ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ОЛИМПИАДЫ

им. И.Ф. Шарыгина

Составители: А. А. Заславский, В. Ю. Протасов,
Д. И. Шарыгин

Москва
Издательство МЦНМО
2007

УДК 51(07)
ББК 22.1
Г 35

Геометрические олимпиады им. И. Ф. Шарыгина / Сост.
Г 35 А. А. Заславский, В. Ю. Протасов, Д. И. Шарыгин. — М.: МЦНМО, 2007. — 152 с.: ил.

ISBN 978-5-94057-280-0

В книге собраны задачи геометрических олимпиад им. И. Ф. Шарыгина (2005–2007) с подробными решениями. В приложении приведены две статьи И. Ф. Шарыгина и воспоминания о нем.

Пособие предназначено для школьников, учителей математики и руководителей кружков. Книга будет интересна всем любителям красивых геометрических задач.

ББК 22.1

ISBN 978-5-94057-280-0

Оглавление

Приложение

От составителей

В память об Игоре Фёдоровиче Шарыгине ряд российских научных организаций и учебных заведений решили ежегодно начиная с 2005 года проводить геометрическую олимпиаду. В оргкомитет и жюри олимпиады вошли известные учёные, педагоги, энтузиасты математического просвещения из разных российских регионов. Олимпиада состоит из двух туров — заочного и финального. В заочном туре, задачи которого публикуются в газете «Математика» и Интернете, могут принимать участие все желающие школьники. Победители заочного тура приглашаются на финал. Кроме того, к участию в финальном туре допускаются победители региональных геометрических олимпиад. Финальный тур проводится в устной форме.

Ниже приводятся задачи двух первых олимпиад, финальные туры которых прошли в Москве в сентябре 2005 года и в г. Дубне Московской области в июле 2006 года, а также задания заочного тура III олимпиады.

Первая олимпиада (2005)

Заочный тур[1]

1. (*А. Заславский*) Хорды AC и BD окружности пересекаются в точке P. Перпендикуляры к AC и BD в точках C и D, соответственно, пересекаются в точке Q. Докажите, что прямые AB и PQ перпендикулярны. (8 *класс*)

Р е ш е н и е. Пусть перпендикуляры пересекаются внутри окружности (случай внешней точки рассматривается аналогично). Отметим точку R — вторую точку пересечения прямой DQ с окружностью (рис. 1).

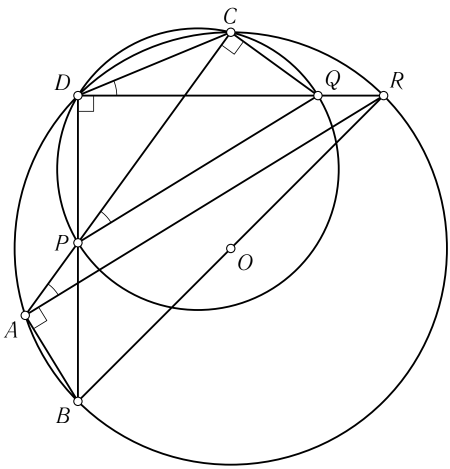


Рис. 1

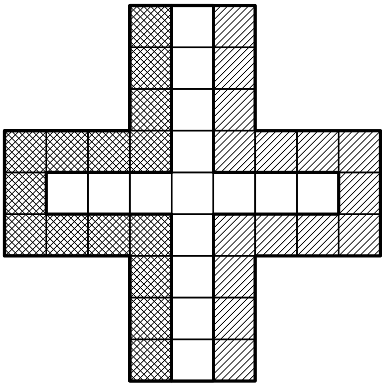
---

[1] Решения задач этого раздела написаны А. Г. Мякишевым.

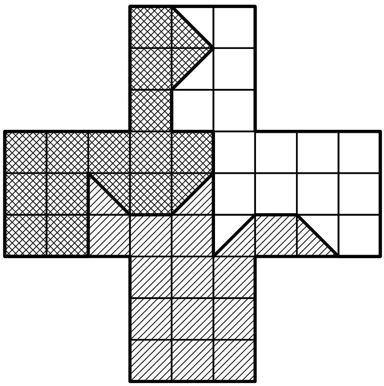
Четырёхугольник $PDCQ$ вписан в окружность (он образован двумя прямоугольными треугольниками с общей гипотенузой PQ), поэтому углы CDQ и CPQ равны как опирающиеся на одну дугу. По этой же причине $\angle CDQ = \angle CAR$, и, значит, прямые PQ и AR параллельны (соответственные углы равны). Но BR является диаметром, как следует из перепендикулярности BD и DQ, поэтому $\angle BAR = 90^\circ$.

2. (*Л. Емельянов*) Разрежьте крест, составленный из пяти одинаковых квадратов, на три многоугольника, равных по площади и периметру. (8–9 *класс*)

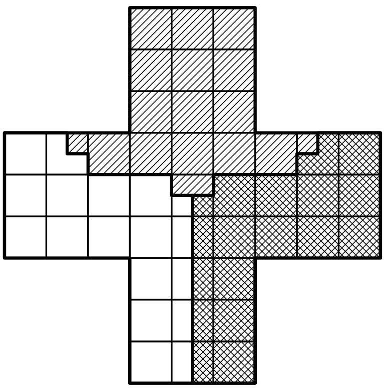
Р е ш е н и е. Приведём некоторые из возможных разрезаний.



(Дарбинян Артур,
г. Ереван, ФМШ г. Еревана)



(Бородулин Игорь,
г. Екатеринбург, гимназия № 9)



(Макарец Александр,
г. Харьков, ФМШ № 27)

3. (*В. Протасов*) Дана окружность и точка K внутри неё. Произвольная окружность, равная данной и проходящая через точку K, имеет с данной окружностью общую хорду. Найдите геометрическое место середин этих хорд (ГМТ). (8–9 *класс*)

Решение. Искомым геометрическим местом будет окружность с центром в середине OK (где O — центр исходной окружности) и радиусом $R/2$ (где R — радиус данной окружности).

Первый способ. Действительно, пусть PQ — общая хорда, M — её середина, а O_1 — центр выбранной произвольно окружности. Поскольку из условия следует, что OPO_1Q является ромбом, то M будет также серединой OO_1. Средняя линия MM_1 треугольника OKO_1 равна

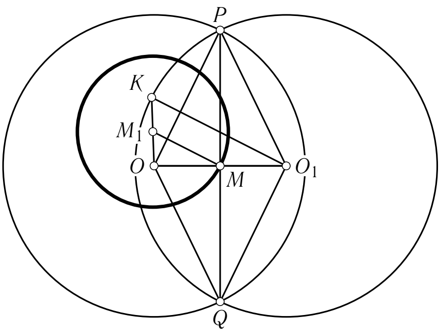


Рис. 2

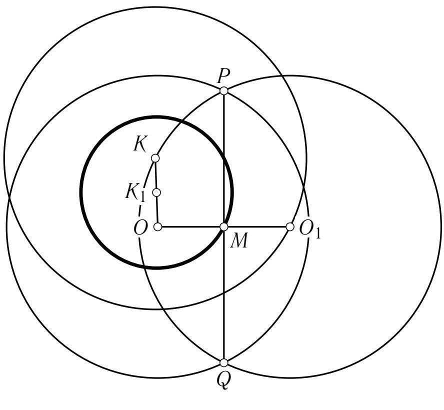


Рис. 3

половине KO_1, т. е. половине радиуса. Таким образом, все середины хорд лежат на окружности с центром в середине OK и радиусом $R/2$ (рис. 2).

Несложно также проверить, что любая точка этой окружности является серединой некоторой хорды.

Второй способ. Центры окружностей, равных данной и проходящих через точку K, лежат на окружности с центром в точке K радиуса R. Если O_1 — центр одной из таких окружностей, то, как уже было замечено, M — середина общей хорды — будет также серединой OO_1. Поэтому искомое ГМТ есть образ окружности, образованной центрами, при гомотетии с центром в точке O и коэффициентом $1/2$ (рис. 3).

4. (*Б. Френкин*) При каком наименьшем n существует выпуклый n-угольник, у которого синусы всех углов равны, а длины всех сторон различны? (9—11 *класс*)

Решение. Наименьшее значение равно пяти. Очевидно, треугольников с таким свойством не существует. Покажем, что не существует и четырёхугольников. Сделать это можно по-разному. Например, так как синусы углов равны, то сами углы четырёхугольника равны либо φ, либо $180^\circ - \varphi$. Простым перебором легко убедиться в том, что в этом случае мы имеем дело либо с прямоугольником, либо с параллелограммом, либо с равнобокой трапецией. Или же можно для доказательства использовать «метод площадей». Рассмотрим выпуклый четырёхугольник, синусы всех углов которого равны и обозначим длины его сторон буквами a, b, c, d. Вычислим его площадь как сумму площадей двух треугольников с общей диагональю по формуле «половина произведения сторон на синус угла между ними» двумя способами, затем в полученном равенстве сократим на половину синуса и придём к соотношению $ab + cd = ad + bc$ или $(a - c)(b - d) = 0$. Отсюда вытекает равенство, по крайней мере, одной пары сторон. Чтобы построить пятиугольник, обладающий искомыми свойствами, достаточно отрезать у равнобокой трапеции с углом 60° при большем основании «уголок» (рис. 4).

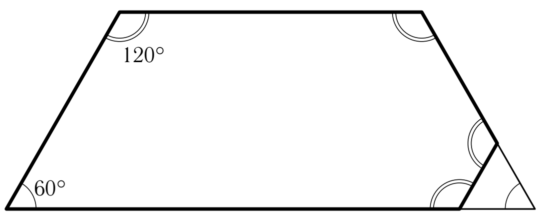


Рис. 4

Или иначе. Рассмотрим правильный пятиугольник с углами 108° и с его помощью построим пятиугольник, все стороны которого соответственно параллельны сторонам правильного пятиугольника, но не равны между собой (рис. 5).

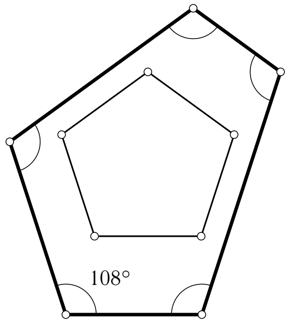


Рис. 5

5. (*А. Мякишев*) Имеются две параллельные прямые p_1 и p_2. Точки A и B лежат на p_1, а C на p_2. Будем перемещать отрезок BC параллельно самому себе и рассмотрим все треугольники ABC, полученные таким образом. Найдите геометрическое место точек, являющихся в этих треугольниках: а) точками пересечения высот; б) точками пересечения медиан; в) центрами описанных окружностей. (8–10 *класс*)

Р е ш е н и е. Получится прямая с выколотой точкой, которая соответствует случаю, когда треугольник вырождается в отрезок (рис. 6).

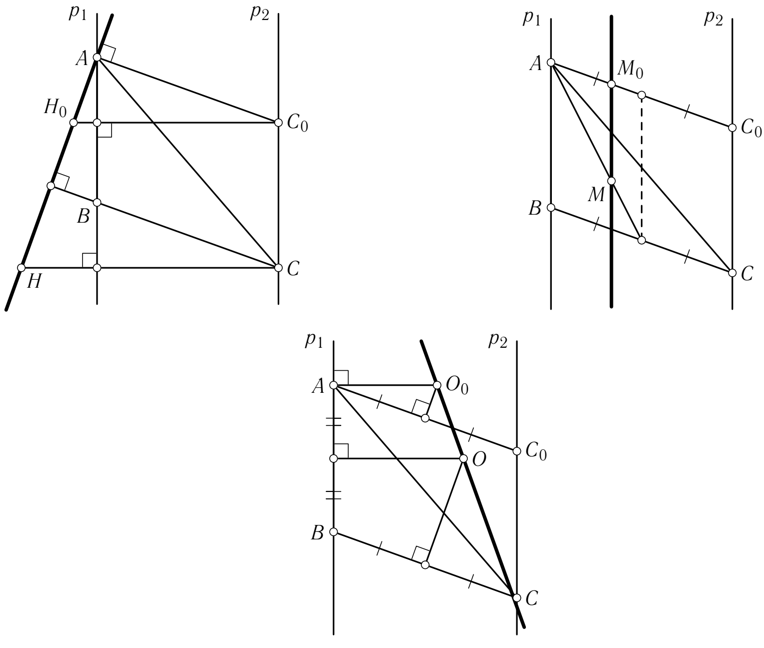


Рис. 6

В первом случае, очевидно, имеем прямую, перпендикулярную BC и проходящую через вершину A. Во втором случае ответом будет прямая, параллельная данным прямым и делящая отрезок с концами на этих прямых в отношении $1:2$, считая от первой прямой. В самом деле, если отрезок BC движется с постоянной скоростью, значит, и его середина движется с постоянной скоростью. Точка пересечения медиан делит отрезок, соединяющий вершину A с серединой BC, в постоянном отношении $2:1$, и, следовательно, эта точка также будет двигаться с постоянной скоростью по некоторой прямой. В предельном случае получаем точку M_0, которая делит отрезок AC_0 (равный и параллельный BC, но проходящий через вершину A) в отношении $1:2$, поскольку она должна делить в отношении $2:1$ отрезок, соединяющий точку A и середину AC_0.

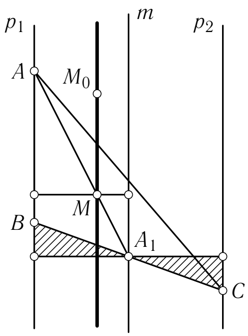


Рис. 7

Можно рассуждать иначе: проведём через точку A_1 (середину BC) перпендикуляр к данным прямым и с концами на этих прямых. Получим пару равных треугольников с общей вершиной в A_1. Отсюда следует, что середины будут лежать на прямой m_1 равноотстоящей от данных прямых. Затем проведём перпендикуляр через M с концами на p_1 и m. Получим пару подобных треугольников с общей вершиной M, причём коэффициент подобия равен 2. Значит, центры тяжести лежат на прямой, параллельной p_1 и m, эта прямая делит общий перпендикуляр в отношении $2:1$ (рис. 7).

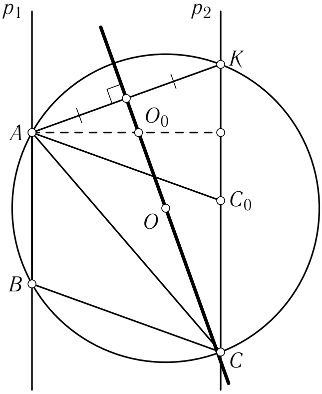


Рис. 8

Наконец, так как серединные перпендикуляры к отрезкам AC и BC движутся также с постоянными скоростями, то и точка их пересечения (центр описанной окружности) будет перемещаться по прямой. Можно также заметить, что эта прямая является серединным перпендикуляром к отрезку AK, симметричному отрезку AC_0 (в который вырождается треугольник при совпадении точек A и B) относительно перпендикуляра из точки A к p_2.

