Открытая физико-математическая олимпиада для обучающихся общеобразовательных организаций Ханты-Мансийского автономного округа – Югры

Математика

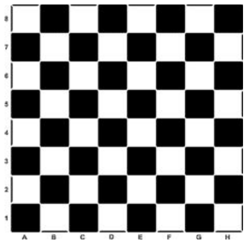
Условия и решения задач

7 класс

1. Петя решил взвесить на весах три тела. Для этого у него есть 5 гирек с маркировками 1 г, 2 г, 5 г, 10 г и 20 г. После взвешиваний оказалось, что масса первого тела равна 7 г, масса второго – 12 г, масса третьего – 22 г. А взвесив их вместе, Петя получил, что их общая масса равна 38 г. Петя вспомнил, что одна из гирек дефектная: более лёгкая или более тяжёлая, чем указано. Определите, какая из гирек дефектная, и как её надо промаркировать.

2. В треугольнике MNK угол $NMK = 20°$, угол $NKM = 60°$. На стороне MN взята точка F так, что $NF = NK$. Найдите длину FK, если длина MF равна 7 см.

3. Может ли конь с левого нижнего угла шахматной доски за 2017 ходов оказаться в верхнем правом углу? (Шахматный конь ходит буквой «Г»).



4. Квадратная таблица 7×7 раскрашена в 7 цветов, причем в каждый цвет окрашено 7 клеток и раскраска симметрична относительно одной из диагоналей. Докажите, что все клетки этой диагонали раскрашены в разные цвета.

Решение каждой задачи оценивается целым числом от 0 до 7. Максимальное количество баллов равно 28.

1. Ответ: дефектная гиря 1г, правильная маркировка 4 г или гиря 2 г, правильно $^1/_2$г.
   Решение. По правилу взвешивания, принятом в школе, тело кладется на одну чашу, а гири на другую. Для взвешивания первого тела потребовались две гири: 2г и 5г; второго тела – 2 г и 10 г, третьего – 2 г и 20 г. При взвешивании всех трех тел одновременно использованы все гири, т.к. 38=1+2+5+10+20.
   Докажем, что гирьки, использовавшиеся по одному разу (20 г, 10 г, 5 г), не могут быть дефектными.
   Предположим, что гиря 5 г дефектная. Обозначим за x г правильную массу этой гири, тогда общая масса трех тел (при взвешивании по отдельности) равна $2 + x + 12 + 22$, с другой стороны (при взвешивании всех вместе) $1 + 2 + x + 10 + 20$. Приравняв, получим уравнение $2 + x + 12 + 22 = 1 + 2 + x + 10 + 20$, которое не имеет решения.
   Аналогично доказывается для гирь 10 г и 20 г.
   Рассмотрим оставшиеся два случая:

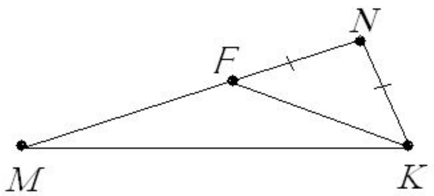
1) дефектная гиря 1 г, так как не использовалась при взвешивании каждого тела по отдельности. Тогда массы тел 7 г, 12 г, 22 г верные, и общая масса 41=7+12+22 г, что отличается на 41-38=3 г от полученной при взвешивании. Получаем, что правильная маркировка этой гири 4 г;

2) дефектная гиря 2 г, так как использовалась при взвешивании каждого тела по отдельности. Обозначим за y г истинную массу этой гири. Составим уравнение $y + 5 + y + 10 + y + 20 = 1 + y + 5 + 10 + 20$. Откуда $y = {}^1/_2$ г.

Замечание. Если убрать правило взвешивания, то будут и другие решения, например, получить массу первого тела можно и другими способами 7=10-2-1=10+2-5=20+2-10-5. Каждый рассмотренный такой случай оценивается.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — *0 баллов.* Рассмотрен случай с гирей 2 г – 4 балла; остальные случаи — 3 *балла.* Обосновано, что гири 5 г, 10 г, 20 г не могут быть дефектными – 2 балла.

2. Ответ: 7 см.
Решение. $\angle MNK = 180° - \angle NMK - \angle NKM = 180° - 20° - 60° = 100°$. Так как $NF = NK$, то треугольник FNK равнобедренный, значит углы NFK и NKF равны. Вычислим их: $\angle NFK = \angle NKF = (180° - 100°): 2 = 40°$. Тогда $\angle MKF = 60° - 40° = 20° = \angle KMF$. Получили равнобедренный треугольник MFK. Откуда длину $FK = FM = 7$см.



Комментарий. Верный ответ без обоснования — 0 баллов. Найдены углы NFK и NKF без дальнейшего содержательного продвижения – 3 балла.

3. Ответ: нет.
Решение: За один ход конь меняет цвет клетки. Тогда за чётное число ходов конь окажется на клетке того же цвета, а за нечётное число ходов не поменяет цвет клетки. Левая нижняя клетка и правая верхняя клетка одного цвета, тогда только за чётное число ходов конь может оказаться в верхнем правом углу, а число 2017 нечётное.
Комментарий. За использование без верного обоснования того факта, что число ходов чётно – 2 балла.

4. Решение. Клетки одного цвета, и не лежащие на диагонали, разбиваются на пары симметричных относительно диагонали. Тогда, вне диагонали находится чётное число клеток каждого цвета. Поскольку клеток каждого цвета 7, т.е. нечётное число, то на диагонали лежит хотя бы одна клетка каждого цвета. Всего клеток на диагонали 7, следовательно, они раскрашены в разные цвета.
Комментарий. Правильный пример – 1 балл. Использование без обоснования того факта, что вне диагонали по три клетки в каждой части – 1 балл.