Югорский физико-математический лицей
Заочная физико-математическая школа

Л.Н. Николаева

ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ

Учебно-методическое пособие

Ханты-Мансийск
2015

Николаева Л.Н. Текстовые задачи: Учебно-методическое пособие, Ханты-Мансийск: БОУ «Югорский физико-математический лицей-интернат», Заочная физико-математическая школа, 2015, 25 с.

Особое место в обучении математике занимают текстовые задачи. Текстовые задачи традиционно считаются для учащихся одними из самых сложных.

В пособии рассмотрена поэтапная схема решения текстовых задач, даны общие рекомендации к решению. Рассмотрены следующие типы текстовых задач: задачи на движение, задачи на работу, задачи на проценты, задачи на смеси, сплавы и концентрацию. Приведены решения большого количества текстовых задач разного типа и различного уровня сложности. В конце предложен список задач для самостоятельного решения с ответами.

Пособие будет полезно для учащихся заочной физико-математической школы физико-математического лицея, учителей, школьников старших классов, при подготовке к выпускным экзаменам ГИА и ЕГЭ, вступительным экзаменам по математике в вузы, при проведении занятий в рамках элективных, факультативных курсов, математических кружков.

Текстовые задачи
Введение

Важнейшим видом учебной деятельности, в процессе которой усваивается система математических знаний, умений и навыков, является решение задач. Именно задачи являются тем средством, которое в значительной степени направляет и стимулирует учебно-познавательную активность учащихся.

Особое место в обучении математике занимают текстовые задачи. Надо отметить, что текстовые задачи традиционно считаются для учащихся одними из самых сложных. Это объясняется в значительной степени тем, что если задачи другого рода требуют для своего решения формально-технического аппарата, применение которого алгоритмизируемо, то решение текстовых задач требует еще и этапа составления уравнения или системы уравнений, который в значительно меньшей степени формализуем и требует от решающего понимания имеющихся в задаче условий и перевода их на математический язык. Роль текстовых задач в процессе обучения математики многообразна, особенно как средство развития логического мышления учащихся, их умения устанавливать зависимости между величинами, делать правильные умозаключения.

Задачи, в которых зависимость между данными и искомыми величинами не выражена в явной форме, а сформулирована словами, так же как и вопрос задачи, называются текстовыми задачами. Традиционно текстовые задачи называют задачами на составление уравнений.

Решение любой текстовой задачи складывается их трех основных этапов:

1) выбор неизвестных;
2) составление уравнений, возможно неравенств, и формализация того, что требуется найти;
3) решение полученной системы уравнений и неравенств, или, точнее, нахождение нужного неизвестного или нужной комбинации неизвестных.

Рассмотрим схему решения текстовых задач поэтапно и дадим общие рекомендации к решению текстовых задач.

1) Выбор неизвестных. Выбор неизвестных при решении текстовой задачи диктуется структурой задачи, ее типом. Так, в задачах на движение, как правило, в качестве неизвестных величин берутся скорость, расстояние, время. В задачах на работу в качестве неизвестных берутся производительность, объем работы. Своя специфика в выборе неизвестных имеется и в задачах на концентрацию, процентное содержание.

Неизвестные стараются выбирать таким образом, чтобы через них было удобно вычислять величины, о которых говорится в условии задачи. Не следует пытаться обойтись небольшим числом неизвестных. Иногда уже в процессе составления уравнений приходится для облегчения этого процесса добавлять новые неизвестные.

2) Составление уравнений. Выбрав неизвестные, мы разбиваем условие задачи на логические части, каждой из которых соответствует одно уравнение или неравенство. Таким образом, запись связей между величинами, выраженными через неизвестные, и известными величинами приводит либо к уравнению, либо к системе уравнений, либо к системе уравнений и неравенств.

В простейших случаях получается система уравнений, в которой число неизвестных совпадает с числом уравнений. Если уравнений оказалось меньше, чем неизвестных, и при этом были использованы все условия задачи (иногда эти условия оказываются замаскированными), то необходимо внимательно прочитать, что требуется найти в задаче.

Важно сформулировать через введенные неизвестные то, что требуется найти в задаче. Если все условия задачи использованы, то нужное неизвестное или нужная комбинация неизвестных обязательно найдется.

Необходимо также обращать особое внимание на единицы измерения – они в течение всего решения должны быть одинаковыми.

3) Решение полученной системы уравнений и неравенств. При разном выборе неизвестных одна и та же текстовая задача может сводиться к *алгебраическим задачам* (системам уравнений и неравенств) различной трудности. Поэтому при возникновении затруднений при решении системы полезно вернуться к самому началу решения и подумать о новом способе введения неизвестных.

Составленная в результате введения неизвестных алгебраическая задача не всегда оказывается равносильна исходной задаче. Поэтому после получения значений неизвестных целесообразно провести проверку соответствия найденных величин тому реальному процессу, о котором говорится в условии задачи.

Отметим, что в текстовых задачах все величины, как правило, положительны (в природе скорости, расстояния, масса, объемы положительны). Однако обычно эти условия явно не выписывают, но используют при решении уравнений и при отбрасывании лишних решений.

В этом пособии мы будем рассматривать следующие типы текстовых задач: задачи на движение, задачи на работу, задачи на проценты, задачи на смеси, сплавы и концентрацию. Для каждого из этих типов задач разберем некоторые наиболее типичные примеры решения задач различного уровня сложности.

