \in [6; 7)$, то $f(t) \in (-19; -10]$ и условие исходной задачи

не выполнено. *Ответ:* $a = \frac{1}{3}$.

Пример 3.19 Найдите все значения параметра p , при которых уравнение $\sin^2 x + (p-2)^2 \sin x + p(p-2)(p-3) = 0$ имеет на отрезке $[0; 2\pi]$ ровно три корня.

Комментарии. Сделаем замену переменных $t = \sin x$, $t \in [-1; 1]$. Если $|t| < 1$, то уравнение $\sin x = t$ имеет на отрезке $[0; 2\pi]$ ровно два корня.

Пусть t_1, t_2 корни уравнения $t^2 + (p-2)^2 \cdot t - p(p-2)(p-3) = 0$.

Исходное уравнение имеет три корня, если:

- $t_1 = t_2 = 0 \Rightarrow p_1 = 0, p_2 = 2, p_3 = 3$.
- $t_1 = 1, 0 < |t_2| < 1 \Rightarrow 1 + t_2 = -(p-2)^2 \Rightarrow t_2 = -1 - (p-2)^2 < -1$.
- $t_1 = -1, |t_2| < 1 \Rightarrow 1 - (p-2)^2 + p(p-2)(p-3) = 0, p = 3, p = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{5}$.
- $t_1 = 0, |t_2| > 1 \Rightarrow p_1 = 0, p_2 = 2, p_3 = 3$.

Проверка:

- $p = 0 \Rightarrow t = 0, t = 4 \Rightarrow$ три корня,
 - $p = 2 \Rightarrow t = 0 \Rightarrow$ три корня,
 - $p = 3 \Rightarrow t = 0, t = -1 \Rightarrow$ четыре корня,
 - $p = \frac{3 + \sqrt{5}}{5} \Rightarrow -1 + t_2 = -(p-2)^2 \Rightarrow t_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} < 1 \Rightarrow$ три корня
 - $p = \frac{3 - \sqrt{5}}{5} \Rightarrow -1 + t_2 = -(p-2)^2 \Rightarrow t_2 = -\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{2} < -1 \Rightarrow$ один корень.
- Ответ: $p = 0, p = 2, p = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$.

Пример 3.20 Найдите число целых значений параметра a , при которых множество решений неравенства

$(a-1)x^2 \leq (3a+2)x + 10a$ содержит все члены некоторой возрастающей арифметической прогрессии, первым членом которой является число -8 , а разность меньше или равна 6 . Ответ: 5 .

Пример 3.21 Найдите длину промежутка значений параметра a или сумму таких промежутков, если их несколько, при

которых среди решений неравенства $5 - \frac{ax-43}{x} \geq 0$ есть хотя бы одно трехзначное число, но нет ни одного четырехзначного числа.

Комментарии. Перепишем наше неравенство в виде $\frac{x(5-a)-43}{x} \geq 0$, решение которого легко получается из решения неравенства $(x(5-a)-43) \cdot x \geq 0$.

Если $(5-a) = 0$, то множество решений неравенства $-43 \cdot x \geq 0$ не удовлетворяет условию задачи.

Если $(5-a) > 0$, то множество решений неравенства можно представить как параболу с корнями $x_1 = 0, x_2 = \frac{43}{5-a} > 0$. Множество точек, в которых парабола больше нуля, – два луча $(-\infty; 0)$ и $(\frac{43}{5-a}; \infty)$ и, условие задачи опять не выполнено.

Если $(5-a) < 0$, то ветви параболы направлены вниз, а множество точек, в которых парабола больше нуля – отрезок $(0; \frac{43}{5-a})$.

По условию этот отрезок содержит хотя бы одно трехзначное число, но не содержит ни одного четырехзначного числа. Т.е. a удовлетворяет

неравенству $100 < \frac{43}{5-a} < 1000 \Rightarrow 5.043 < a < 5.43$, а

длина промежутка значений a равна $5.43 - 5.043 = 0.387$.