Как известно, если около трапеции можно описать окружность, то она равнобокая. Отсюда сразу следует, что все окружности, описанные около треугольников ABC, будут вторично пересекать прямую p_2 в одной и той же точке K, так что $AK = BC$. Поэтому центры этих окружностей должны быть равноудалены от точек A и K (рис. 8). Эти рассуждения дают нам также ещё один способ доказательства того, что искомое ГМТ есть прямая (с выколотой точкой).

6. (*А. Хачатурян*) Сторону AB треугольника ABC разделили на n равных частей (точки деления $B_0 = A$, B_1, $B_2, \ldots, B_n = B$), а сторону AC этого треугольника разделили на $n+1$ равных частей (точки деления $C_0 = A$, C_1, $C_2, \ldots, C_{n+1} = C$). Закрасили треугольники $C_iB_iC_{i+1}$. Какая часть площади треугольника закрашена? (10–11 *класс*)

Р е ш е н и е. Покажем, что закрашенная часть составляет ровно половину площади всего треугольника. Для этого из точек $B_1, \ldots, B_n$ опу-

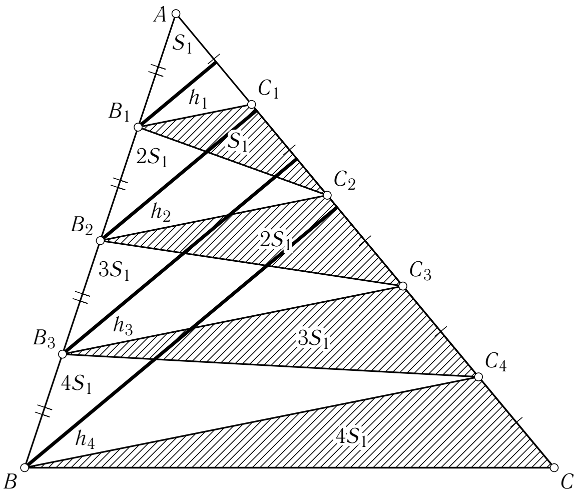


Рис. 9

стим перпендикуляры на сторону AC. Эти перпендикуляры являются высотами треугольников $C_iB_iC_{i+1}$ с одинаковыми основаниями, причём, как следует из соображений подобия, $h_i = ih_1$. Отсюда вытекает, что таким же соотношением будут связаны площади закрашенных треугольников: $S_i = iS_1$. (На рис. 9 изображён случай $n = 4$.)

Опустив затем перпендикуляры из точек $C_1, \ldots, C_n$ на сторону AC и рассуждая аналогично, получим такое же соотношение для площадей незакрашенных треугольников. Осталось заметить, что площадь первого закрашенного треугольника равна площади первого незакрашенного (их основания равны, а высота h_1 общая). Можно было завершить доказательство и по-другому, просто сложив площади заштрихованных треугольников.

Отметим, что равенство площадей соответствующих пар треугольников (закрашенного и незакрашенного) можно получить практически без вычислений, воспользовавшись тем, что прямые B_iC_i параллельны друг другу (по теореме, обратной теореме Фалеса). Тогда $S_{B_{i-1}B_iC_i} = S_{C_{i-1}B_iC_i}$ (у них общее основание B_iC_i, а вершины лежат на прямой, параллельной основанию) и $S_{C_{i-1}B_iC_i} = S_{B_iC_iC_{i+1}}$ (вершина B_i общая, а $C_{i-1}C_i = C_iC_{i+1}$ по условию).

7. (*В. Протасов*) Две окружности с радиусами 1 и 2 имеют общий центр в точке O. Вершина A правильного треугольника ABC лежит на большей окружности, а середина стороны BC на меньшей. Чему может быть равен $\angle BOC$? (8–9 *класс*)

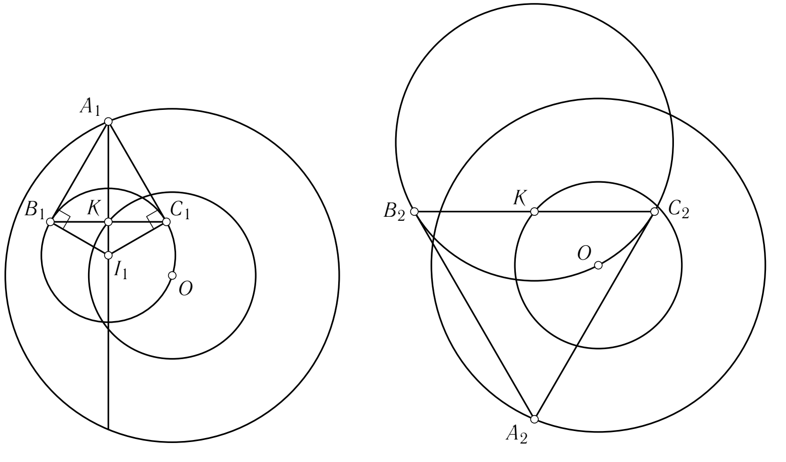


Рис. 10

Решение. Этот угол равен либо $60°$, либо $120°$.

Первый способ. В данной конструкции окружность, проходящая через вершины B и C правильного треугольника и касающаяся в этих точках его сторон, будет также проходить и через общий центр двух окружностей (рис. 10).

Из этого утверждения следует, что в случае «верхнего» (на рисунке) треугольника

$$\angle B_1OC_1 = \frac{1}{2}\angle B_1I_1C_1 = 60°,$$

так как вписанный угол равен половине центрального. По той же причине для «нижнего» треугольника получим $\angle B_2OC_2 = 120°$.

Для доказательства самого утверждения воспользуемся следующим легко проверяемым свойством правильного треугольника. Пусть I_1 — центр окружности, касающейся сторон AB и AC правильного треугольника ABC в точках B и C соответственно, а K — середина стороны BC. Тогда точка K делит отрезок AI_1 в отношении $3 : 1$, причём I_1K равен половине радиуса этой окружности (рис. 11).

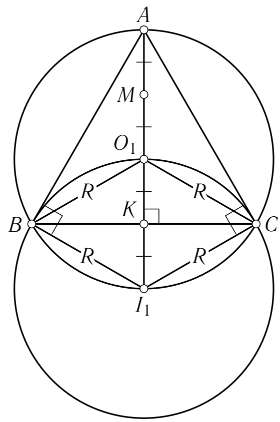


Рис. 11

Теперь докажем основное утверждение (рис. 12).

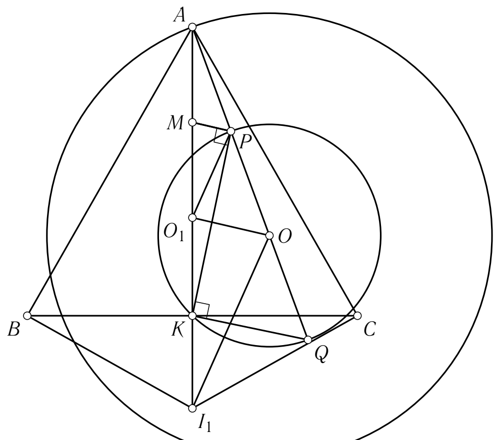


Рис. 12

Проведём прямую AO и отметим точки P и Q её пересечения с окружностью единичного радиуса. Точки M, O_1 и K делят отрезок AI_1 на четыре одинаковые части, каждая из которых равна $R/2$, где R — радиус окружности, касающейся сторон AB и AC в точках B и C. Мы хотим доказать, что $I_1O = R$. Из условия следует, что точки P и O делят отрезок AQ на три равные части, поэтому из теоремы, обратной теореме Фалеса, следует, что отрезки MP и KQ параллельны. Но угол PKQ — прямой как опирающийся на диаметр, поэтому прямым будет и угол MPK.

Медиана прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы, поэтому

$$O_1P = O_1M = O_1K = \frac{R}{2}.$$

Теперь осталось только заметить, что отрезок O_1P является средней линией треугольника AI_1O и, значит, равен половине I_1O.

Второй способ. (*Осечкина Мария, г. Пермь, ФМШ №9*) Рассмотрим, например, случай, когда точки O и A лежат в одной полуплоскости относительно прямой BC (рис. 13).

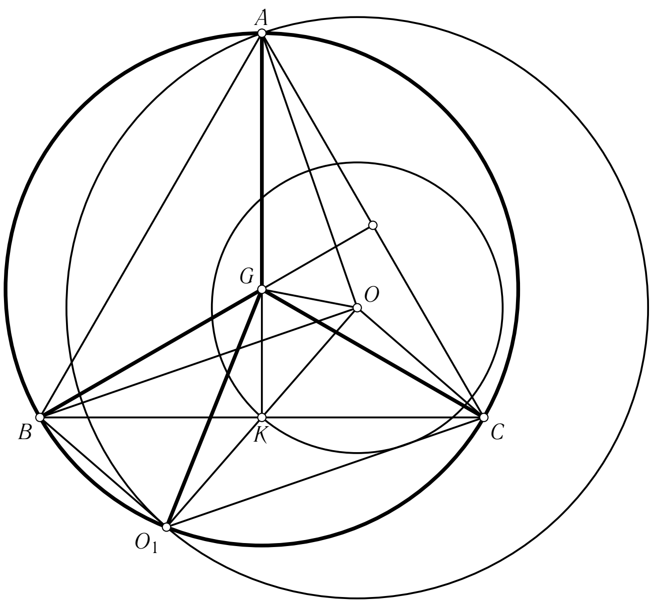


Рис. 13

Пусть K — середина BC, G — точка пересечения медиан треугольника ABC. Продолжим отрезок OK до пересечения с большей окружностью в точке O_1. По условию $BK = KC$, $OK = KO_1$, поэтому четырёхугольник $BOCO_1$ является параллелограммом. Далее, заметим, что G будет также центроидом (точкой пересечения медиан) и треугольника AOO_1, поскольку AK — медиана этого треугольника, и $AG : GK = 2 : 1$. И так как треугольник равнобедренный, то OG является биссектрисой, откуда следует равенство треугольников AGO и O_1GO. Следовательно, $GA = GO_1 = GB = GC$, т. е. точки A, B, C, O_1 лежат на одной окружности, т. е.

$$\angle BO_1C = 180^\circ - \angle BAC = 120^\circ.$$

Аналогично рассматривая и второй случай, получим 60°.

Третий способ. (*Лысов Михаил, г. Москва, Лицей «Вторая школа»*) Это наиболее, пожалуй, элегантное решение основано на использовании следующей классической теоремы элементарной геометрии. *Пусть имеется некоторый отрезок AB на плоскости и некоторое положительное число λ. Тогда геометрическое место точек X таких, что $AX/BX = \lambda$, есть некоторая окружность. Если P и Q — точки, которые делят отрезок AB в отношении λ (внутренним и внешним образом), то эта окружность совпадает с окружностью, построенной на отрезке PQ как на диаметре*. Она называется окружностью Аполлония (рис. 14).

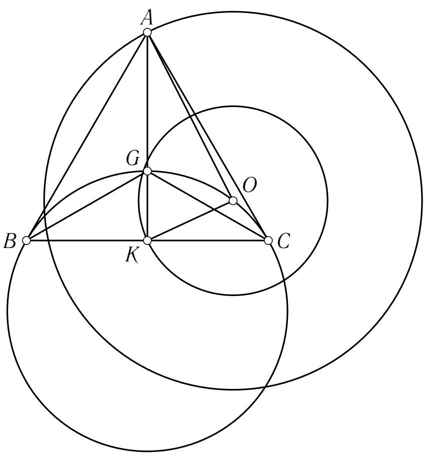


Рис. 14

Поскольку из условия нашей задачи сразу следует, что

$$\frac{AG}{KG} = \frac{AB}{KB} = \frac{AC}{KC} = \frac{AO}{KO} = 2,$$

отсюда вытекает, что точки B, G, O, C лежат на окружности Аполлония для отрезка AK и $\lambda = 2$. Понятно также, что $\angle BGC = \angle BOC$ (или $180^\circ - \angle BOC$).

8. (*Д. Терешин*) Вокруг выпуклого четырёхугольника $ABCD$ описаны три прямоугольника. Известно, что два из этих прямоугольников являются квадратами. Верно ли, что и третий обязательно является квадратом? (Прямоугольник описан около четырёхугольника $ABCD$, если на каждой стороне прямоугольника лежит по одной вершине четырёхугольника). (8–9 *класс*)

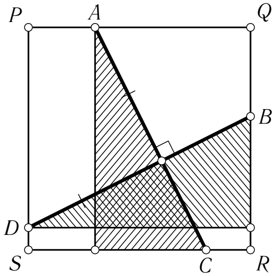


Рис. 15

Р е ш е н и е. Третий прямоугольник также будет квадратом. Доказательство основано на следующем свойстве квадрата. Пусть точки A и C лежат на одной паре противоположных сторон квадрата, а B и D — на другой. Тогда условия $AC \perp BD$ и $AC = BD$ являются равносильными (рис. 15).

Это сразу следует из равенства прямоугольных треугольников, показанных на рисунке. Проведём в нашем четырёхугольнике, вписанном в два квадрата, из точки A прямую, перпендикулярную BD, и отметим

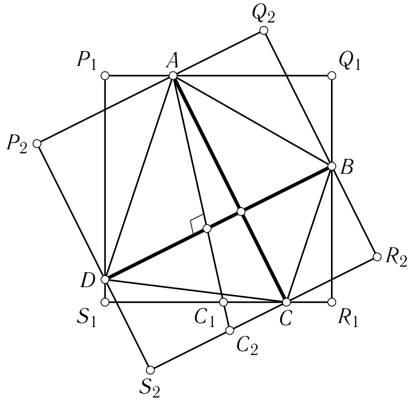


Рис. 16

точки её пересечения с соответствующими сторонами квадрата C_1 и C_2 (рис. 16).

Из указанного выше свойства квадрата вытекает, что $AC_1 = BD$ и $AC_2 = BD$, т. е. $AC_1 = AC_2$ и точки C_1, C_2 должны совпадать. Но у двух сторон квадратов, содержащих эти точки, имеется только одна общая точка — C. Значит, построенный нами перпендикуляр совпадает с AC, и, следовательно, диагонали четырёхугольника $ABCD$ равны и перпендикулярны. Очевидно, что если четырёхугольник с таким свойством вписан в прямоугольник, то прямоугольник является квадратом.

