Открытая физико-математическая олимпиада 2017

Математика

8 класс

1. Можно ли числа от 99 до 200 расставить в ряд так, любые два соседних числа будут отличаться либо на 2, либо в 2 раза?

2. В школе 450 учеников. Они сидят по двое за 225 партами так, что ровно половина всех девочек школы сидят с мальчиками. Докажите, что их не удастся пересадить (за те же 225 парт) так, чтобы ровно половина всех мальчиков школы сидели с девочками.

3. Квадрат 20×20 разбит на единичные квадратики. Несколько сторон единичных квадратиков стерты, причем стертые отрезки не имеют общих концов, а на верхней и правой сторонах квадрата стертых отрезков нет. Докажите, что из левого нижнего угла квадрата можно добраться в правый верхний по нестертым отрезкам.

4. В треугольнике ABC проведена биссектриса BL, и на ее продолжении за точку L выбрана точка K, для которой $LK = AB$. Оказалось, что $AK \parallel BC$. Докажите, что $AB > BC$.

Решения и критерии оценивания.

Решение каждой задачи оценивается целым числом от 0 до 7. Максимальное количество баллов равно 28.

1. **Ответ:** да, можно. Например: 199, 197, . . . , 103, 101, 99, 198, 196, 194, . . . , 102, 100, 200. Есть другие варианты.

   Критерии. Приведена верная последовательность – 7 баллов, другой ответ – 0 баллов.

2. **Доказательство**. По условию задачи, половина всех девочек сидит с мальчиками, а значит, вторая половина девочек сидит друг с другом, то есть, половина всех девочек есть четное число. А общее число девочек кратно 4. Если бы требуемая пересадка была возможна, то и число всех мальчиков делилось бы на 4, а значит, и общее число учеников школы было бы кратно 4. Однако число 450 не делится на 4. Следовательно, требуемая пересадка учеников невозможна.

   Критерии. Верное доказательство – 7 баллов, доказано, что число девочек кратно 4 – 2 балла.

3. **Доказательство.** Из каждого узла таблицы (начиная с левого нижнего угла) будем двигаться только вверх или вправо. Покажем, что мы всегда можем следовать этому алгоритму. Действительно, в каждый узел, за исключением начального, мы приходим либо слева, либо снизу, и оказываемся в левой нижней вершине некоторой клетки. Тогда, мы заведомо сможем сдвинуться по нестертому отрезку вверх, а если отрезок, ведущий вверх, стерт или мы на верхней границе квадрата, то можем сдвинуться вправо (оба нужных нам отрезка не могут быть стерты, поскольку стертые отрезки не пересекаются). Таким образом, следуя нашему алгоритму, мы достигнем правой или верхней границы квадрата, по отрезкам которых пройдем в правую верхнюю вершину.

   Критерии. Обоснованное описание продвижения к правой верхней вершине – 7 баллов, рассмотрение частных случаев – 1 – 2 балла.

4. **Доказательство.** Первое решение. Из параллельности AK и BC имеем $\angle AKB = \angle KBC = \angle ABK$. Следовательно, треугольник ABK равнбобедренный и AB = AK = LK. А значит, треугольник AKL тоже равнобедренный и $\angle KAL$ = $\angle ALK$. Далее, $\angle KAL = \angle BCL$, как внутренние накрест лежащие при пересечении секущей AC параллельных прямых AK и BC,

а $\angle ALK = \angle CLB$, как вертикальные. Таким образом, $\angle BCL = \angle BLC = \angle ABL + \angle BAL > \angle BAL$. Поскольку в треугольнике против большего угла лежит большая сторона, то $AB > BC$.

Второе решение. Как и в первом случае, доказывается равенство сторон $AB = AK = LK$ и равенство углов $\angle BCL = \angle BLC$. Из последнего следует, что BCL равнобедренный и $BC = BL$. Тогда из треугольника ABK по неравенству треугольника имеем $AB + AK > BK$. Учитывая доказанные равенства, получаем $AB + AB > BL + LK = BC + AB$, откуда $AB > BC$.

Критерии. Верно доказанное неравенство – 7 баллов, доказано, что треугольник BCL равнобедренный – 3 балла.