Задачи на движение

При решении задач на движение (как правило, рассматривается равномерное движение) обычно в качестве неизвестных величин берутся скорости, путь и его части, время, необходимое для прохождения пути и его частей. Неизвестные целесообразно вводить таким образом, чтобы через них было удобно выражать длины отдельных участков пути, время, затраченное на их прохождение. Для этого используются формулы: $S = v \cdot t$, $v = \frac{S}{t}$, $t = \frac{S}{v}$, где S - путь, v - скорость, t - время.

При решении задач на движение полезно сразу переводить все данные в одни и те же единицы измерения. Если это часы, то время должно на протяжении всей задачи выражаться в часах, не должны в одном решении применяться километры и метры и т.п.

Рассмотрим несколько примеров решения задач на движение.

В следующих двух задачах *запланированные* параметры сопоставляются с *реальными.* Для решения таких задач необходимо выразить через неизвестные расстояние, время или скорость на каждом из запланированных и реальных участках пути с момента отклонения от плана. После этого, согласно условию задачи, составить уравнение или систему уравнений.

Пример 1. Поезд проходит расстояние от пункта A до B по расписанию за некоторое время. Если увеличить скорость поезда на 8 км/ч, то он придет в пункт B на 2 часа раньше, если уменьшить скорость на 3 км/ч, то поезд придет в B на 2 часа позже, чем по расписанию. Найти исходную скорость поезда и расстояние между пунктами A и B.

Решение. Пусть S (км) - расстояние между пунктами A и B; v (км/ч) – скорость поезда. Тогда поезд проходит расстояние от A до B по расписанию за время $\frac{S}{v}$ (ч), при движении с увеличенной скоростью – за время $\frac{S}{v+8}$ (ч), а с уменьшенной скоростью – за время $\frac{S}{v-3}$ (ч). Из условий задачи вытекает система уравнений $\begin{cases} \frac{S}{v} = \frac{S}{v+8} + 2 \\ \frac{S}{v} = \frac{S}{v-3} - 1 \end{cases}$. Первое уравнение равносильно уравнению $S \cdot (v+8) = S \cdot v + 2v \cdot (v+8)$, ($v \neq -8,\ v \neq 0$), второе уравнение равносильно $S \cdot (v-3) = S \cdot v - v \cdot (v-3)$ ($v \neq 0,\ v \neq 3$). После преобразований имеем, что следствием исходной системы является система $\begin{cases} 4S = v^2 + 8v \\ 3S = v^2 - 3v \end{cases}$. Исключая S (для этого умножим второе уравнение системы на 4 и вычтем из него первое уравнение, умноженное на 3), приходим к квадратному уравнению $v^2 - 36v = 0$, в силу которого $v = 36$ км/ч, $S = 396$ км. Второй корень $v = 0$ противоречит смыслу исходной задачи.

Ответ: исходная скорость поезда равна 36 км/ч; расстояние между пунктами A и B равно 396 км.

Пример 2. Пешеход идет к поезду. Пройдя за первый час пути $3{,}5$ км, он рассчитал, что если он будет идти дальше с той же скоростью, то опоздает к поезду на полчаса. Пешеход прибавил шагу и оставшуюся часть пути шел со скоростью 5 км/ч, благодаря чему он прибыл в конечный пункт на 15 минут раньше срока. Найдите длину пути пешехода.

Решение. Пусть S (км) - длина пути пешехода; t (ч) – время до отправления поезда с момента выхода пешехода из начального пункта. Тогда первый час пути пешеход прошел со скоростью $3{,}5$ км/ч, а время, за которое он прошел бы весь путь, равно $\frac{S}{3{,}5}$ часа. Тогда из условия задачи следует, что $\frac{S}{3{,}5} = t + \frac{1}{2}$. Путь в $(S - 3{,}5)$ км пешеход прошел за $\frac{S-3{,}5}{5}$ часов, тогда из условия задачи вытекает уравнение $1 + \frac{S-3{,}5}{5} = t - \frac{1}{4}$. Здесь $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{4}$ - это 30 минут и 15 минут, выраженные в часах. В результате имеем систему уравнений $\begin{cases} \frac{S}{3{,}5} = t + \frac{1}{2} \\ 1 + \frac{S-3{,}5}{5} = t - \frac{1}{4} \end{cases}$. Вычитая из первого уравнения второе, получим $\frac{S}{3{,}5} - 1 - \frac{S-3{,}5}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$. После преобразований имеем $S = 12{,}25$ км.

Ответ: путь пешехода составляет $12{,}25$ км.

Далее рассмотрим примеры задач, описывающих совместное движение двух и более участников. В задачах на совместное движение участники не всегда одновременно начинают движение и не всегда одновременно его заканчивают. Поэтому важно выделить участок или участки пути, на которых действительно происходит совместное движение. Кроме этого, в задачах имеются участки, на которых передвигается один участник, в то время как второй еще не начал или уже закончил движение.

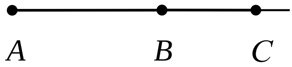
Пример 3. Из пункта A в пункт $Б$ выехал скорый поезд. Одновременно навстречу ему из $Б$ в A выехал товарный поезд. Через 5 часов 20 минут они встретились. В пункт $Б$ скорый поезд прибыл на 8 часов раньше, чем товарный в A. Сколько времени находился в пути каждый поезд?