Ответ: 0,387.

Пример 3.22 Найдите все значения параметра a , для которых неравенство $x^2 + a^2 + 1 < (2a+3)|x|$ не выполняется ни для одного значения x из промежутков $[-4; -2]$ или $(2; 4]$.

Ответ: $(2 - \sqrt{5}; 4 + \sqrt{11})$.

Пример 3.23 При каких значениях параметра a система неравенств
$$\begin{cases} x^2 - 7x + 10 \leq 0, \\ 3 + x - x^2 \geq a \end{cases}$$
 имеет единственное решение?

Ответ: $a = 1$.

Пример 3.24 Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $(x^2 - 6|x| - a)^2 + 12(x^2 - 6|x| - a) + 37 = \cos \frac{18\pi}{a}$ имеет ровно два корня? Ответ: $a = \frac{9}{2}$.

Пример 3.25 Найдите все значения параметра a , при которых в множестве решений неравенства $\frac{8a^2x}{x} - x(x - 2a - 8) > 16a + a^2$ нельзя расположить два отрезка длиной 2 и 5, не имеющие общих точек. Ответ: $[1; 2] \cup [3; 5] \cup [6; 7]$.

Пример 3.26 Найдите все значения a , при каждом из которых числа $3a \cdot 8^a$ и $6a \cdot 8^{a+1} - 9a^2 \cdot 64^a - 53$ являются решениями неравенства $\log_{x-7,5} \left(\log_9 \frac{x-20}{x-12} \right) \geq 0$. Ответ: $a = \frac{2}{3}$.

Пример 3.27 При каких значениях параметра p уравнение $(1,5p - 7) \cdot 32^{0,4x+0,2} + (29p - 154) \cdot 0,125^{-\frac{x}{3}} + 11p - 41 = 0$ имеет ровно $10p - p^2 - 24$ решений? Ответ: $p = 6$.

Пример 3.28 Найдите все значения параметра a , при которых наименьшее значение функции $f(x) = 2ax + |x^2 - 8x + 7|$ меньше 1.

Комментарии. "Раскроем модуль". Если $x^2 - 8x + 7 \geq 0$, то график $f(x) = x^2 + 2(a-4)x + 7$ - парабола с ветвями, направленными вверх и координатами вершины $x_b = 4 - a$. А если $x^2 - 8x + 7 < 0$, то график $f(x) = -x^2 + 2(a+4)x + 7$ - парабола с ветвями, направленными вниз. Возможны два варианта расположения вершины первой параболы:

1) $4 - a \in [1; 7]$, т.е. $-3 \leq a \leq 3$, тогда наименьшее значение будет достигаться в той точке, которая находится дальше от вершины параболы. При $0 \leq a \leq 3$ наименьшее значение функции будет достигаться в точке $x = 1$ и $f(1) = 2a < 1 \Rightarrow 0 \leq a < \frac{1}{2}$. При $-3 \leq a < 0$ наименьшее значение функции будет достигаться в точке $x = 7$ и $f(7) = 14a < 1 \Rightarrow -3 \leq a \leq 0$. В итоге в первом случае получаем условие $-3 \leq a < \frac{1}{2}$.

2) $4 - a \notin [1; 7]$, т.е. $a < -3$ или $a > 3$. Тогда наименьшее значение будет достигаться в вершине параболы $x_b = 4 - a$ и $f(4 - a) = (4 - a)^2 + 2(a - 4)(4 - a) + 7 = 8a - 9 - a^2 < 1$. Отсюда получаем условие $a^2 - 8a + 10 > 0 \Rightarrow a < 4 - \sqrt{6}$ или $a > 4 + \sqrt{6}$. Т.е. во втором случае получим условие $a < -3$ или $a > 4 + \sqrt{6}$. Объединим оба варианта. *Ответ:* $a < \frac{1}{2}; a > 4 + \sqrt{6}$.