9. (*А. Мякишев*) Пусть O — центр правильного треугольника ABC. Из произвольной точки P плоскости опустили перпендикуляры на стороны треугольника или их продолжения. Обозначим через M точку пересечения медиан треугольника с вершинами в основаниях перпендикуляров. Докажите, что M — середина отрезка PO. (*9 класс*)

Решение. Нам нужно доказать, что $2\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PO}$. Как известно, если G — точка пересечения медиан некоторого треугольника ABC, то для произвольной точки P выполняется равенство

$$3\overrightarrow{PG} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}.$$

С учётом этого свойства задачу можно переформулировать следующим образом. Пусть имеется правильный треугольник ABC и произвольная точка P. Рассмотрим векторы $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{PC}$, а также три вектора $\overrightarrow{n_a}(P)$, $\overrightarrow{n_b}(P)$ и $\overrightarrow{n_c}(P)$, начало каждого из которых расположено в точке P, а ко-

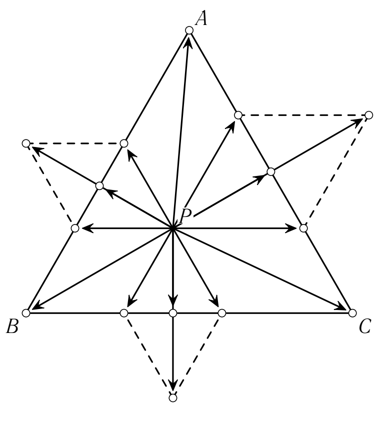


Рис. 17

нец — на основании перпендикуляра, опущенного из точки P на сторону треугольника. Тогда

$$2(\overrightarrow{n_a}(P) + \overrightarrow{n_b}(P) + \overrightarrow{n_c}(P)) = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}.$$

Для доказательства рассмотрим ещё шесть векторов, каждый из которых лежит на прямой, параллельной стороне треугольника и проходящей через точку P (рис. 17).

Начало каждого такого вектора расположено в точке P, а конец на одной из сторон треугольника. (На рисунке изображён случай, когда точка P лежит внутри треугольника.) Через эти векторы легко выразить как векторы, соединяющие P с вершинами, так и векторы с концами в основаниях перпендикуляров, поскольку параллельные линии разбивают треугольник на правильные треугольники и параллелограммы. Как видим, наше утверждение доказано. Легко также убедиться в том, что эти же рассуждения проходят и в случае, когда точка P расположена вне треугольника ABC.

10. (*Т. Емельянова*) Разрежьте неравносторонний треугольник на четыре подобных треугольника, среди которых не все одинаковы. (8–9 *класс*)

Решение. Пусть $AB \neq AC$. Проведём отрезок $B'C'$ так, чтобы $\angle AC'B' = \angle ACB$ (рис. 18).

Ясно, что треугольники ABC и $AB'C'$ подобны, при этом $B'C'$ не параллелен BC. Отметим середину отрезка $B'C'$ — точку M, и достроим треугольник $AB'C'$ до параллелограмма $AB'A'C'$. Далее найдём точку A_1 пересечения AM и BC и построим параллелограмм $AB_1A_1C_1$. Отрезки A_1C_1, B_1A_1 и B_1C_1 осуществляют искомое разрезание.

Замечание. В сущности, приведённое решение использует так называемую симедиану треугольника. Симедианой называется прямая, симметричная медиане

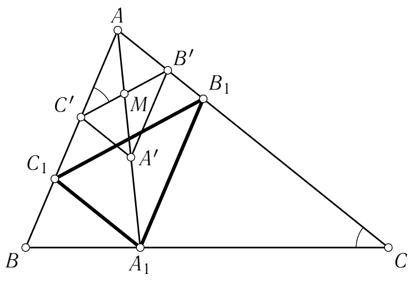


Рис. 18

относительно биссектрисы угла треугольника, через вершину которого проходит медиана. Назовём параллелью (к стороне BC треугольника) любой отрезок PQ с концами на прямых AB и AC, параллельный BC. Понятно, что $\angle APQ = \angle ABC$ и $\angle AQP = \angle ACB$ (рис. 19). Назовём антипараллелью (к стороне BC треугольника) любой отрезок RT с концами на прямых AB и AC такой, что $\angle ART = \angle ACB$ и $\angle ATR = \angle ABC$. (Как несложно проверить, антипараллелью, в частности, является отрезок, образованный основаниями соответствующих высот треугольника.) Очевидно, что отрезок является параллелью тогда и только тогда, когда соответствующая медиана делит его пополам. Поскольку симметрия относительно прямой сохраняет углы и длины отрезков, из этого утверждения вытекает следующая лемма.

Лемма. *Отрезок является антипараллелью тогда и только тогда, когда соответствующая симедиана делит его пополам* (*рис.* 19).

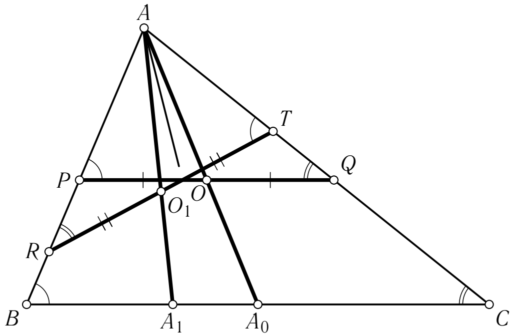


Рис. 19

Теперь осуществим искомое разрезание (рис. 20).

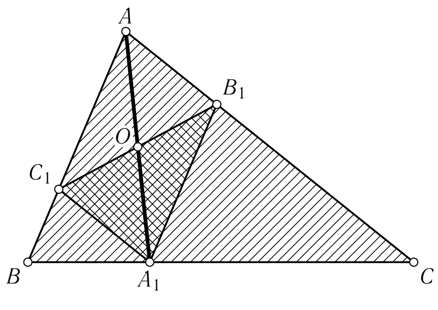


Рис. 20

Допустим, что $AB \neq AC$. Пусть AA_1 — симедиана треугольника, A_1C_1 и A_1B_1 — параллели к сторонам AC и AB соответственно. Поскольку $A_1C_1AB_1$ — параллелограмм, то его диагонали делятся точкой пересечения пополам, т. е. середина C_1B_1 лежит на симедиане, и потому, согласно лемме, отрезок C_1B_1 является антипараллелью. Легко проверить, что треугольники $A_1B_1C_1$, AB_1C_1, C_1BA_1 и B_1A_1C подобны треугольнику ABC, и не все одинаковы. (Для неравнобедренного треугольника основание симедианы A_1 не совпадает с серединой BC. Можно даже показать, что $BA_1/CA_1 = AB^2/AC^2$ — ещё одно интересное свойство симедианы.)

11. (*Л. Емельянов*) Квадрат разрезали на n прямоугольников $a_i \times b_i$, $i = 1, \ldots, n$. При каком наименьшем n в наборе $a_1, \ldots, a_n, b_1 \ldots, b_n$ все числа могут оказаться различными? (8–10 *класс*)

Решение. Наименьшее значение $n = 5$. Покажем сначала, что никакой прямоугольник (в частности, квадрат) нельзя разрезать ни на два, ни на три, ни на четыре прямоугольника с различными сторонами. Очевидно, что если прямоугольник разрезан на два прямоугольника, то у них есть общая сторона. Пусть, далее, прямоугольник разрезан на три прямоугольника. Тогда один из них содержит две вершины исходного треугольника (так как три прямоугольника должны накрыть все четыре вершины исходного), и мы свели задачу к предыдущему случаю (оставшаяся часть — прямоугольник, который необходимо разбить на два).

Наконец, допустим, что прямоугольник разрезан на четыре других. Имеем две возможности: либо один из прямоугольников разбиения содержит две вершины исходного (и мы сводим задачу к разрезанию прямоугольника на три части), либо каждый из прямоугольников разбиения содержит по одной вершине исходного. В последнем случае рассмотрим два прямоугольника, содержащие соседние вершины (рис. 21).

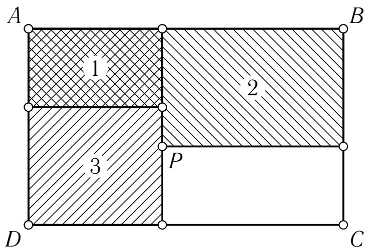


Рис. 21

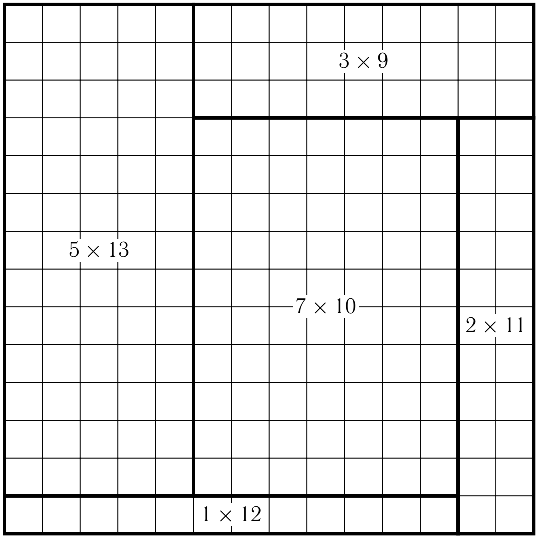


Рис. 22

Они должны соприкасаться (так как очевидно, что если бы был «зазор» между ними, то его нельзя было бы покрыть двумя прямоугольниками, содержащими остальные две вершины исходного). Рассмотрим тот прямоугольник из оставшихся, который содержит точку P. Он не может содержать вершину C, следовательно, он содержит вершину D и, значит, имеет общую сторону с первым прямоугольником.

Предъявим теперь одно из возможных разрезаний квадрата на 5 различных прямоугольников (рис. 22).

12. (*В. Смирнов*) Постройте четырёхугольник по заданным сторонам a, b, c и d и расстоянию l между серединами его диагоналей. (8—10 *класс*)

Решение. Пусть $ABCD$ — искомый четырёхугольник, P, Q, R, S, X, Y — середины отрезков AB, BC, CD, DA, AC, BD соответственно. Так как QX, SY — средние линии треугольников ABC и ABD, то

$$QX = YS = \frac{a}{2}.$$

Аналогично,

$$QY = XS = \frac{c}{2}.$$

Следовательно, зафиксировав точки X и Y и построив треугольники XYQ и XYS, мы найдём точки Q и S. Аналогично находятся точки P и R.

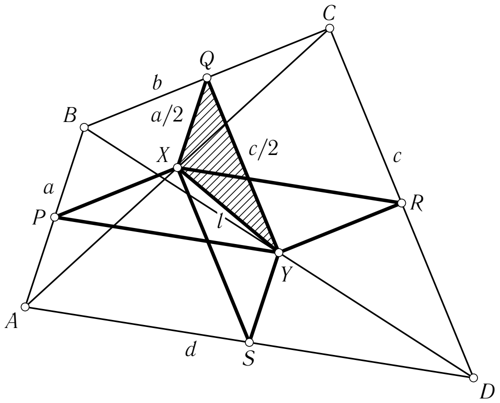


Рис. 23

Проведя теперь через P, Q, R, S прямые, параллельные QX, PX, QY, PY соответственно, получим искомый четырёхугольник (рис. 23).

13. (*А. Заславский*) Дан треугольник ABC и две прямые l_1, l_2. Через произвольную точку D на стороне AB проводится прямая, параллельная l_1, пересекающая AC в точке E, и прямая, параллельная l_2, пересекающая BC в точке F. Построить точку D, для которой отрезок EF имеет наименьшую длину. (9 *класс*)

Решение. Пусть P — точка пересечения перпендикуляров восставленных к AC в точке E и к BC в точке F. Когда D двигается по AB, стороны четырёхугольника $DEPF$ сохраняют направления, и, так как три вершины четырёхугольника двигаются по прямым, четвёртая также движется по прямой. Следовательно, середина отрезка CP, являющаяся центром описанной окружности треугольника CEF, также двигается по прямой (рис. 24). Значит, все эти окружности имеют общую хорду, т. е. помимо C, ещё одну общую точку Q. Поскольку хорда EF стягивает постоянный $\angle C$, то её длина будет минимальной при минимальном радиусе описанной около CEF окружности. Однако среди всех окружностей, содержащих общую хорду, минимальный радиус, очевидно, будет иметь та из них, для которой эта хорда CQ является диаметром.

Отсюда вытекает, например, следующий способ построения точки D. Проведём через A прямую, параллельную l_2, и найдём точку U её пересечения с BC. Через B проведём прямую, параллельную l_1, и найдём точку V её пересечения с AC. Пусть Q — вторая точка пересечения окружностей, описанных около ACU и BCV, E — вторая точка пересече-

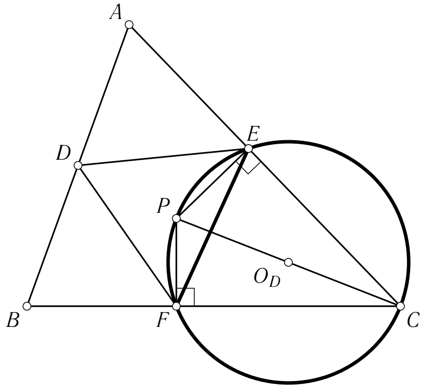


Рис. 24

ния прямой AC и окружности с диаметром CQ. Тогда прямая, проходящая через E и параллельная l_1, пересекает AB в искомой точке.

14. (*Л. Емельянов*) Пусть P — произвольная точка внутри треугольника ABC. Обозначим через A_1, B_1 и C_1 точки пересечения прямых AP, BP и CP соответственно со сторонами BC, CA и AB. Упорядочим площади треугольников AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C, обозначив меньшую через S_1, среднюю — S_2, а большую — S_3. Докажите, что

$$\sqrt{S_1S_2} \leqslant S \leqslant \sqrt{S_2S_3},$$

где S — площадь треугольника $A_1B_1C_1$. (10–11 *класс*)

Решение.

Первый способ. Назовём треугольник $A_1B_1C_1$ чевианным треугольником точки P. Оказывается, любой треугольник ABC можно подходящим аффинным преобразованием перевести в некоторый остроугольный треугольник $A'B'C'$ так, что точка P перейдёт в его ортоцентр, а чевианный треугольник P в ортотреугольник (треугольник, образованный основаниями высот, рис. 25).