Решение. Пусть скорый поезд находится в пути t_1 часов, а товарный - t_2 часов. Если через S (км) обозначить расстояние между пунктами A и B, то скорости поездов будут равны $\frac{S}{t_1}$ (км/ч) и $\frac{S}{t_2}$ (км/ч) соответственно. Из условия, что поезда встретились через $\frac{16}{3}$ часа (что соответствует 5 часам 20 минутам), вытекает уравнение $\left(\frac{S}{t_1}+\frac{S}{t_2}\right)\cdot\frac{16}{3}=S$. Так как товарный поезд находился в пути на 8 часов больше, чем скорый, то $t_2=t_1+8$. В результате имеем систему уравнений $\begin{cases}\left(\frac{S}{t_1}+\frac{S}{t_2}\right)\cdot\frac{16}{3}=S \\ t_2=t_1+8\end{cases}$. Первое уравнение, после сокращения на S, приводится к виду $3\cdot t_1\cdot t_2=16\cdot(t_1+t_2)$. Подставив в это уравнение выражение для t_2, приходим к квадратному уравнению $3{t_1}^2-8t_1-128=0$ с корнями 8 и $\left(-\frac{16}{3}\right)$. Отрицательный корень противоречит смыслу задачи, поэтому $t_1=8$, а $t_2=16$.

Ответ: скорый поезд находился в пути 8 часов, товарный - 16 часов.

Пример 4. Две автомашины выехали одновременно из пункта A в одном направлении со скоростями 40 км/ч и 50 км/ч. Третья машина выехала из пункта A на полчаса позже и догнала вторую машину через полтора часа после того, как обогнала первую машину. Найти скорость третьей машины.

Решение. Изобразим схематически движение автомобилей и обозначим место встречи третьего автомобиля с первым точкой B, а со вторым – точкой C.



Введем неизвестные: v (км/ч) – скорость третьего автомобиля, t (ч) – время, через которое третий автомобиль догонит первый.

Из условий задачи следует, что расстояние AB первый автомобиль проходит за $(t+\frac{1}{2})$ часа, а третий автомобиль – за t часов, поэтому $40\cdot(t+\frac{1}{2})=v\cdot t$. Расстояние AC третий автомобиль проходит за $(t+\frac{3}{2})$ часа, а второй автомобиль – за $(t+\frac{1}{2}+\frac{3}{2})$ часов, поэтому $v\cdot(t+\frac{3}{2})=50\cdot(t+\frac{1}{2}+\frac{3}{2})$. В результате имеем систему уравнений $\begin{cases}40\cdot(t+\frac{1}{2})=v\cdot t\\50\cdot(t+2)=v\cdot(t+\frac{3}{2})\end{cases}$. Из первого уравнения $t=\frac{20}{v-40}$. Подставляя это выражение для t во второе уравнение, имеем $50\cdot(\frac{20}{v-40}+2)=v\cdot(\frac{20}{v-40}+\frac{3}{2})$. После преобразований приходим к уравнению $\frac{100\cdot(2v-60)}{v-40}=\frac{v\cdot(3v-80)}{v-40}$, которое равносильно квадратному уравнению $3v^2-280v+6000=0,\quad (v\neq 40)$ с корнями $v_1=\frac{100}{3}$; $v_2=60$. Если $v=v_1=\frac{100}{3}$ км/ч, то соответствующее значение $t=\frac{20}{v-40}$ - отрицательно, чего по условию задачи не может быть. При $v=v_2=60$ км/ч получаем $t=\frac{20}{v-40}=1$ час, что соответствует

встрече третьего автомобиля с первым через час, а со вторым – через два с половиной часа.
Ответ: скорость третьей машины равна 60 км/ч.

В ряде задач на движение учитывается скорость течения при движении по реке, скорость ветра при движении, например, самолетов. В задачах такого типа рассматриваются две основные скорости – *собственная скорость* лодки, катера, самолета, создаваемая двигателем или усилием людей при работе на веслах (то есть скорость движения в стоячей воде или скорость движения при отсутствии ветра), и *скорость течения* или *ветра.* Как правило, если собственная скорость и скорость течения (ветра) не даны, то именно их обозначают за неизвестные. Две другие скорости – *скорость по* течению или ветру и *скорость против* течения или ветра – можно выразить через основные скорости через их сумму или разность соответственно. И далее такая задача решается как любая другая задача на движение.

Пример 5. Теплоход по течению реки плывет вдвое медленнее, чем скутер против течения реки, а по течению скутер плывет в 4 раза быстрее, чем теплоход против течения. Во сколько раз скорость скутера в стоячей воде больше скорости теплохода?

Решение. Пусть x и y - соответственно скорости скутера и теплохода в стоячей воде; v - скорость течения (единица скорости не имеет принципиального значения). Тогда по течению скутер и теплоход плывут соответственно со скоростями $(x+v)$, $(y+v)$, а против течения – со скоростями $(x-v)$, $(y-v)$ соответственно. Из условия задачи следует, что выполняется следующая система уравнений $\begin{cases} x-v=2\cdot(y+v) \\ x+v=4\cdot(y-v) \end{cases}$. Первое уравнение приводится к виду $x=2\cdot y+3\cdot v$, второе – к виду $x=4\cdot y-5\cdot v$. Умножая первое равенство на 5, второе – на 3 и складывая их, приходим к соотношению $8\cdot x=22\cdot y$ или $x=\dfrac{11}{4}\cdot y$. Заметим, что при этом из первого уравнения $v=\dfrac{1}{4}\cdot y$, поэтому при положительном значении

y величины x и v тоже положительны, т.е. полученный ответ имеет смысл.

Ответ: в стоячей воде скорость скутера в $\frac{11}{4}$ раза больше скорости теплохода.

