Открытая физико-математическая олимпиада для обучающихся общеобразовательных организаций Ханты-Мансийского автономного округа – Югры

Математика

Условия и решения задач

8 класс

1. Дома у Пети четверо часов, причем они все показывают неверное время: первые часы ошибаются на 2 минуты, вторые — на 3 минуты, третьи — на 4 минуты и четвертые — на 5 минут. Петя, опаздывая в школу, решил узнать точное время и увидел такие показания часов: 13 : 54, 13 : 57, 14 : 02 и 14 : 03. Помогите Пете определить точное время.

2. Докажите, что для любых чисел a, b и c имеет место неравенство

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac.$$

3. В треугольнике ABC проведена медиана BM. Угол $ABM = 40°$, угол $CBM = 70°$, сторона AB равна 10. Найдите длину медианы BM.

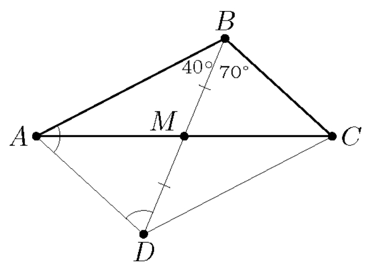
4. По кругу стоят 10 чисел. Между каждыми соседними числами записали новое число, равное модулю их разности. Докажите, что новые числа можно разбить на две группы с равной суммой.

Решение каждой задачи оценивается целым числом от 0 до 7. Максимальное количество баллов равно 28.

1. Ответ: 13 : 59.
   Решение. Показания первых и четвертых часов различаются на 9 минут. Значит, из них одни ошибаются на 4 минуты, а другие — на 5 минут. Следовательно, точное время: 13 : 59 или 13 : 58. В первом случае вторые часы на 2 минуты отстают, а третьи — на три минуты спешат. Это не противоречит условию задачи. Второй случай невозможен, так как часы, показывающие 13 : 57, ошибаются ровно на 1 минуту, что противоречит условию.
   Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 балла. Обосновано, что точное время может быть либо 13:59 либо 13:58 – 3 балла.

2. Решение: Из очевидных неравенств $(a-b)^2 \geq 0$, $(b-c)^2 \geq 0$, $(a-c)^2 \geq 0$, раскрыв скобки и перегруппировав члены, получаем $a^2 + b^2 \geq 2ab$, $b^2 + c^2 \geq 2bc$, $a^2 + c^2 \geq 2ac$. Сложив эти три неравенства, получаем $2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2bc + 2ac$. Разделив на 2, получаем требуемое.

3. Ответ: 5 см.
   Решение: Продлим медиану B за точку M на её длину и получим точку D. Четырехугольник $ABCD$ параллелограмм, так как его диагонали точкой пересечения делятся пополам. Значит угол ADB, равный CBD, равен $70°$. Тогда угол BAD равен $180° - 40° - 70° = 70°$. Следовательно, треугольник ABD равнобедренный. Тогда $AB = BD$. Откуда $BM = 5$см.



<u>Комментарий</u>. Верный ответ без обоснования — *0 баллов*. Идея достраивания треугольника до параллелограмма без дальнейшего содержательного продвижения — *2 балла*.

4. Решение: Обозначим 10 чисел через x_i, а новые числа — через y_i. Имеем $(x_1 - x_2) + (x_2 - x_3) + (x_3 - x_4) + (x_5 - x_6) + (x_6 - x_7) + (x_7 - x_8) + (x_8 - x_9) + (x_9 - x_{10}) + (x_{10} - x_1) = 0$. Действительно, каждое x_i входит в эту сумму два раза: один раз со знаком "+", а второй раз — со знаком "−". Поэтому все x_i сократятся. Заметим, что каждая из величин в скобках $(x_i - x_{i+1})$ по модулю равна y_i. Значит, это равенство можно переписать так: $\pm y_1 \pm y_2 \pm y_3 \pm y_4 \pm y_5 \pm y_6 \pm y_7 \pm y_8 \pm y_9 \pm y_{10} = 0$, где перед некоторыми y_i стоит знак "+", а перед остальными — "−". Возьмем все числа y_i, перед которыми стоят знаки "+" в одну группу, а остальные — в другую. Ясно, что группы будут с равной суммой.
   <u>Комментарий.</u> Правильный пример – 1 балл.