Действительно, возьмём произвольный отрезок $B'C'$ и отметим на нём такую точку A_1', что

$$\frac{B'A_1'}{A_1'C'} = \frac{BA_1}{A_1C},$$

а затем восставим в этой точке перпендикуляр к $B'C'$. На этом перпендикуляре построим такую точку A_0, что

$$\angle B'A_0C' = \frac{\pi}{2}$$

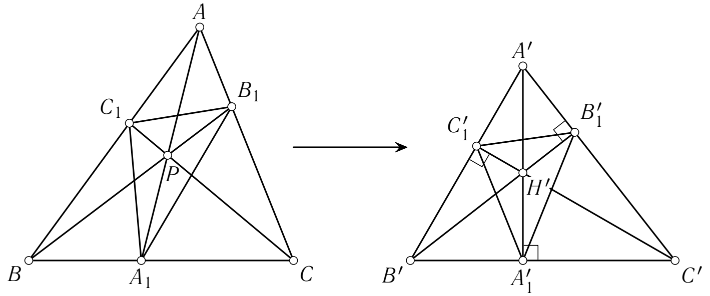


Рис. 25

(точка пересечения перпендикуляра с окружностью, построенной на $B'C'$ как на диаметре, рис. 26).

Далее, рассмотрим точку A'' на этом перпендикуляре и опустим высоту $B'B_1''$ на $A''C'$. Если A'' расположена близко к точке A_0, то отношение $C'B_1''/B_1''A''$ очень велико, а если A_0 удаляется по перпендикуляру на бесконечность, то это отношение стремится к нулю. Из соображений непрерывности следует, что найдётся такая точка A' на перпендикуляре, что

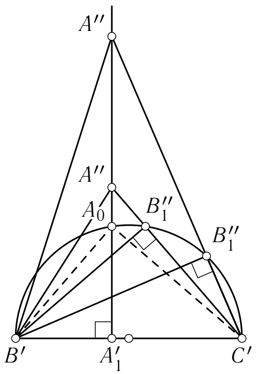


Рис. 26

$$\frac{C'B_1''}{B_1''A'} = \frac{CB_1}{B_1A}.$$

Соответственное равенство третьей пары отношений гарантировано теоремой Чевы. Как известно, для любых двух треугольников ABC и $A'B'C'$ существует единственное аффинное преобразование, отображающее первый треугольник на второй. Поскольку аффинное преобразование прямые переводит в прямые, а также сохраняет отношение длин отрезков, мы нашли аффинное преобразование, переводящее чевианный треугольник в некоторый ортотреугольник. Кроме того, аффинное преобразование сохраняет и отношение площадей. Сказанное означает, что нам достаточно доказать утверждение задачи для остроугольного треугольника и его ортоцентра. Не ограничивая общности будем считать, что площади треугольников AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C соответственно равны S_1, S_2, и S_3. Эти треугольники подобны исходному с коэффициентами $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$ соответственно, поэтому, поскольку все углы острые, косинусы положительны и убывают. Из последней цепочки неравенств следует, что

$$\angle C \leqslant \frac{\pi}{3} \leqslant \angle A.$$

Докажем теперь, что $\sqrt{S_1S_2} \leqslant S$.

После возведения в квадрат и деления числителя и знаменателя на S^2 получим неравенство

$$\frac{\cos^2 A \cos^2 B}{(1-\cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C)^2} \leqslant 1.$$

Но, как нетрудно проверить, в любом треугольнике имеет место равенство

$$1-\cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C = 2\cos A \cos B \cos C,$$

поэтому наше неравенство равносильно $1/4 \leqslant \cos^2 C$, т. е. $\angle C \leqslant \pi/3$. Аналогично доказывается, что $\sqrt{S_2S_3} \geqslant S$.

В т о р о й с п о с о б. Не ограничивая общности будем считать, что площади треугольников AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C соответственно равны S_1, S_2, и S_3 (рис. 27).

Пусть точка P имеет (относительно треугольника ABC) нормированные барицентрические координаты (p, q, r), т. е. $p+q+r=1$. Поскольку P расположена внутри треугольника, то p, q, r — положительные величины. Выразим через них S_1/S. Обозначим через A_2 точку пересечения B_1C_1 и AA_1. Поскольку треугольники AB_1C_1 и $A_1B_1C_1$ имеют общее основание, то, очевидно,

$$\frac{S_1}{S} = \frac{AA_2}{A_1A_2}.$$

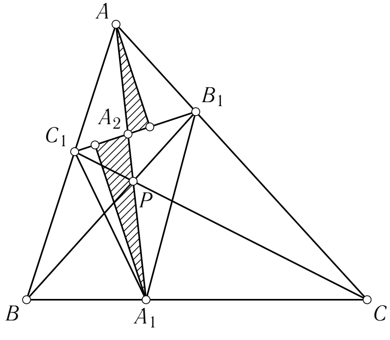


Рис. 27

Далее, понятно, что A_2 имеет координаты $(2p : q : r)$ (центр масс системы $2pA$ и $(q+r)A_1$ расположен на прямой AA_1, а системы $(p+q)C_1$ и $(p+r)B_1$ — на прямой B_1C_1), откуда по правилу рычага имеем

$$\frac{AA_2}{A_1A_2} = \frac{q+r}{2p} = \frac{1-p}{2p}.$$

Совершенно аналогично,

$$\frac{S_2}{S} = \frac{1-q}{2q} \quad \text{и} \quad \frac{S_3}{S} = \frac{1-r}{2r}.$$

Поскольку $S_1 \leqslant S_2 \leqslant S_3$, отсюда следует, что $p \geqslant q \geqslant r$. С учётом равенства $p+q+r=1$ имеем также $p \geqslant 1/3 \geqslant r$. Докажем теперь, что $\sqrt{S_1S_2} \leqslant S$.

Подставляя полученные выше значения отношений, получаем

$$(1-p)(1-q) \leqslant 4pq,$$

т. е. $r \leqslant 3pq$. Но

$$\frac{pq}{r} \geqslant \frac{1}{3} \cdot \frac{q}{r} \geqslant \frac{1}{3}.$$

Точно так же доказывается, что $\sqrt{S_2S_3} \geqslant S$ (используя неравенство $r \leqslant 1/3$).

Замечание. Идеи, на которых основывалось доказательство, можно реализовать, не используя геометрию масс. Например, ввести отношения

$$\alpha = \frac{BA_1}{CA_1}, \quad \beta = \frac{CB_1}{AB_1}, \quad \gamma = \frac{AC_1}{BC_1}$$

и с помощью теоремы Фалеса (проводя соответствующие параллели) выразить через них отношения площадей.

Третий способ. (*Авксентьев Евгений, г. Ростов-на-Дону, МОУ Гимназия* №5) Следующее симпатичное решение основано на так называемой теореме Мёбиуса. Пусть P — произвольная точка внутри треугольника ABC. Обозначим через A_1, B_1 и C_1 точки пересечения прямых AP, BP и CP соответственно со сторонами BC, CA, AB, а площади треугольников AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C и $A_1B_1C_1$ — S_1, S_2, S_3 и S соответственно. Тогда

$$S^3 + (S_1+S_2+S_3)S^2 - 4S_1S_2S_3 = 0.$$

(Это несложно доказать, используя, например, найденные нами отношения площадей в предыдущих рассуждениях.) Рассмотрим функцию

$$\Phi(x) = x^3 + (S_1+S_2+S_3)x^2 - 4S_1S_2S_3.$$

По теореме Мёбиуса $\Phi(S)=0$. Кроме того, очевидно, что $\Phi(x)$ возрастает на $(0,\infty)$ (как сумма двух возрастающих функций). Поэтому нам достаточно показать, что

$$\Phi(\sqrt{S_1S_2}) \leqslant 0 \leqslant \Phi(\sqrt{S_2S_3}).$$

Но

$$\Phi(\sqrt{S_1S_2}) = S_1S_2(\sqrt{S_1S_2}+S_1+S_2-3S_3),$$

а

$$\sqrt{S_1S_2}+S_1+S_2-3S_3 \leqslant \frac{3}{2}(S_1+S_2)-3S_3 \leqslant 0$$

(среднее геометрическое двух положительных величин не превосходит их среднего арифметического). Второе неравенство доказывается аналогично.

15. (*А. Заславский*) Дана окружность с центром в начале координат. Докажите, что найдётся окружность меньшего радиуса, на которой лежит не меньше точек с целыми координатами. (11 *класс*)

Решение. Рассмотрим поворотную гомотетию с центром в начале координат, коэффициентом $1/\sqrt{2}$ и углом поворота $\pi/4$. Если квадрат радиуса данной окружности чётное число, то все её целые точки переходят в целые, и мы получаем искомую окружность. Если квадрат радиуса нечётное число, то все целые точки переходят в центры единичных квадратов с вершинами в целых точках, и искомая окружность получается после переноса на вектор $(1/2, 1/2)$. Это достаточно очевидно из наглядных соображений — на рис. 28 изображено действие на целочисленную решётку сначала сжатием, а потом поворотом.

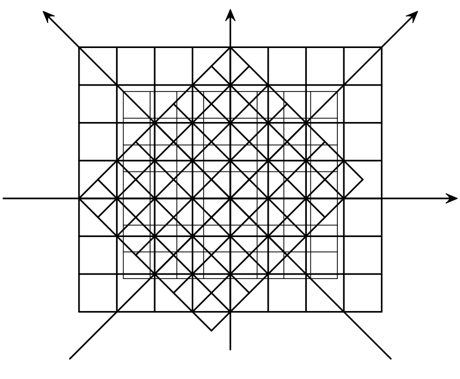


Рис. 28

Чисто формально, точка с координатами (x, y) под действием указанных поворота и растяжения переходит в точку с координатами

$$(x', y') = \left(\frac{x-y}{2}, \frac{x+y}{2}\right).$$

Если квадрат радиуса — чётное число, то x и y одной чётности, поэтому x', y' — целые и

$$x'^2 + y'^2 = \frac{x^2+y^2}{2} = \frac{R^2}{2}.$$

Если же квадрат радиуса — число нечётное, то чётность x и y различна, поэтому после сдвига на вектор $(1/2, 1/2)$ получим целую точку (x'', y'') и

$$\left(x'' - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y'' - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{R^2}{2}.$$

16. (*А. Заславский*, *Б. Френкин*) В остроугольном неравностороннем треугольнике отметили 4 точки: центры вписанной и описанной окружностей, центр тяжести (точка пересечения медиан) и ортоцентр (точка пересечения высот). Затем сам треугольник стёрли. Оказалось, что невозможно установить, какому центру соответствует каждая из отмеченных точек. Найдите углы треугольника. (8–9 *класс*)

Решение. Треугольник, удовлетворяющий условию задачи, — равнобедренный с углами при основании, равными $\arccos(1/4)$. Пусть ABC — исходный треугольник, A_1, B_1, C_1 — середины сторон BC, CA и AB соответственно. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ гомотетичны относительно общего центра тяжести M (с коэффициентом $1/2$), центр O описанной окружности треугольника ABC является ортоцентром треугольника $A_1B_1C_1$, точка M лежит на отрезке OH (H — ортоцентр треугольника ABC) и $HM = 2MO$ (прямая, содержащая эти три центра, называется прямой Эйлера треугольника ABC).

Поэтому если точка I (центр вписанной окружности) не лежит на одной прямой с тремя остальными точками, то можно однозначно установить роль каждой из точек в треугольнике ABC. Отметим, что эта прямая проходит не более чем через одну вершину треугольника, так что можно считать, что точки A и B не лежат на ней. Так как

$$\angle OBA = \angle HBC = \frac{\pi}{2} - \angle C,$$

то BI является биссектрисой угла HBO. Значит, точка I лежит на отрезке OH, причём $OI = 2IH$ (иначе роль точек устанавливается однозначно).

По свойству биссектрисы получаем, что $BO = 2BH$. Рассуждая аналогично, получим, что $AO = 2AH$. Таким образом,

$$AH = BH = \frac{R}{2},$$

где R — радиус описанной около ABC окружности. Заметим теперь, что из гомотетии, указанной в начале решения, следует также, что $AH = 2OA_1$ (и эти отрезки параллельны). Понятно также, что $OA_1 = R\cos A$. Поэтому

$$AH = 2R\cos A \quad \text{и} \quad \cos A = \frac{1}{4}.$$

Точно так же доказывается, что $\cos B = 1/4$.

17. (*А. Мякишев*) В треугольник ABC вписана окружность и отмечен её центр I и точки касания P, Q, R со сторонами BC, CA и AB соответственно. Одной линейкой постройте точку K, в которой окружность, проходящая через вершины B и C, касается (внутренним образом) вписанной окружности. (11 *класс*)

Р е ш е н и е. Согласно известной теореме Штейнера, если на плоскости фиксирована окружность с отмеченным центром, то одной линейкой можно построить всё то же самое, что и линейкой с циркулем. Но применение стандартных методов, не учитывающих особенностей заданной в условии конструкции, требует изрядного количества шагов. Естественно, требовалось при построении ограничиться минимальным количеством линий. Оказывается, можно обойтись всего лишь четырьмя! Сразу заметим, что если $AB = AC$, то построение очевидно (K совпадает с точкой, диаметрально противоположной точке P), и мы будем рассматривать случай, когда $AB \neq AC$.

П о с т р о е н и е.

1. Проведём прямую BC.

2. Проведём прямую QR и отметим точку T пересечения этой прямой с прямой BC.

3. Построим точку P_d, диаметрально противоположную точке P.

4. Проведём прямую P_dT и отметим точку K — вторую точку пересечения этой прямой с вписанной окружностью. Точка K и есть искомая (рис. 29).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Понятно, что точка T будет делить отрезок BC в том же отношении, что и точка P (по теоремам Чевы и Менелая). Пусть интересующая нас окружность построена. Тогда KP — биссектриса угла BKC (по известной лемме Архимеда: пусть прямая пересекает данную

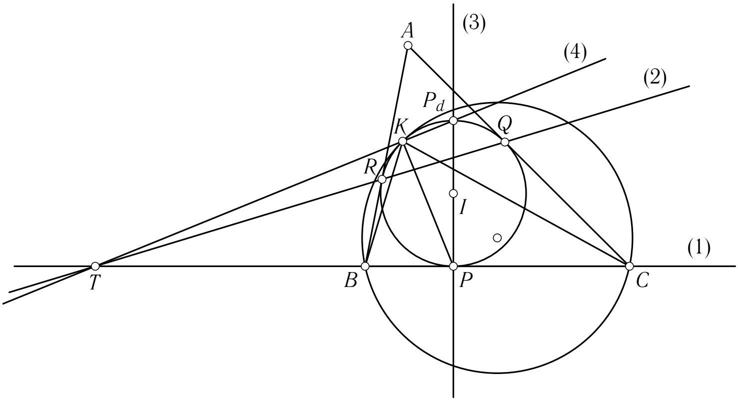


Рис. 29

окружность в точках B и C; рассмотрим произвольную окружность, касающуюся данной в точке K, а прямой BC в точке P; тогда прямая KP проходит через середину одной из двух дуг BC)[1].