Пример 6. От пристани A одновременно отправились вниз по течению реки катер и плот. Катер спустился вниз по течению на 96 км, затем повернул обратно и вернулся в A через 14 часов. Найти скорости катера в стоячей воде и скорость течения, если известно, что катер встретил плот на обратном пути на расстоянии 24 км от A.

Решение. Пусть скорость катера в стоячей воде равна x (км/ч), y (км/ч) – течения реки. Тогда $(x+v)$ (км/ч) – скорость катера при движении по течению, а против течения реки $(x-v)$ (км/ч). Тогда по течению реки катер шел $\frac{96}{x+y}$ часов, а против течения $\frac{96}{x-y}$, так как на весь путь катер затратил 14 часов, следовательно, $\frac{96}{x+y}+\frac{96}{x-y}=14$ или $\frac{48}{x+y}+\frac{48}{x-y}=7$. Плот преодолел расстояние 24 км за $\frac{24}{y}$ часа. К моменту встречи с плотом катер прошел 96 км по течению и 72 км против течения за время $\frac{96}{x+y}+\frac{72}{x-y}$, следовательно, $\frac{96}{x+y}+\frac{72}{x-y}=\frac{24}{y}$ или $\frac{4}{x+y}+\frac{3}{x-y}=\frac{1}{y}$. Таким образом имеем систему уравнений $\begin{cases}\frac{48}{x+y}+\frac{48}{x-y}=7\\ \frac{4}{x+y}+\frac{3}{x-y}=\frac{1}{y}\end{cases}$. Освобождаясь во втором уравнении от знаменателя, получаем, что $x = 7 \cdot y$. Подставляя $x = 7 \cdot y$ в первое уравнение, получим $y = 2$; затем $x = 14$.

Ответ: скорость катера в стоячей воде равна 14 км/ч, скорость течения реки равна 2 км/ч.

Задачи на совместную работу

В задачах на работу («совместный труд») используются следующие величины: *время* выполнения работы; *«производительность» труда* (т.е. объём работы, выполняемый за единицу времени, например, если речь идет о производительности станка, то это число деталей, изготавливаемое станком в единицу времени – в минуту, или час, или день и т.д.); *объём* работы.

Задачи на работу во многом аналогичны задачам на движение. В самом деле, и в тех и в других задачах рассматриваются некоторые промежутки времени, «производительность» - это скорость выполнения той или иной работы, «объём произведенной работы» - это своего рода «путь», проделанный в результате выполняемой работы. Поэтому в задачах на работу уравнения составляются из тех же соображений, что и в задачах на движение. Работа описывается формулой $V = p \cdot t$, где p - «производительность» труда, t - время работы, V - объём выполненной работы.

Задачи на трубы, из которых что-то льётся, есть так же задачи на работу. Здесь «производительность» трубы – это объём жидкости, протекающий через неё за единицу времени.

В случаях если объём работы не задан и не является искомым, полезно весь объём работы принять за 1.

Пример 7. Двое рабочих вместе выполнили некоторую работу за 6 часов. Первый из них, работая отдельно, мог выполнить всю работу на 5 часов скорее, чем второй, работая один. За сколько часов каждый из них, работая один, может выполнить всю работу?

Решение. Примем объём работы за 1**.** Пусть x - часть работы, которую выполняет за 1 час первый рабочий (производительность первого рабочего), y - часть работы, которую за 1 час выполняет второй рабочий (производительность второго рабочего). Общая производительность двух рабочих, работающих вместе, равна

$(x+y)$. Так как они выполняют всю работу за 6 часов, то $(x+y)\cdot 6=1$.

Пусть первому рабочему для выполнения всей работы одному нужно t часов, тогда второму рабочему для выполнения всей работы одному потребуется $(t+5)$ часов. Тогда $x\cdot t=1$ и $y\cdot(t+5)=1$. В результате имеем систему уравнений $\begin{cases}(x+y)\cdot 6=1\\ x\cdot t=1\\ y\cdot(t+5)=1\end{cases}$. Из второго уравнения имеем $x=\frac{1}{t}$, из третьего - $y=\frac{1}{t+5}$. Подставив эти выражения в первое уравнение системы, получим $\frac{1}{t}+\frac{1}{t+5}=\frac{1}{6}$. Приведем это уравнение к общему знаменателю и получим уравнение $6\cdot(t+5)+6\cdot t=t\cdot(t+5)$, которое равносильно квадратному уравнению $t^2-7\cdot t-30=0$ с корнями 10 и (-3). По условию задачи значение t должно быть положительным, значит $t=10$. Итак, первому рабочему на выполнение работы потребуется 10 часов, второму - 15 часов.

Ответ: 10 часов, 15 часов.

Пример 8. Трое рабочих должны сделать 80 одинаковых деталей. Известно, что все трое вместе могут сделать за час 20 деталей. К работе сначала приступил первый рабочий. Он сделал 20 деталей, затратив на это более трёх часов. Оставшуюся часть работы выполнили вместе второй и третий рабочие. На всю работу ушло 8 часов. Сколько часов понадобилось бы первому рабочему на всю работу, если бы он делал её один?