Пример 3.29 При каких значениях параметра p уравнение $3\cos^2 x + p\cos x + p(p+3) = 0$ имеет ровно три корня на отрезке $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

Комментарии. Сделаем замену переменных: $t = \cos x$. Каждый корень уравнение $3t^2 + p \cdot t + p(p+3) = 0$ дает на отрезке $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ один или два корня уравнения $t = \cos x$.

Учитывая свойства графика $y = \cos x$, исходное уравнение будет иметь три корня, если $t_1 = 1$, а $0 \leq t_2 < 1$.

Тогда исходное уравнение будет иметь корни $x = 0$, $x = \pm \arccos t$.

Если $t_1 = 1$ — решение, то

$$3 + p + p^2 + 3p = 0 \Rightarrow p^2 + 4p + 3 = 0 \Rightarrow p = -1, p = -3.$$

$p = -1 \Rightarrow 3t^2 - t - 2 = 0 \Rightarrow (3t + 2)(t - 1) = 0 \Rightarrow$ нет второго положительного решения.

$p = -3 \Rightarrow 3t^2 - 3t = 0 \Rightarrow 3t(t - 1) = 0 \Rightarrow t = 0, t = 1 \Rightarrow$ три решения исходного уравнения.

Ответ: $p = -3$.

Пример 3.30 При каких значениях параметра p уравнение $3 \sin^2 x + p \sin x + p(p + 4) = 0$ имеет ровно три корня на отрезке $[0; \pi]$. *Ответ:* $p = -4$.

Пример 3.31 При каких значениях параметра a функция $f(x) = x^2 - 2|x - a^2| - 10x$ имеет хотя бы одну точку максимума? *Ответ:* $2 < |a| < \sqrt{6}$.

Список дополнительной литературы

1. Белоносов В.С., Фокин, М.В. Задачи вступительных экзаменов, Новосибирск: Сиб. Унив. Из-во, 2003
2. Дорофеев Г.В., Потапов М.К., Розов Н.Х. Пособие по математике для поступающих в вузы, -М.: Дрофа, 2002
3. Григорян А.А., Шикин Е.В, Шикина Г.Е. Математика. Пособие для абитуриентов, -М.: Аспект Пресс, 2002
4. ЕГЭ 2007. Математика. Учебно-тренировочные материалы для подготовки учащихся. /ФИПИ-М.: Интеллект-Центр, 2007.
5. ЕГЭ. Математика. Контрольно-измерительные материалы: 2008.- М.: Просвещение, СПб.
6. А.Г. Клово. Экзаменационные материалы для подготовки к ЕГЭ. ЕГЭ -2008. Математика. М.:ФГУ ФЦТ»
7. Колесникова С.И. Математика. Решение сложных задач ЕГЭ. – М.: Айрис-Пресс, 2007
8. Кравцов С.В. и др. Методы решения задач по алгебре: от простых до самых сложных - М: Экзамен, 2002
9. Родионов Е.М. Математика. Решение задач с параметрами, - М.: Из-во НЦ ЭНАС, 2006
10. Ткачук В.В. Математика абитуриенту -М.: МЦНМО, 2008
11. Шабунин М. И. Математика для поступающих в вузы, -М.: Бином. Лаборатория знаний, 2004
12. Чуваков В.П. Квадратичная функция. Учебно-методическое пособие: Редакционно-издательский центр НГУ, ЮФМА, 2008

Содержание

1. Основные свойства параболы	3
2. Решение задач с помощью замены переменных	7
3. Задачи повышенной сложности.....	155
Список дополнительной литературы	26
Содержание	27

Учебное издание

Ускользящая парабола
или
задачи, сводящиеся к квадратичным

Составитель

Чуваков Валерий Петрович
(chv@uriit.ru)

Югорский физико-математический лицей
г. Ханты-Мансийск, ул. Мира, 151