По свойству биссектрисы

$$\frac{BP}{CP} = \frac{KB}{KC} = \lambda \neq 1.$$

Поэтому точка K лежит на окружности Аполлония (см. решение задачи 7, третий способ) для отрезка BC с отношением λ, построенной на PT как на диаметре, т. е. $\angle TKP = 90^\circ$ или, что то же, $\angle PKP_d = 90^\circ$. Из этих рассуждений следует обоснование нашего построения.

18. (*В. Протасов*) На плоскости даны три прямые l_1, l_2, l_3, образующие треугольник, и отмечена точка O — центр описанной окружности этого треугольника. Для произвольной точки O плоскости обозначим через O_i точку, симметричную точке O относительно прямой l_i.

а) Докажите, что для произвольной точки M прямые, соединяющие середины отрезков O_1O_2 и M_1M_2, O_2O_3 и M_2M_3, O_3O_1 и M_3M_1, пересекаются в одной точке. (10—11 *класс*)

б) Где может лежать эта точка пересечения? (10—11 *класс*)

Р е ш е н и е.

П е р в ы й с п о с о б. Покажем, что эти прямые пересекаются в точке, лежащей на окружности Эйлера. (Напомним, что окружностью Эйлера треугольника ABC называют окружность, описанную около его сере-

[1] См.: Вторая олимпиада, заочный тур, задача 6, лемма.

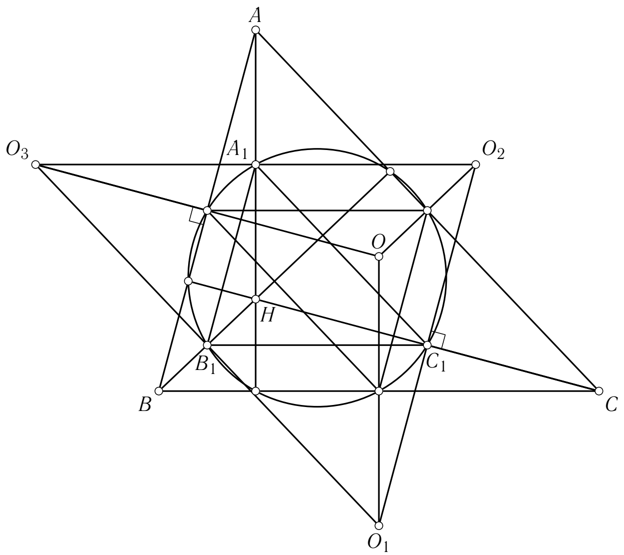


Рис. 30

динного треугольника, т. е. проходящую через середины его сторон. На этой окружности также лежат основания высот и середины отрезков, соединяющих ортоцентр с вершинами.)

Пусть ABC — треугольник, образованный прямыми l_i, H — его ортоцентр. Тогда середины O_2O_3, O_3O_1, O_1O_2 совпадают с серединами отрезков AH, BH, CH (в дальнейшем будем обозначать их A_1, B_1, C_1) и, стало быть, лежат на окружности Эйлера треугольника ABC. Действительно, стороны треугольника $O_1O_2O_3$ параллельны средним линиям треугольника ABC и вдвое больше их, поскольку переводятся друг в друга гомотетией с центром в O и коэффициентом 2. Следовательно, треугольник $O_1O_2O_3$ центрально симметричен ABC. Значит, прямая, проходящая через C и середину O_1O_2, параллельна прямой, проходящей через O_3 и середину AB, т. е. совпадает с высотой треугольника ABC, а H является центром гомотетии ABC и $A_1B_1C_1$ (рис. 30).

Пусть, далее, M — произвольная точка, D — середина M_1M_2. Тогда

$$\overrightarrow{DC_1} = \frac{\overrightarrow{DO_1} + \overrightarrow{DO_2}}{2}$$

и, так как $\overrightarrow{M_1O_1}$ и $\overrightarrow{M_2O_2}$ получаются друг из друга поворотом вокруг точки C на $2\angle C$, $\overrightarrow{DC_1}$ образует с каждым из них угол, равный $\angle C$.

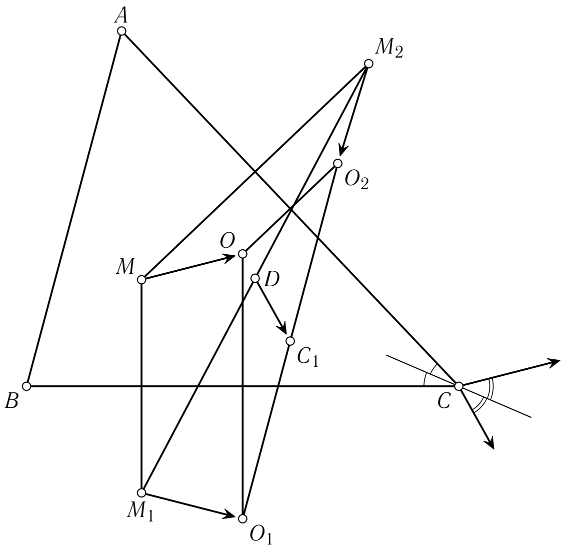


Рис. 31

Кроме того, $\overrightarrow{M_1O_1}$ и $\overrightarrow{M_2O_2}$ переходят в $\overrightarrow{MO}$ при симметрии относительно CB и CA соответственно, поэтому $\overrightarrow{DC_1}$ и $\overrightarrow{MO}$ образуют равные углы с биссектрисой угла C (а значит, равные углы и с биссектрисой угла C_1 в треугольнике $A_1B_1C_1$, (рис. 31).

Проведя аналогичные рассуждения для двух других середин, приходим к выводу, что прямые, соединяющие A_1, B_1, C_1 с серединами сторон треугольника $M_1M_2M_3$, симметричны относительно биссектрис треугольника $A_1B_1C_1$ прямым, проходящим через A_1, B_1, C_1 и параллельным OM. В заключение воспользуемся следующей классической теоремой планиметрии.

Теорема. *Тройка прямых, проходящих через вершины треугольника, пересекается в одной точке, расположенной на описанной около этого треугольника окружности, тогда и только тогда, когда прямые, симметричные данным относительно биссектрис соответствующих углов, параллельны.* (Несложное доказательство использует простой подсчёт углов).

Согласно этой теореме тройка прямых в нашей задаче пересекается на описанной около треугольника $A_1B_1C_1$ окружности, т. е. на окружности Эйлера исходного треугольника.

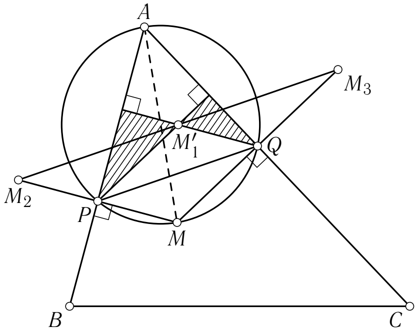


Рис. 32

Второй способ. (*Авксентьев Евгений*, *г. Ростов-на-Дону*, *МОУ гимназия* №5) Итак, ABC — треугольник, образованный прямыми l_i, H — его ортоцентр и A', B', C' — основания высот, опущенных на стороны BC, CA, AB соответственно. Дадим теперь следующее определение. Пусть имеются две подобные фигуры Ψ_1 и Ψ_2 и некоторое преобразование подобия $\mathcal{H}$, переводящее одну фигуру в другую. Скажем, что две фигуры Φ_1 и Φ_2 одинаково расположены относительно Ψ_1 и Ψ_2, если преобразование $\mathcal{H}$ также переводит Φ_1 в Φ_2. Теперь докажем, что точки M_1' (середина M_3M_2) и M одинаково расположены относительно треугольников $AB'C'$ и ABC (как известно, эти треугольники подобны с коэффициентом $1/|\cos A|$, причём подобие это можно представить как композицию осевой симметрии относительно биссектрисы угла A и гомотетии с центром в A — см. замечание к решению задачи 10). Для этого достаточно показать, что

$$AM = \frac{AM_1'}{|\cos A|}$$

(отношение длин соответствующих отрезков равно коэффициенту подобия) и что отношение расстояний от точки M_1' до AB и AC обратно пропорционально отношению расстояний от M до тех же сторон (т. е. прямая AM_1' при симметрии относительно биссектрисы угла A переходит в прямую AM, рис. 32).

Пусть P, Q — проекции M на AB и AC. Так как $M_1'Q$ — средняя линия треугольника M_2MM_3, то она перпендикулярна AB. Из тех же соображений $M_1'P$ перпендикулярна AC, поэтому M_1' — ортоцентр треугольника APQ, а значит,

$$AM_1' = 2\rho\cos A,$$

где ρ — радиус окружности, описанной около APQ. Очевидно, что

$$\rho = \frac{AM_1'}{2}.$$

Равенство же обратных отношений до сторон вытекает из подобия заштрихованных на рисунке треугольников. Точно так же доказывается, что M_2' и M одинаково расположены относительно $A'BC'$ и ABC, а M_3' и M — относительно $A'B'C$ и ABC. Теперь, если в качестве M мы выберем точку O — центр описанной около ABC окружности, то, очевидно, точки O_1', O_2', O_3' будут серединами отрезков, соединяющих ортоцентр H треугольника ABC с его вершинами. (Поскольку прямые, соединяющие вершину треугольника с H и O, симметричны относительно соответствующей биссектрисы, — факт, с которым мы уже сталкивались при решении задачи 16 — и потому, например, точка O_1' лежит на прямой AH. Кроме того, $AO = R$ и $AH = 2R\cos A$, значит, $AO_1' = AH/2$ и т. д.). Из доказанной нами одинаковой расположенности точек следует, что прямые $O_1'M_1'$, $O_2'M_2'$ и $O_3'M_3'$ одинаково расположены относительно треугольников $AB'C'$, $A'BC'$ и $A'B'C$ (рис. 33).

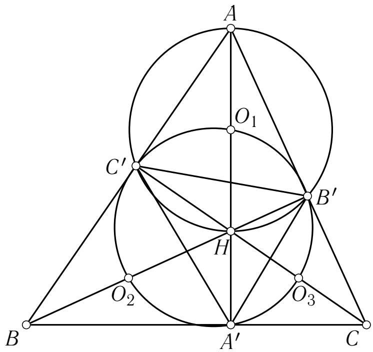


Рис. 33

Кроме того, понятно (ведь при подобии треугольников соответственные элементы переходят в соответственные, и, значит, центры описанных окружностей переходят друг в друга), что и прямые $O_1'A'$, $O_2'B'$ и $O_3'C'$ одинаково расположены относительно тех же треугольников, причём все эти точки находятся на одной окружности — окружности Эйлера треугольника ABC. Наконец, отсюда заключаем, что углы между парами $O_1'M_1'$ и $O_1'A'$, $O_2'M_2'$ и $O_2'B'$, $O_3'M_3'$ и $O_3'C'$ одинаковы.

Таким образом, мы показали, что прямые $O_1'M_1'$, $O_2'M_2'$ и $O_3'M_3'$ пересекаются в одной точке, расположенной на окружности Эйлера исходного треугольника.

19. (*А. Тарасов*) Как известно, Луна вращается вокруг Земли. Будем считать, что Земля и Луна — это точки, а Луна вращается вокруг Земли по круговой орбите с периодом один оборот в месяц. Летающая тарелка находится в плоскости лунной орбиты. Она может перемещаться прыжками через Луну и Землю — из старого места (точки A) она моментально

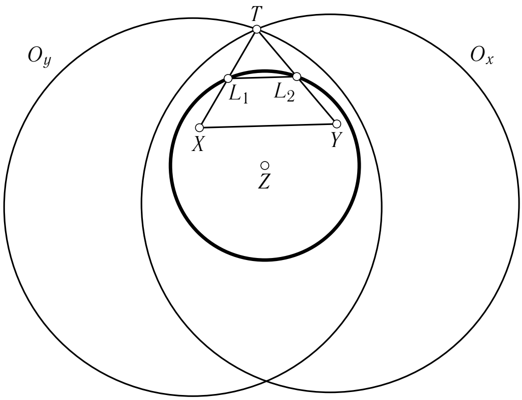


Рис. 34

появляется в новом (в точке A') так, что в середине отрезка AA' находится или Луна, или Земля. Между прыжками летающая тарелка неподвижно висит в космическом пространстве.

а) Определите, какое минимальное количество прыжков потребуется летающей тарелке, чтобы допрыгнуть из любой точки внутри лунной орбиты до любой другой точки внутри лунной орбиты. (8—11 *класс*)

б) Докажите, что летающая тарелка, используя неограниченное количество прыжков, может допрыгнуть из любой точки внутри лунной орбиты до любой другой точки внутри лунной орбиты за любой промежуток времени, например, за секунду. (8—11 *класс*)

Р е ш е н и е.

а) Из любой точки внутри лунной орбиты можно допрыгнуть до любой другой точки внутри лунной орбиты за два прыжка. Для этого оба раза надо прыгнуть относительно Луны: сначала в момент, когда Луна находится в точке L_1, а второй раз — когда Луна находится в точке L_2. После двух прыжков летающая тарелка переместится на вектор $2\overrightarrow{L_1L_2}$.

Для любых двух точек внутри орбиты X и Y можно найти хорду L_1L_2, такую что $\overrightarrow{XY} = 2\overrightarrow{L_1L_2}$. Эту хорду можно, например, построить, проведя диаметр, параллельный XY, и отложить на нём отрезок длиной $XY/2$, середина которого совпадает с центром окружности Z, а затем из концов этого отрезка провести перпендикуляры, которые и отсекут искомую хорду.

А можно рассмотреть гомотетии с центрами в точках X и Y и коэффициентом 2. Образы лунной орбиты при этом должны пересечься, поскольку, если радиус лунной орбиты R и центры образов O_x, O_y, то (рис. 34)

$$O_xO_y < XY + 2(XZ + YZ) < 4R.$$

б) Пусть начальное положение Луны — L_0, конечное — L_1. Будем рассматривать пару прыжков сначала относительно Земли, а потом относительно Луны как двойной прыжок. При этом тарелка перемещается на вектор $2\overrightarrow{ZL}$, конец этого вектора — точка T — будет лежать на дуге t_0t_1 окружности с центром в Z и радиусом, вдвое большим, чем радиус орбиты Луны. Будем такие вектора в дальнейшем обозначать просто $\overrightarrow{T}$. Мы прыгаем мгновенно, значит, в любой момент времени мы можем прыгнуть на целое число прыжков $k\overrightarrow{T}$ (чтобы прыгнуть на вектор $-\overrightarrow{T}$, сначала надо прыгнуть относительно Луны, а потом относительно Земли). Теперь, чтобы из точки X попасть в точку Y, надо представить вектор $\overrightarrow{XY}$ как конечную сумму векторов, состоящих из слагаемых вида $k_i\overrightarrow{T_i}$, $k_i \in Z$, а T_i — некоторый набор точек на дуге t_0t_1, расположенных последовательно друг за другом (рис. 35).