Решение. Пусть x деталей делал первый рабочий за час; y - второй; z - третий и t - время первого рабочего, затраченное на изготовление $20-$ти деталей. Тогда $(x+y+z)$ - общая производительность трех рабочих, работающих вместе, $(y+z)$ - производительность второго и третьего рабочих, работающих вместе и $(8-t)$ - время совместной работы второго и третьего рабочего. Из условий задачи следует следующая система уравнений $\begin{cases}(x+y+z)\cdot 1=20\\ x\cdot t=20,\ \ t>3\\ (y+z)\cdot(8-t)=60\end{cases}$. Выразим из первого уравнения $y+z=20-x$ и подставим это выражение в третье уравнение, получим $60=(20-x)\cdot(8-t)$. Следовательно, приходим к системе уравнений $\begin{cases}8\cdot x+20\cdot t-x\cdot t=100\\ x\cdot t=20\end{cases}$. Подставив второе уравнение в первое и сократив его на 4, получим уравнение $2\cdot x+5\cdot t=30$, из которого $t=\dfrac{30-2x}{5}$. Подставим это выражение для t во второе уравнение системы и придем к квадратному уравнению $2\cdot x^2-30\cdot x-+100=0$ с корнями 5 и 10. Если $x=5$, то $t=4$; если $x=10$, то $t=2$, а $t>3$, поэтому $x=10$ - не подходит, значит, на изготовление 80 деталей первому рабочему потребуется $\dfrac{80}{5}=16$ часов.

Ответ: 16 часов.

Пример 9. При одновременной работе двух насосов разной мощности бассейн наполняется водой за 8 часов. После ремонта насосов производительность первого из них увеличилась в $1{,}2$ раза, а второго - в $1{,}6$ раза, и при одновременной работе двух насосов бассейн стал наполняться за 6 часов. За какое время наполнится бассейн одним первым насосом после ремонта?

Решение. Пусть V (л) – объём бассейна, p (л/ч) – производительность первого насоса, q (л/ч) – производительность второго насоса.

До ремонта за 8 часов первый насос перекачивает ($8\cdot p$) литров воды, второй - ($8\cdot q$) литров. В итоге за 8 часов они вместе перекачают $(8\cdot p+8\cdot q)$ литров воды. По условию задачи имеем $8\cdot p+8\cdot q=V$. После ремонта за 6 часов первый насос перекачивает ($6\cdot 1{,}2\cdot p$) литров воды, а второй ($6\cdot 1{,}6\cdot q$) литров.

Вместе за 6 часов они перекачают ($(7{,}2 \cdot p + 9{,}6 \cdot q)$ литров, и можно составить второе уравнение $7{,}2 \cdot p + 9{,}6 \cdot q = V$. В результате имеем систему уравнений $\begin{cases} 8 \cdot p + 8 \cdot q = V \\ 7{,}2 \cdot p + 9{,}6 \cdot q = V \end{cases}$. Поделим обе части уравнений на V и получим $\begin{cases} 8 \cdot \dfrac{p}{V} + 8 \cdot \dfrac{q}{V} = 1 \\ 7{,}2 \cdot \dfrac{p}{V} + 9{,}6 \cdot \dfrac{q}{V} = 1 \end{cases}$. Следовательно, отношения $x = \dfrac{p}{V}$ и $y = \dfrac{q}{V}$ удовлетворяют системе линейных уравнений $\begin{cases} 8 \cdot x + 8 \cdot y = 1 \\ 7{,}2 \cdot x + 9{,}6 \cdot y = 1 \end{cases}$. Решая эту систему, находим $x = \dfrac{1}{12}$, $y = \dfrac{1}{24}$.

По условию задачи требуется найти время, за которое первый насос наполнит бассейн, работая с производительностью $1{,}2 \cdot p$. Это время равно $\dfrac{V}{1{,}2 \cdot p} = \dfrac{1}{1{,}2 \cdot x} = \dfrac{12}{1{,}2} = 10$ часов.

Ответ: за 10 часов.

Заметим, что в этой задача за объём бассейна можно было принять 1.

Пример 10. Через первую трубу бассейн наполняется на 6 часов дольше, чем через вторую, и на 8 часов дольше, чем через третью. Если одновременно открыть первую и вторую трубу, то бассейн наполнится за то же самое время, что при открытой только третьей трубе. За какое время бассейн наполнят все три трубы вместе?

Решение. Пусть V (л) – объём бассейна, x (л/ч) – льёт первая труба (производительность первой трубы), y (л/ч) – вторая труба, z (л/ч) – третья труба, а t (ч) - время наполнения бассейна первой трубой. Тогда за $(t-6)$ часов наполняет бассейн вторая труба, а третья - $(t-8)$ часов. Тогда имеем $x \cdot t = V$, $y \cdot (t-6) = V$ и $z \cdot (t-8) = V$.

Время наполнения бассейна первой и второй трубой вместе равно $\frac{V}{x+y}$ часов, время наполнения бассейна одной третьей трубой равно $\frac{V}{z}$ часов, тогда по условию задачи $\frac{V}{x+y} = \frac{V}{z}$. В результате имеем систему уравнений

$$\begin{cases} x \cdot t = V \\ y \cdot (t-6) = V \\ z \cdot (t-8) = V \\ \frac{V}{x+y} = \frac{V}{z} \end{cases}$$

. Найти нужно величину $\frac{V}{x+y+z}$. Для этого перепишем систему в виде

$$\begin{cases} x = \frac{V}{t} \\ y = \frac{V}{t-6} \\ z = \frac{V}{t-8} \\ z = x + y \end{cases}$$

. Тогда, подставляя x, y, z, выраженные через t в четвертое уравнение, имеем $\frac{1}{t} + \frac{1}{t-6} = \frac{1}{t-8}$. Сделав преобразования, приходим к квадратному уравнению $t^2 - 16 \cdot t + 48 = 0$. Решая его, получим, что либо $t = 12$, либо $t = 4$. При этом $t = 4$ не подходит, так как по условию задачи $t > 8$. Тогда $x + y + z = \frac{V}{12} + \frac{V}{6} + \frac{V}{4} = \frac{6 \cdot V}{12} = \frac{V}{2}$, откуда $\frac{V}{x+y+z} = 2$ часа.