Сначала представим $\overrightarrow{XY}$ в виде суммы $\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}$ так, чтобы оба этих вектора были бы перпендикулярны некоторым радиусам нашего сектора. Это можно сделать, положив $\overrightarrow{v_1} = \lambda(\overrightarrow{t_1} - \overrightarrow{t_0})$, $\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{XY} - \overrightarrow{v_1}$. Поскольку $\overrightarrow{v_1}$ перпендикулярен «серединному» радиусу при всех значениях λ и при

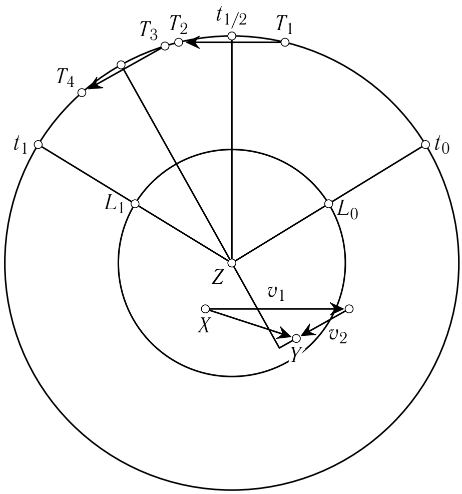


Рис. 35

увеличении λ по модулю $\overrightarrow{v_2}$ стремится к $-\overrightarrow{v_1}$, то при достаточно большом λ $\overrightarrow{v_2}$ также будет перпендикулярен некоторому радиусу. Очевидно, что найдутся достаточно большие по модулю целые m_1 и m_2 и некоторые точки на дуге T_1, T_2, T_3, T_4, расположенные последовательно и такие, что $\overrightarrow{v_1} = m_1(\overrightarrow{T_2} - \overrightarrow{T_1})$ и $\overrightarrow{v_2} = m_2(\overrightarrow{T_3} - \overrightarrow{T_4})$. Искомое представление получено.

20. (*А. Заславский*) Пусть I — центр сферы, вписанной в тетраэдр $ABCD$, A', B', C', D' — центры сфер, описанных около тетраэдров $IBCD$, $ICDA$, $IDBA$, $IABC$ соответственно. Докажите, что сфера, описанная около $ABCD$, целиком лежит внутри сферы, описанной около $A'B'C'D'$. (8–11 *класс*)

Решение. Пусть R, r — радиусы описанной и вписанной сфер $ABCD$, O — центр описанной сферы $ABCD$, L — центр описанной окружности треугольника ABC, H — проекция I на плоскость ABC. Из условия следует, что O и D' лежат на перпендикуляре к плоскости ABC, проходящем через L, поэтому прямые OD' и IH параллельны. Кроме того, $D'A = D'I$ (как радиусы сферы, описанной около $IABC$), $OA = R$, $IH = r$.

Дважды применим теорему косинусов — к треугольникам $AD'O$ и $OD'I$:

$$R^2 = D'A^2 + D'O^2 - 2D'A \cdot D'O \cos\angle AD'O$$
$$OI^2 = D'I^2 + D'O^2 - 2D'I \cdot D'O \cos\angle ID'O.$$

Вычитая из первого равенства второе, получим:

$$R^2 - OI^2 = 2D'O \cdot (D'I \cos\angle ID'O - D'A \cos\angle AD'O).$$

Следовательно,

$$D'O = \frac{R^2 - OI^2}{2r}.$$

Аналогично доказывается, что и точки A', B', C' удалены от O на такое же расстояние. Таким образом, сферы $ABCD$ и $A'B'C'D'$ концентричны (т. е. их центры совпадают), и $D'O = \rho$ — радиусу сферы, описанной около $A'B'C'D'$. Докажем, что $\rho > R$. Для этого проведём плоскость DOI. Она пересекает описанную и вписанную сферу по окружностям с центрами O, I и радиусами R, r, а тетраэдр — по некоторому треугольнику. Вершина D этого треугольника лежит на большей окружности, а из двух других вершин по крайней мере одна лежит внутри этой окружности. Кроме того, меньшая окружность целиком лежит внутри этого треугольника и внутри большей окружности.

Поэтому, если провести через D хорды DX_1 и DY_1 большей окружности, касающейся меньшей, то меньшая окружность окажется строго внутри треугольника DX_1Y_1. Будем теперь «раздувать» меньшую окружность, сохраняя центр и увеличивая радиус. Из соображений непрерывности следует, что наступит момент, когда «раздутая» окружность (некоторого радиуса r') будет вписана в треугольник $DX'Y'$, образованный парой касательных с вершиной в D. Этот же треугольник будет вписан в большую окружность, поэтому для него выполняется классическое соотношение, выражающее расстояние между центрами вписанной и описанной окружности через их радиусы (так называемая формула Эйлера):

$$OI' = R^2 - 2Rr'.$$

Следовательно,

$$r' = \frac{R^2 - OI^2}{2R}.$$

Понятно также, что $r' > r$. Задача решена.

21. (*Н. Долбилин*) Планета «Тетраинкогнито», покрытая «океаном», имеет форму правильного тетраэдра с ребром 900 км. Какую площадь океана накроет «цунами» через 2 часа после тетратрясения с эпицентром в а) центре грани, б) середине ребра, если скорость распространения цунами 300 км/час? (10–11 *класс*)

Решение.

а) Рассмотрим развёртку в виде правильного треугольника и докажем, что кратчайший путь из его центра в любую точку будет на этой

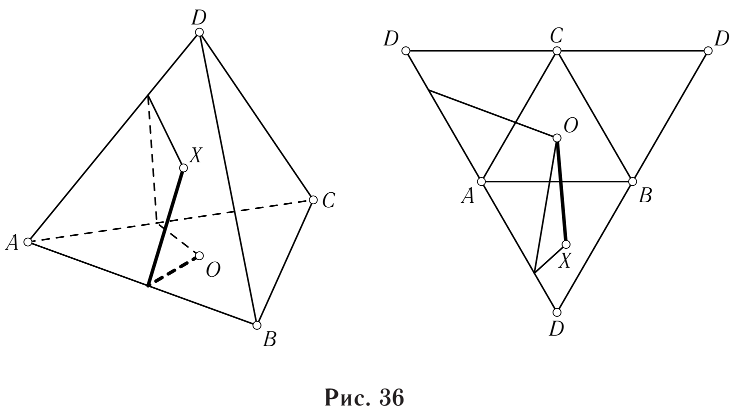


Рис. 36

развёртке отрезком. Пусть O — центр грани ABC, X — точка на грани ABD и некоторый путь из O в X пересекает сначала ребро AC. Если продолжить этот путь на развёртке, мы попадём в некоторую точку на ребре AD. Но в эту точку ведёт и симметричный путь через ребро AB, через которое в X можно попасть напрямую (рис. 36).

Поэтому площадь, которую накроет цунами, есть разность между площадью круга радиусом 600 км и утроенной площадью сегмента (рис. 37).

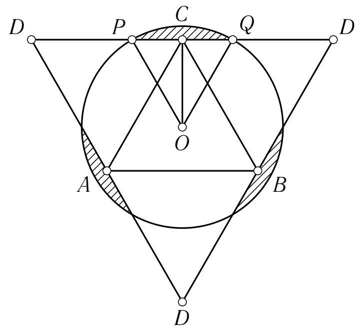


Рис. 37

$$\cos\angle POC = \frac{OC}{OP} = \frac{900}{600\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \text{значит,} \quad \angle POQ = \pi/3.$$

Площадь сегмента есть разность площадей сектора и треугольника:

$$S_{\text{сегм}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3}\cdot 600^2 - S_{\triangle} = \frac{600^2}{2}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Следовательно, площадь цунами

$$\pi\cdot 600^2 - \frac{3}{2}\cdot 600^2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \\ = 180\,000\pi + 270\,000\sqrt{3}.$$

б) Рассматривая «двойную» развёртку тетраэдра и рассуждая как в предыдущем случае, убеждаемся в том, что кратчайшие пути лежат внутри заштрихованного прямоугольника (рис. 38).

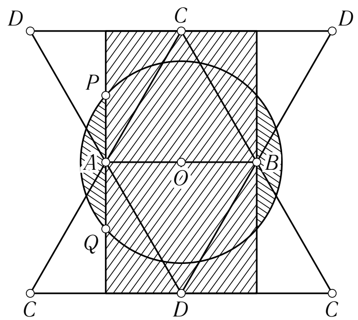


Рис. 38

Площадь, которую накроет цунами, есть разность площади круга и удвоенной площади сегмента.

$$\angle POA = \arccos\frac{OA}{OP} = \arccos\frac{3}{4}, \qquad PQ = 2PO\sin\angle POA = 300\sqrt{7},$$

$$S_{\text{сегм}} = 2\cdot 180\,000\arccos\frac{3}{4} - 67\,500\sqrt{7},$$

$$S = \pi\cdot 600^2 - 720\,000\arccos\frac{3}{4} + 135\,000\sqrt{7} = 720\,000\arcsin\frac{3}{4} + 135\,000\sqrt{7}.$$

22. (*В. Босс*) К граням тетраэдра восставлены перпендикуляры в их центрах тяжести (точках пересечения медиан). Докажите, что проекции трёх перпендикуляров на четвёртую грань пересекаются в одной точке. (10–11 *класс*)

Решение. Пусть $ABCD$ — данный тетраэдр, A', B', C', D' — центры тяжести граней BCD, CDA, DAB, ABC. Оказывается, грани тетраэдра, образованного центроидами, параллельны соответственным граням исходного тетраэдра. Так, например, плоскость ABC параллельна плоскости $A'B'C'$ и т. д.

Действительно, пусть точки P и Q — середины AC и AB. Так как центроид делит медиану в отношении $2:1$, то по теореме, обратной теореме Фалеса, $B'C' \parallel PQ$. Но $PQ \parallel BC$ как средняя линия, следовательно, $B'C' \parallel BC$. Точно так же $A'C' \parallel AC$, и по признаку параллельности двух плоскостей грани параллельны. Поэтому перпендикуляры, восставленные из точек A', B', C', D' к соответствующим граням $ABCD$, являются высотами тетраэдра $A'B'C'D'$. По теореме о трёх перпендикулярах их проекции на плоскость грани $A'B'C'$ являются высотами этой грани и, значит, пересекаются в одной точке. Но тогда их проекции на параллельную плоскость ABC также пересекаются в одной точке.

23. (*Л. и Т. Емельяновы*) Оклейте куб в один слой пятью равновеликими выпуклыми пятиугольниками. (10–11 *класс*)

Решение. Например, это можно сделать следующим образом, рассмотрев такую развёртку куба (рис. 39).

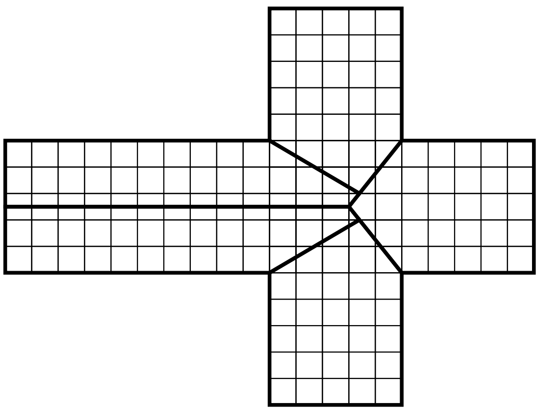


Рис. 39

24. (*В. Сендеров*) Дан треугольник, все углы которого меньше φ, где $\varphi < 2\pi/3$. Докажите, что в пространстве существует точка, из которой все стороны треугольника видны под углом φ. (10–11 *класс*)

Решение.

Первый способ. Пусть ABC — данный треугольник. Построим на каждой его стороне во внешнюю сторону дуги, вмещающие угол φ. Покажем, что на дугах BC, CA, AB найдутся такие точки X, Y, Z соответственно, что $AZ = AY$, $BZ = BX$, $CX = CY$. Пусть AC — наибольшая сторона треугольника, AB — наименьшая. Возьмём произвольную точку Z на дуге AB, найдём на дуге BC точку X такую, что $BX = BZ$ (X определяется однозначно, так как $AB \leqslant BC$), и построим такую точку Y, лежащую по разные стороны с B от прямой AC, что $AY = AZ$, $CY = CX$. При $Z = B$ имеем $AY = AB$, $CY = CB$. Следовательно, $\angle AYC = \angle B < \varphi$ и Y лежит вне сегмента, построенного на AC (рис. 40).

При $Z = A$ точка Y не существует, так как $AC \geqslant BC$. Следовательно, при некотором промежуточном положении точки Z точка Y попадает на дугу AC (рис. 41).