Ответ: за 2 часа наполнят бассейн все три трубы вместе.

Задачи «на проценты», смеси и сплавы

К текстовым задачам «на проценты» относятся задачи, в которых, как правило, речь идет о вкладах в банк под тем или иным процентом, о прибыли, о выполнении плана, об изменении цены на товар, задачи в которых происходит преобразование исходного вещества (при сушке, при выпаривании) и т.д.

При решении задач «на проценты» важно понимать, что *один процент от некоторой величины – это её сотая часть.* Изменяется величина и соответственно изменяется значение процента от этой величины. Задачу «на проценты» всегда можно свести к задаче на части, например, 2% равны $0,02$; 25% равны $\frac{25}{100}=\frac{1}{4}=0,25$.

Существуют три основных вида задач «на проценты».

1) *Определение процента от числа:* Найти число a, составляющее $n\%$ от числа b.

Решение: $a=\frac{n}{100}\cdot b$.

Пример: $25\ \%$ от числа 120 это число $a=\frac{25}{100}\cdot 120=30$.

2) *Определение числа по известной его части, выраженной в процентах:* Найти число b, если $n\%$ от него равно a.

Решение: $b=a:\frac{n}{100}=\frac{a\cdot 100}{n}$.

Пример: если $15\ \%$ от числа равно 30, то это число $b=30:\frac{15}{100}=\frac{30\cdot 100}{15}=200$.

3) *Определить сколько процентов составляет число a от числа b.*

Решение: $n=\frac{a}{b}\cdot 100\ (\%)$.

Пример: 1. На сколько процентов число 10 больше 6?

Решение: на $n=\frac{10-6}{6}\cdot 100\ (\%)=66\frac{2}{3}\ (\%)$.

2. На сколько процентов число 6 меньше 10?

Решение: на $n=\frac{10-6}{10}\cdot 100\ (\%)=40\ (\%)$.

Приведем примеры решения задач.

Пример 11. Всё поле планировали вспахать за 30 дней. Механизатор за 20 дней вспахал $90\ \%$ поля. На сколько процентов он перевыполнил дневную норму?

Решение. Пусть p – производительность механизатора в день, тогда объём работы, выполняемый по плану за 30 дней (вспаханное поле), равен $V = 30 \cdot p$, а $90\ \%$ поля – это $\frac{90}{100} \cdot V = \frac{90}{100} \cdot 30 \cdot p = 27 \cdot p$. Этот объём работы механизатор выполнил за 20 дней, значит его дневная норма была $\frac{27 \cdot p}{20}$, а это составляет $\frac{27}{20} \cdot 100\,(\%) = 135\,(\%)$ от дневной нормы по плану, следовательно, дневную норму механизатор перевыполнил на $35\ \%$.

Ответ: на $35\ \%$.

Пример 12. Цена товара была повышена на $12\ \%$. На сколько процентов надо снизить новую цену, чтобы получить первоначальную?

Решение. Пусть цена товара x (руб.), тогда после повышения на $12\ \%$ цена товара увеличилась на $\frac{12}{100} \cdot x = 0{,}12 \cdot x$ (руб.) и товар стал стоить $x + 0{,}12 \cdot x = 1{,}12 \cdot x$ (руб.). Пусть на y (%) надо снизить новую цену, чтобы получить первоначальную цену товара, тогда цена товара понизится на $\frac{y}{100} \cdot 1{,}12 \cdot x$ (руб.). Тогда из условия задачи имеем уравнение $1{,}12 \cdot x - \frac{y}{100} \cdot 1{,}12 \cdot x = x$. Сократим это уравнение на x и умножим на 100, после преобразований получим, что $y = \frac{12}{1{,}12} = \frac{75}{7} = 10\frac{5}{7}\ \%$.

Ответ: на $10\frac{5}{7}\%$ надо снизить новую цену товара, чтобы получить первоначальную.

Пример 13. В свежих грибах содержится 90% воды, а в сухих - $12\ \%$. Сколько сухих грибов получится из 22 кг свежих?

Решение. В свежих грибах содержится 10% «сухого вещества» (грибов), следовательно, $\frac{10}{100}\cdot 22 = 2{,}2$ кг «сухого вещества» (грибов) по массе в 22 кг свежих грибов. «Сухое вещество» сохраняет свою массу неизменной, поэтому $2{,}2$ кг «сухого вещества» составляет 88% от массы получившихся сухих грибов из 22 кг свежих, следовательно, $2{,}2 : \frac{88}{100} = 2{,}5$ кг сухих грибов получится из 22 кг свежих грибов.
Ответ: $2{,}5$ кг сухих грибов получится из 22 кг свежих.

При решении задач «на проценты» целесообразно в ряде случаев использовать таблицы. Рассмотрим решение следующей задачи с помощью табличного метода. Этот метод удобно применять в решении задач на смеси и сплавы.

Пример 14. Имеются два сплава, в одном из которых содержится 20%, а в другом - $30\ \%$ олова. Сколько нужно взять первого и второго сплавов, чтобы получить 10 кг нового сплава, содержащего 27% олова?