Осталось доказать, что из треугольников ABC, ABZ, BCX, ACY можно склеить тетраэдр, т. е. что хотя бы в одной из вершин A,

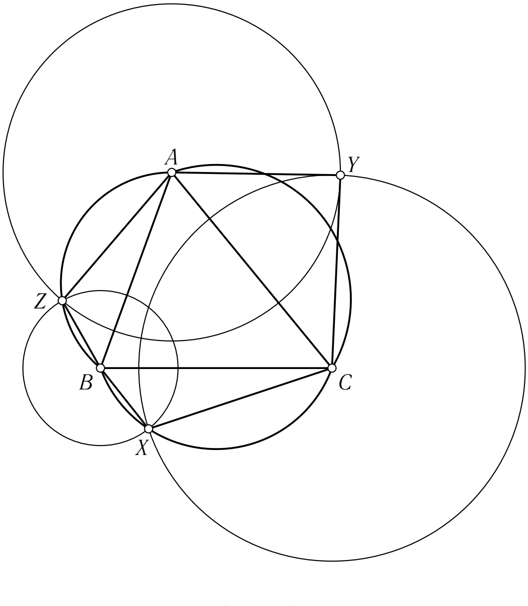


Рис. 40

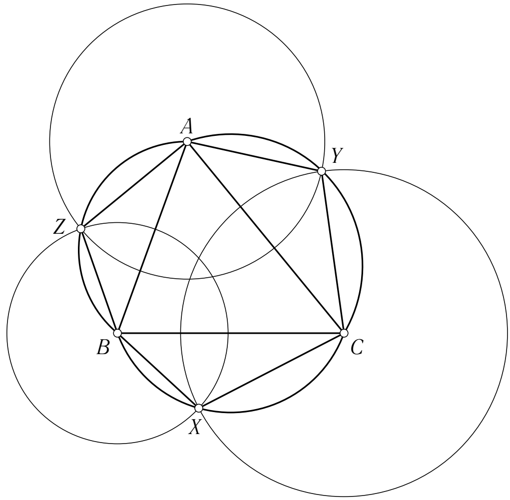


Рис. 41

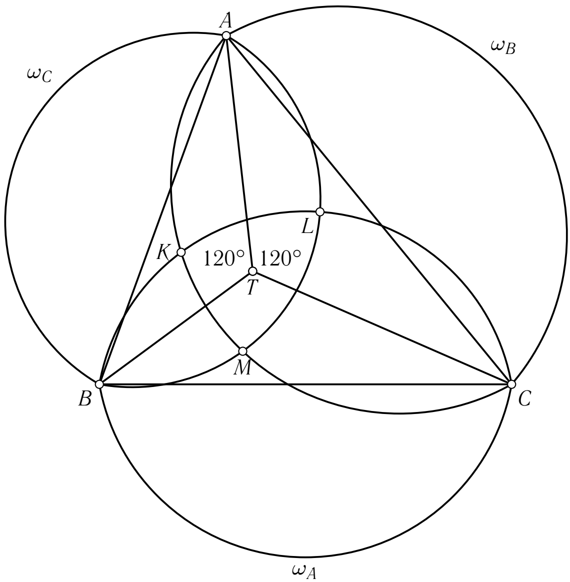


Рис. 42

B, C угол треугольника ABC меньше суммы примыкающих к той же вершине углов двух других треугольников. Если это не так, то $\angle A + \angle B + \angle C \geqslant 3\pi - 3\varphi > 3\pi - 2\pi = \pi$ — противоречие. (Мы воспользовались известной теоремой стереометрии: три плоских угла с общей вершиной образуют трёхгранный угол тогда и только тогда, когда любой из них меньше суммы двух других).

Второй способ. (*Печёнкин Николай*, *г. Москва*, *школа* № 192) Для каждого из отрезков AB, BC и CA построим на плоскости множество точек, из которых эти отрезки видны под углом φ — получим 6 дуг. Для BC пусть это множество ω_A, для AC — ω_B и для AB — ω_C. K, L, M — точки пересечения этих множеств (рис. 42). Очевидно, существует область, лежащая внутри всех трёх областей с границами из двух дуг (этой области, например, принадлежит точка Ферма—Торричелли, из которой все стороны треугольника видны под углом $2\pi/3$).

Понятно, что точки M, L, K лежат в областях, ограниченных ω_A, ω_B, ω_C соответственно. Далее, множество точек пространства, из которых отрезок BC виден под углом φ — поверхность, получающаяся при вращении ω_A относительно BC. Обозначим её F_A. Аналогично получим ещё две поверхности — F_B, F_C. Пересечением F_A и F_B будет некоторая непрерывная кривая, проходящая через C и K, причём K лежит внутри тела, ограниченного F_C, а C — вне его. Значит, линия пересечения F_A и F_B будет также пересекать и F_C. Эта точка искомая.

Финальный тур

9 класс

1. (*А. А. Заславский*) Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, центр O которой лежит внутри него. Доказать, что если $\angle BAO = \angle DAC$, то диагонали четырёхугольника перпендикулярны.

Решение. Так как

$$\angle ABO = \frac{\pi - \angle AOB}{2} = \frac{\pi}{2} - \angle ADB, \quad \text{то}$$
$$\angle DAC + \angle ADB = \frac{\pi}{2},$$

что равносильно утверждению задачи (рис. 43).

2. (*Л. А. Емельянов*) Найти все равнобедренные треугольники, которые нельзя разрезать на три равнобедренных треугольника с одинаковыми боковыми сторонами.

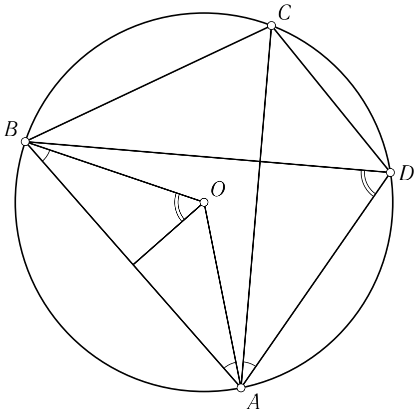


Рис. 43

Р е ш е н и е. Остроугольный треугольник можно разрезать радиусами описанной окружности на три равнобедренных с равными боковыми сторонами. Если треугольник ABC — тупоугольный (C — тупой угол), то возьмём на стороне AB точки A', B' такие, что

$$AB' = B'C = CA' = A'B,$$

и разрежем треугольник на треугольники $AB'C$, $A'B'C$ и $A'BC$ (рис. 44).

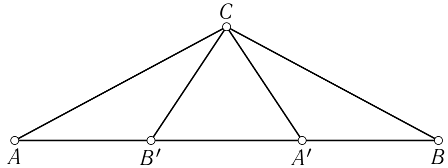


Рис. 44

Очевидно, что существует два существенно различных способа разрезания треугольника на три: соединить внутреннюю точку с вершинами или разрезать треугольник на два прямой, проходящей через вершину, а затем повторить эту операцию с одной из двух частей (рис. 45).

Докажем, что прямоугольный треугольник ABC ($AC = BC$) разрезать требуемым образом нельзя.

В первом случае треугольник AXB может быть равнобедренным только при $AX = BX$, но тогда два других треугольника равнобедренными не

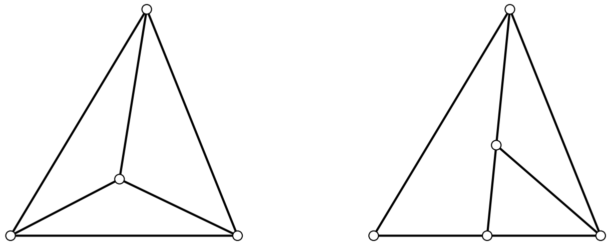


Рис. 45

будут. Во втором случае хотя бы один из получающихся при первом разрезе треугольников должен быть равнобедренным. Следовательно, первая прямая либо является биссектрисой прямого угла, либо соединяет точку C с точкой D на гипотенузе, для которой $AD = AC$. Ни в том, ни в другом случае провести вторую прямую так, чтобы получить нужное разрезание, невозможно.

3. (*И. Ф. Шарыгин*) Дана окружность с центром O и точки A, B на ней. Изобразить множество середин отрезков, один из концов которых лежит на одной из дуг AB, а другой — на второй.

Р е ш е н и е. Пусть K — произвольная точка внутри данной окружности. Хорда, серединой которой является K, перпендикулярна OK. Поэтому она пересекает отрезок AB тогда и только тогда, когда один из углов OKA, OKB не острый, а другой — не тупой. Следовательно, искомое множество состоит из точек, лежащих внутри или на границе одного из кругов с диаметрами OA, OB и вне или на границе другого (рис. 46).

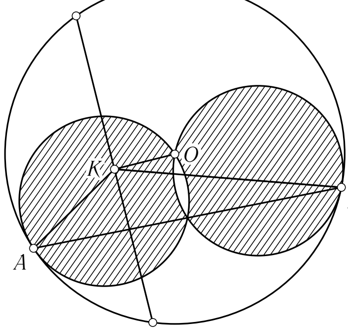


Рис. 46

4. (*А. Г. Мякишев*) Пусть P — точка пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$, M — точка пересечения прямых, соединяющих середины его противоположных сторон, O — точка пересечения серединных перпендикуляров к диагоналям, H — точка пересечения прямых, соединяющих ортоцентры треугольников APD и BCP, APB и CPD. Доказать, что M — середина OH.

Решение. Пусть O_1 — середина AC, а O_2 — середина BD. Несложно показать, что точка M — середина отрезка O_1O_2 (понятно, что M — центр масс системы $1A, 1B, 1C, 1D$, т. е. четырёх единичных масс, помещённых в точки A, B, C, D. Рассмотрим подсистемы $1A, 1C$ и $1B, 1D$, которые эквивалентны подсистемам $2O_1$, $2O_2$).

Очевидно, что четырёхугольник $H_1H_3H_2H_4$, образованный ортоцентрами, есть параллелограмм, стороны которого лежат на перпендикулярах, проведённых из вершин четырёхугольника к соответствующим диагоналям. Поэтому H — точка пересечения диагоналей этого параллелограмма и делит их пополам.

Докажем, что прямая HO_1 параллельна OO_2, или, иначе говоря, перпендикулярна диагонали BD. Рассмотрим прямую, перпендикулярную этой диагонали и проходящую через H и покажем, что она проходит и через точку O_1. Пусть наша прямая пересекает отрезок AH_4 в точке K. Тогда она является средней линией в треугольнике AH_3H_4, и потому K —

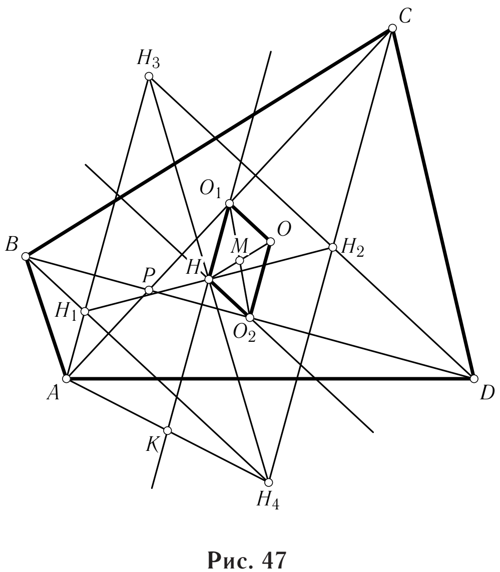


Рис. 47

середина AH_4. А следовательно, наша прямая будет средней линией и в треугольнике AH_4C, и потому пройдёт через O_1.

Рассуждая совершенно аналогично, убеждаемся в том, что прямая HO_2 параллельна OO_1, т. е. HO_1OO_2 — параллелограмм, причём M — точка пересечения его диагоналей (рис. 47).

Отсюда следует, что точки O, M, H лежат на одной прямой и $OM = MH$.

5. (*Б. Р. Френкин*) Дано, что ни для какой стороны треугольника из проведённых к ней высоты, биссектрисы и медианы нельзя составить треугольник. Доказать, что один из углов треугольника больше 135°.

Решение. Из условия следует, что каждая медиана больше либо равна сумме биссектрисы и высоты из той же вершины. Если между какой-то медианой и соответствующей высотой угол не больше 60°, то медиана не больше удвоенной высоты, а сумма биссектрисы и высоты — не меньше, причём равенство не достигается одновременно. Поэтому из условия следует, что между каждой медианой и соответствующей высотой угол больше 60°. Так как в треугольнике наименьший угол не больше 60°, то какая-то высота проходит вне треугольника, т. е. он тупоугольный.

Пусть A — вершина тупого угла, B и C — остальные две вершины, AM — медиана, AH — высота, причём точка M принадлежит отрезку BH. По доказанному $\angle AMH < 30°$. Он равен сумме углов ABM и BAM. Медиана из вершины тупого угла меньше половины противолежащей стороны. Отсюда $\angle ABM < 15°$.

Высота из вершины B образует угол больше 60° с соответствующей медианой, а тогда и со стороной BC. Поэтому $\angle ACB < 30°$. Значит,

$$\angle BAC > 180° - 15° - 30° = 135°.$$

10 класс

1. (*Л. А. Емельянов*) Дан выпуклый четырёхугольник без параллельных сторон. Для каждой тройки его вершин строится точка, дополняющая эту тройку до параллелограмма, одна из диагоналей которого совпадает с диагональю четырёхугольника. Доказать, что из четырёх построенных точек ровно одна лежит внутри исходного четырёхугольника.

Первое решение. Пусть вершина D' параллелограмма $ABCD'$ лежит внутри четырёхугольника $ABCD$. Тогда $\angle BCA < \angle CAD$ и $\angle BAC < < \angle ACD$. Следовательно точки пересечения противоположных сторон $ABCD$ лежат на продолжении отрезков AB и BC за точку B. Очевидно, что вершина с таким свойством в четырёхугольнике ровно одна (рис. 48).

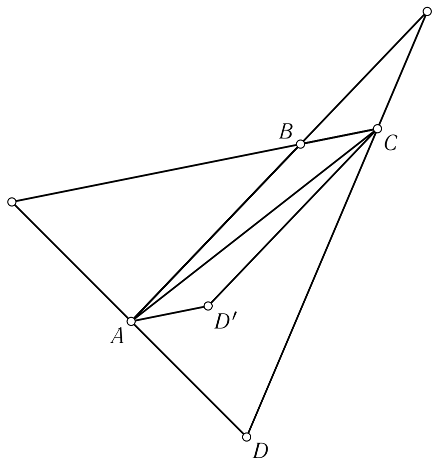


Рис. 48

Второе решение. Пусть $ABCD$ — исходный четырёхугольник, $ABCD'$ — параллелограмм, лежащий в нём. Пусть лучи CD' и AD' пересекают стороны в точках C_1 и A_1. Тогда

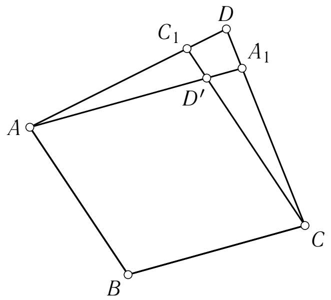


Рис. 49

$$S_{ABC} = S_{ABD'} = S_{ABC_1} < S_{ABD},$$

аналогично $S_{ABC} < S_{ACD}$. Тогда

$$S_{ABC} < S_{ACD} + S_{ABC} - S_{ABD} = S_{BCD},$$

т. е. ABC — треугольник наименьшей площади, образованный тремя вершинами четырёхугольника. Наоборот, если он таковой, то на сторонах найдутся точки A_1 и C_1 такие, что $S_{ABC} = S_{ABC_1} = S_{A_1BC}$, и точка пересечения AA_1 и CC_1 будет искомой (рис. 49).

2. (*А. В. Шаповалов*) Треугольник можно разрезать на три подобных друг другу треугольника. Доказать, что его можно разрезать на любое число подобных друг другу треугольников.

Решение. Пусть треугольник ABC с наибольшим углом C разрезан на три подобных отрезками AX, BX, CX. Так как $\angle AXB > \angle ACB$, углу AXB в других треугольниках могут равняться только углы AXC

и BXC. Значит,

$$\angle AXB = \angle AXC = \angle BXC = 120^\circ.$$

Но тогда $AX = BX = CX$ и треугольник ABC — правильный.