Решение. Заполним следующую таблицу согласно условию задачи:

Сплавы	Общая масса, кг	Олово	
		%	кг
1 сплав		20%	
2 сплав		$30\ \%$	
Новый сплав	10	27%	

Пусть нужно взять x кг первого сплава, тогда второго сплава надо взять $(10-x)$ кг. Тогда в первом сплаве содержится кг олова, во втором сплаве $(10-x)\cdot\frac{30}{100}=0{,}3\cdot(10-x)$ кг олова, а в новом сплаве сдержится $10\cdot\frac{27}{100}=2{,}7$ кг олова. Внесем эти данные в таблицу:

	Общая масса, кг	Олово	
		%	кг
1 сплав	x	20%	$0{,}2\cdot x$
2 сплав	$10-x$	$30\ \%$	$0{,}3\cdot(10-x)$
Новый сплав	10	27%	$2{,}7$

Получим уравнение $0{,}2\cdot x+0{,}3\cdot(10-x)=2{,}7$, решением которого является $x=3$.

Ответ: было взято 3 кг первого сплава и 7 кг второго.

Пример 15. Первый сплав состоит из цинка и меди, входящих в него в отношении 1:2, а другой сплав содержит те же металлы в отношении 2:3. Из скольких частей обоих сплавов можно получить третий сплав, содержащий те же металлы в отношении 17:27 ?

Решение. Пусть одна часть первого сплава составляла x кг, одна часть второго сплава - y кг. Тогда запишем условие задачи в виде таблицы:

Сплавы	Масса цинка, кг	Масса меди, кг	Возьмем для нового сплава, кг
1 сплав	x	$2x$	A
2 сплав	$2y$	$3y$	B
Новый сплав	$x+2y$	$2x+3y$	

Заметим, что $\frac{x+2y}{2x+3y}=\frac{17}{27}$, или $27x+54y=34x+51y$, откуда $7x=3y$, т.е. $x=\frac{3y}{7}$. Так как $3x=A$ и $5y=B$, то $\frac{A}{B}=\frac{3x}{5y}=\frac{3\cdot 3y}{5y\cdot 7}=\frac{9}{35}$.

Ответ: сплав следует взять в соотношении 9:35.

Пример 16. В магазине в продаже имеются стиральные порошки в пачках трех сортов: обычный, необычный и превосходный. Сначала количественное соотношение по сортам было 3:4:6. В результате продаж и поставок это отношение изменилось и стало 2:5:8. Известно, что число пачек превосходного порошка возросло на 55 пачек, а обычного порошка - уменьшилось на 10%. Сколько всего порошка стало в магазине?

Решение. Пусть сначала одна часть составляла x пачек. Тогда обычного порошка было $3x$ пачек, необычного - $4x$ пачек и превосходного - $6x$ пачек. В результате продаж и поставок со склада количественное соотношение порошков изменилось. Приняв y пачек за одну часть, получим, что обычного порошка стало $2y$ пачек, необычного - $5y$ пачек и превосходного - $8y$ пачек.

Заполним таблицу согласно условию задачи и сделанным выводам:

	Было (пачек)	Изменение		Стало (пачек)
Обычный	$3x$	-10%	$(-0.1\cdot 3x)$ пачек	$2y$
Необычный	$4x$	$+55$ пачек		$5y$
Превосходный	$6x$			$8y$
Всего	$13x$			$15y$

Тогда имеем систему уравнений:

$\begin{cases} 3x-0{,}1\cdot 3x=2y \\ 4x+55=5y \end{cases}$ или $\begin{cases} 2{,}7x=2y \\ 4x+55=5y \end{cases}$. Решим полученную систему следующим методом: умножим обе части первого уравнения на $(-2{,}5)$ и сложим полученное уравнение со вторым уравнением системы. Получим, что $2{,}75\cdot x+55=0$, откуда $x=20$. Следовательно, $y=27$. Итак, первоначально на одну часть приходилось 20 пачек порошка, а после изменения - 27 пачек. Всего в магазине стало $15y$ пачек порошка, т.е. 405 пачек.

Ответ: 405 пачек.

Вот ряд рекомендаций, которые помогут обучающимся в решении текстовых задач «на проценты».

1. Если учащийся не достаточно уверенно владеет процентами, ему следует свести задачу на проценты к задаче на части: один процент есть сотая часть числа.
2. При решении текстовых задач «на проценты» полезно составлять пропорции для нахождения нужных величин, записывать условие задачи и анализ ее решения в виде таблиц, схем. В таких задачах важно понять, какая величина будет приниматься за $100\ \%$. Как правило, на каждом из этапов решения за $100\ \%$ принимается своя величина.
3. Общую схему решения в задачах, когда «сухое вещество» сохраняет неизменную массу, можно представить следующим образом: пусть m - общая масса, m_1 - масса «сухого вещества», p и q - процентное содержание «сухого вещества» в различных продуктах, тогда $\begin{matrix} m - 100\ \% \\ m_1 - \ p\ \% \end{matrix}$ и $m_1 = m \cdot \frac{p}{100}$; $\begin{matrix} m_1 \ - \ q\ \% \\ x - \ 100\ \% \end{matrix}$ и $x = \frac{m_1 \cdot 100}{q}$, где x - масса конечного продукта, получаемая из общей массы.
4. Если величина A изменяется на p процентов, то ее новое значение A_1 находится по формуле $A_1 = A \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$. При повторном изменении полученной величины на q процентов, получается значение $A_2 = A \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{q}{100}\right)$ и т.д. Знаки перед числами p и q зависят от условия задачи: плюс – при увеличении, минус – при уменьшении исходной величины.

Задачи для самостоятельного решения

1. Из пункта А в В против течения выехала моторная лодка. В пути сломался мотор, и пока его чинили (20 минут), лодку снесло вниз по реке. Насколько позднее прибыла лодка в пункт В, если обычно из

А в В она идет в полтора раза дольше, чем из В в А. (Ответ: 25 минут.)

2. Из города в деревню вышел Иван, одновременно из деревни в город вышла Марья. Расстояние 2 км между ними было дважды: первый раз, когда Иван прошел половину пути, второй раз, когда Марья прошла треть пути. Найти расстояние между городом и деревней. (Ответ: 6 км.)
3. Два туриста вышли из пункта А в пункт В одновременно, причем первый турист каждый километр пути проходил на 5 минут быстрее второго. Первый, пройдя $^1\!/_5$ часть пути, вернулся в пункт А и, пробыв там 10 минут, снова пошел в пункт В. При этом в В оба туриста пришли одновременно. Каково расстояние от А до В, если второй турист прошел его за 2,5 часа? (Ответ: 10 км.)
4. Из пункта **А** в пункт **В,** расстояние между которыми 50 км, одновременно выехали мотоциклист и велосипедист. Известно, что за час мотоциклист проезжает на 30 км больше, чем велосипедист. Определите скорость велосипедиста, если известно, что он прибыл в пункт **В** на 1,5 часа позже мотоциклиста. (Ответ: 20 км/ч.)
5. Моторная лодка прошла вверх по течению реки 24 км. и вернулась обратно, затратив на весь путь 1 час 45 минут. Найти собственную скорость лодки, если известно, что она проплывает 4 км. вниз по течению на $\frac{7}{8}$ часа быстрее, чем плот. (Ответ: 28 км/ч.)
6. Каждый из двух рабочих одинаковой квалификации может выполнить заказ за 15 ч. Через 5 часов после того, как один из них приступил к выполнению заказа, к нему присоединился второй рабочий, и работу над заказом они довели до конца уже вместе. За сколько часов был выполнен весь заказ? (Ответ:10 ч.)
7. Двое рабочих, работая вместе, могли выполнить всю работу за 14 дней. Через 8 дней второй рабочий прекратил работу и первому понадобилось еще 9 дней для завершения всей работы. За сколько дней каждый рабочий самостоятельно выполнит всю работу? (Ответ: 21 день, 42 дня.)
8. В первый день бригада выполнила задание за 8 часов, работая без прогульщика Василия. Во второй день бригада в полном составе выполнила $5/6$ такого же задания, а оставшуюся часть Василий доделывал в одиночку. Всего на выполнение задания во второй

день ушло 9 часов. Сколько времени требуется бригаде, чтобы выполнить задание в полном составе? (Ответ: 6 ч.)

9. Два насоса, работая одновременно, наполняют бассейн за 4 часа. Если 60 % объема заполнить с помощью первого насоса, а затем оставшуюся часть – с помощью второго, менее мощного, то на заполнение бассейна уйдет 11 часов. Сколько времени потребуется, чтобы заполнить весь бассейн, используя только первый насос? (Ответ: 5 ч.)
10. Виноград содержит 90 % влаги, а изюм – 5 %. Сколько килограммов винограда требуется для получения 20 килограммов изюма? (Ответ: 190 кг.)
11. Подсолнух содержит $25\,\%$ шелухи, а обработанный $5\,\%$ шелухи. Сколько обработанной массы получится из 190 кг подсолнуха? (Ответ: 150 кг.)
12. Алена, Валя и Наташа собирали клубнику. Валя собрала на 20% больше, чем Алена, но на 20% меньше, чем Наташа. На сколько процентов больше, чем Алена, собрала клубники Наташа? (Ответ: на 50%.)
13. Ира собрала 15 грибов и еще 50% от количества грибов, собранных Сашей. Саша собрал 12 грибов и еще 50% от количества грибов, собранных Ирой. Сколько грибов собрал каждый из них? (Ответ: Ира – 28, Саша – 26.)
14. На автостоянке стояли «Мерседесы», «Запорожцы» и прочие иномарки в количественном соотношении 2:3:6. После того как на стоянку подъехало некоторое количество «Мерседесов» и 33 «Запорожца», а 40 % прочих иномарок уехало, количественное соотношение стало 5:7:4. Сколько «Мерседесов» стояло на стоянке? (Ответ: 45.)
15. После смешивания растворов, содержащих 25 % и 60 % кислоты, получили раствор, содержащий 39 % кислоты. Определить, в какой пропорции были смешаны растворы? (Ответ: 3:2.)
16. Смешав $30\,\%$ и $60\,\%$ растворы кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 36% раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг чистой воды добавили 10 кг $50\,\%$ раствора той кислоты, то получили бы $41\,\%$ раствор кислоты. Сколько килограммов $30\,\%$ раствора кислоты использовали для получения смеси? (Ответ: 60 кг.)

Литература

1. Ляпин С.Е. Методика преподавания математики. М.;Л, 1952.
2. Белоносов В. С., Фокин М. В. Задачи вступительных экзаменов по математике. Новосибирск: Сиб. унив. изд-во., 2005.
3. Ткачук В.В. Математика абитуриенту -М.: МЦНМО, 2008
4. Дорофеев Г. В., Потапов М. К., Розов Н. Х. Пособие по математике для поступающих в вузы. М.: Наука, 1973; 2003.
5. Цыпкин А. Г., Пинский А. И. Справочное пособие по математике с методами решения задач для поступающих в вузы. М.: «Изд. дом «Оникс 21 век»». Изд-во «Мир и образование», 2005.