Пусть теперь треугольник разрезали сначала прямой, проходящей через вершину, на два, а затем один из этих двух — ещё на два. Так как два последних треугольника подобны, они прямоугольные, т. е. при первом разрезе от исходного треугольника отрезали прямоугольный, а затем оставшийся треугольник разделили на два высотой. Перебрав все возможные варианты, нетрудно убедиться, что исходный треугольник либо равнобедренный, либо прямоугольный. И в том, и в другом случае его можно разрезать на любое число подобных.

3. (*А. А. Заславский*) В окружности с центром O проведены две параллельные хорды AB и CD. Окружности с диаметрами AB и CD пересекаются в точке P. Доказать, что середина отрезка OP равноудалена от прямых AB и CD.

Р е ш е н и е. Пусть X, Y — середины AB и CD, Q — середина OP. Тогда

$$XQ^2 = \frac{2OX^2 + 2XP^2 - OP^2}{4} = \frac{2OX^2 + 2XA^2 - OP^2}{4} = \frac{2OA^2 - OP^2}{4} = YQ^2.$$

Таким образом, Q равноудалена от точек X и Y, а значит, и от прямых AB и CD (рис. 50).

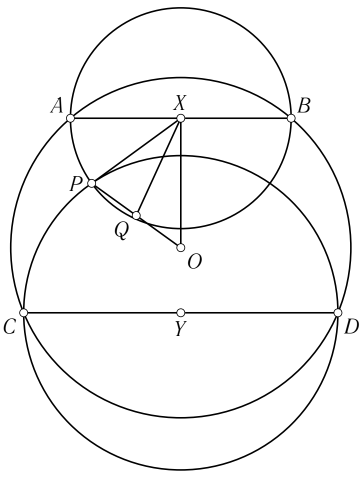


Рис. 50

4. (*Вим Пайлс, Нидерланды*) На плоскости даны два отрезка A_1B_1 и A_2B_2, причём

$$\frac{A_2B_2}{A_1B_1} = k < 1.$$

На отрезке A_1A_2 взята точка A_3, а на продолжении этого отрезка за точку A_2 — точка A_4 так, что

$$\frac{A_3A_2}{A_3A_1} = \frac{A_4A_2}{A_4A_1} = k.$$

Аналогично, на отрезке B_1B_2 берётся точка B_3, а на продолжении этого отрезка за точку B_2 — точка B_4 так, что

$$\frac{B_3B_2}{B_3B_1} = \frac{B_4B_2}{B_4B_1} = k.$$

Найти угол между прямыми A_3B_3 и A_4B_4.

Первое решение. Пусть O — центр не сохраняющего ориентацию подобия, переводящего A_1 в A_2 и B_1 в B_2. Так как треугольники OA_1B_1 и OA_2B_2 подобны, то $\angle A_1OB_1 = \angle B_2OA_2$ и биссектрисы углов A_1OA_2 и B_1OB_2 совпадают. Так как

$$\frac{OA_2}{OA_1} = \frac{OB_2}{OB_1} = k,$$

эта общая биссектриса пересекает отрезки A_1A_2 и B_1B_2 в точках A_3 и B_3, а перпендикулярная ей прямая пересекает продолжения этих отрезков в точках A_4 и B_4 (рис. 51). Следовательно, искомый угол прямой.

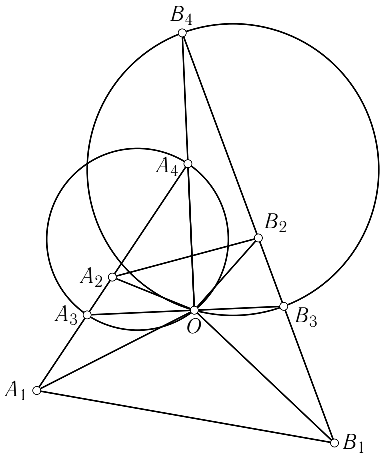


Рис. 51

Чтобы найти точку O, построим окружности с диаметрами A_3A_4 и B_3B_4 и найдём точки их пересечения. Так как окружность с диаметром A_3A_4 — геометрическое место точек, отношение расстояний от которых до A_2 и A_1 равно k, то точки пересечения окружностей будут центрами двух подобий, переводящих A_1 в A_2 и B_1 в B_2. Одно из этих подобий сохраняет ориентацию, другое меняет.

Второе решение. Пусть $\overrightarrow{A_1B_1} = \vec{u}$, $\overrightarrow{A_2B_2} = \vec{v}$, из условия следует, что $\vec{v}^2 = k^2\vec{u}^2$. Тогда

$$\overrightarrow{A_3B_3} = \overrightarrow{A_3A_1} + \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1B_3} = \frac{1}{1+k}\overrightarrow{A_2A_1} + \vec{u} + \frac{1}{1+k}\overrightarrow{B_1B_2}; \qquad (*)$$

с другой стороны,

$$\overrightarrow{A_3B_3} = \overrightarrow{A_3A_2} + \overrightarrow{A_2B_2} + \overrightarrow{B_2B_3} = \frac{k}{1+k}\overrightarrow{A_1A_2} + \vec{v} + \frac{k}{1+k}\overrightarrow{B_2B_1}. \qquad (**)$$

Умножив $(*)$ на $\dfrac{k}{1+k}$, $(**)$ на $\dfrac{1}{1+k}$ и сложив полученные равенства, имеем

$$\overrightarrow{A_3B_3} = \frac{k}{1+k}\vec{u} + \frac{1}{1+k}\vec{v}.$$

Аналогично получаем

$$A_4B_4 = \frac{1}{1-k}\overrightarrow{v} - \frac{k}{1-k}\overrightarrow{u}.$$

Тогда

$$\left(\overrightarrow{A_3B_3}, \overrightarrow{A_4B_4}\right) = \frac{(k\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v} - k\overrightarrow{u})}{(1+k)(1-k)} = \frac{\overrightarrow{v}^2 - k^2\overrightarrow{u}^2}{1-k^2} = 0,$$

т. е. векторы ортогональны.

Третье решение. (*С. Сафин*) Построим параллелограмм $A_1A_2B_2X$ и проведём биссектрису A_1Y треугольника A_1XB_1. Так как

$$\frac{B_1Y}{XY} = \frac{A_1B_1}{A_1X} = k,$$

то $B_3Y \parallel B_2X$ и

$$B_3Y = kB_2X = A_1A_3.$$

Следовательно, $A_1A_3B_3Y$ — параллелограмм, т. е. $A_3B_3 \parallel A_1Y$ (рис. 52).

Аналогично, прямая A_4B_4 параллельна внешней биссектрисе угла XA_1B_1, и значит, прямые A_3B_3 и A_4B_4 перпендикулярны.

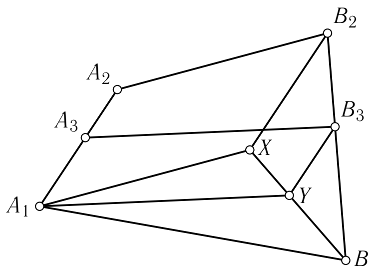


Рис. 52

5. (*А. А. Заславский*) Две окружности радиуса 1 пересекаются в точках X, Y, расстояние между которыми также равно 1. Из точки C одной окружности проведены касательные CA, CB к другой. Прямая CB вторично пересекает первую окружность в точке A'. Найти расстояние AA'.

Решение. Пусть O — центр окружности, на которой лежит точка C, O' — центр другой окружности. Так как $OO' = \sqrt{3}$, то прямая $A'B'$, где B' — вторая точка пересечения CA с окружностью, касается второй окружности в точке C'. Следовательно,

$$\angle A'O'A = \angle AO'C' + \frac{1}{2}\angle C'O'B = 2\angle ABC' + \angle C'AB =$$
$$= \angle CB'A' + \frac{1}{2}\angle CA'B',$$
$$\angle O'A'O = \angle O'A'B' + \angle B'A'O = \frac{\pi}{2} - \angle C'O'A' + \frac{\pi}{2} - \angle BCA =$$
$$= \pi - \angle BCA - \frac{1}{2}\angle CA'B' = \angle CB'A' + \frac{1}{2}\angle CA'B'.$$

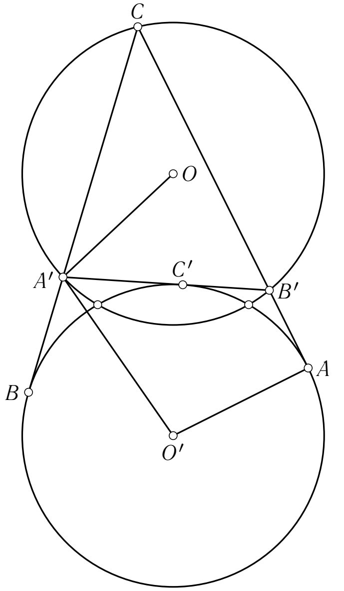


Рис. 53

Так как $O'A = OA'$, $AO'A'O$ — равнобедренная трапеция, и $AA' = OO' = \sqrt{3}$ (рис. 53).

6. (*А. А. Заславский*) Пусть H — ортоцентр треугольника ABC, X — произвольная точка. Окружность с диаметром XH вторично пересекает прямые AH, BH, CH в точках A_1, B_1, C_1, а прямые AX, BX, CX в точках A_2, B_2, C_2. Доказать, что прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 пересекаются в одной точке.

Р е ш е н и е. Рассмотрим для определённости случай, когда точки расположены на окружности в порядке $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$. Пусть $XH = d$. Тогда

$$A_1B_2 = d \sin \angle A_1HB_2 = d \sin \angle XBC,$$

так как HA_1 перпендикулярно BC, а HB_2 перпендикулярно BX. Следовательно,

$$\frac{A_1B_2 \cdot C_1A_2 \cdot B_1C_2}{A_2B_1 \cdot C_2A_1 \cdot B_2C_1} = \frac{\sin \angle XBC \cdot \sin \angle XCA \cdot \sin \angle XAB}{\sin \angle XAC \cdot \sin \angle XCB \cdot \sin \angle XBA} = 1,$$

что равносильно утверждению задачи (рис. 54).

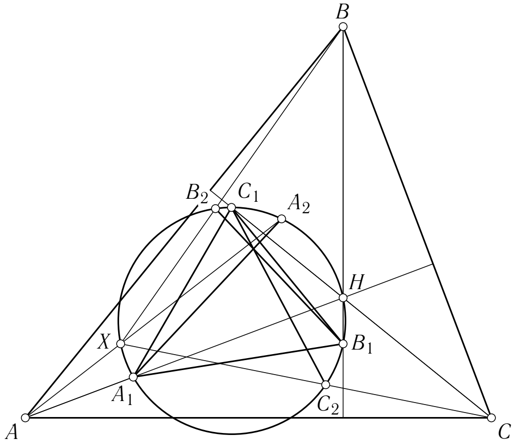


Рис. 54

Примечание. Нетрудно видеть, что треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику ABC, а точка пересечения прямых соответствует точке, изогонально сопряжённой X.

11 класс

1. (*А. А. Заславский*) A_1, B_1, C_1 — середины сторон правильного треугольника ABC. Три параллельные прямые, проходящие через A_1, B_1, C_1, пересекают прямые B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 в точках A_2, B_2, C_2 соответственно. Доказать, что прямые AA_2, BB_2, CC_2 пересекаются в одной точке, лежащей на описанной около треугольника ABC окружности.

Решение. Пусть Z — точка пересечения AA_2 и BB_2. Так как точки B и B_1 симметричны относительно прямой A_1C_1,

$$\angle ABZ = \angle C_1BB_2 = \angle B_2B_1C_1.$$

Аналогично $\angle BAZ = \angle A_2A_1C_1$. Так как прямые A_1A_2 и B_1B_2 параллельны, $\angle A_2A_1C_1 = \angle B_1B_2C_1$, следовательно, $\angle AZB = \angle ACB$ и точки A, B, C, Z лежат на одной окружности, откуда и следует утверждение задачи (рис. 55).

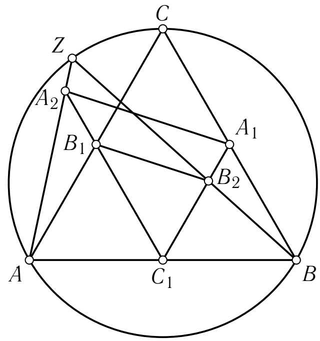


Рис. 55

2. (*А. Г. Мякишев*) Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Прямые BC и AD пересекаются в точке O, причём B лежит на отрезке OC, A — на отрезке OD. I — центр вписанной в треугольник OAB окружности, J — центр вневписанной в треугольник OCD окружности, касающейся стороны CD и продолжения двух других сторон. Перпендикуляры, опущенные из середины отрезка IJ на прямые BC и AD, пересекают соответствующие стороны четырёхугольника (не продолжения) в точках X и Y. Доказать, что отрезок XY делит периметр четырёхугольника $ABCD$ пополам, причём из всех отрезков с этим свойством и с концами на BC и AD XY имеет наименьшую длину.

Р е ш е н и е. Используя тот факт, что отрезки касательных, проведённые из одной точки, равны, несложно показать, что отрезок $X'Y'$ с концами на сторонах AD и BC делит периметр пополам тогда и только тогда, когда $OX' + OY' = l$, где l — постоянная величина, равная удвоенному отрезку соответствующей касательной плюс полупериметр четырёхугольника.

Пусть M — середина IJ. Так же просто проверяется, что

$$OX + OY = l.$$

Тогда треугольники MXX' и MYY' равны, а следовательно, треугольники MXY и $MX'Y'$ подобны по двум углам. Значит, $X'Y'$ минимально, когда минимально MX', т. е. когда X' совпадает с X (рис. 56).

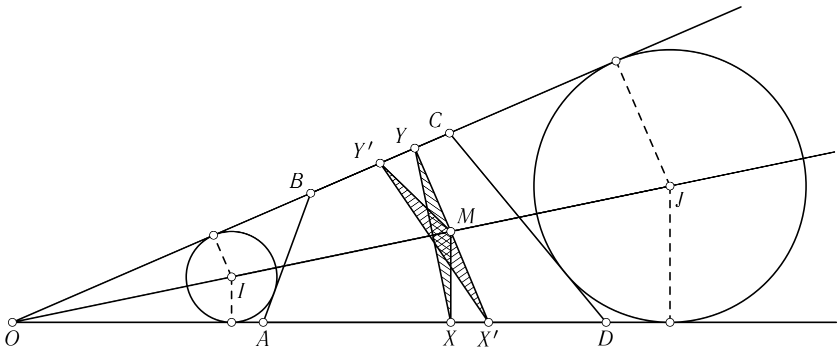


Рис. 56

3. (*А. А. Заславский*) Внутри вписанного четырёхугольника $ABCD$ существует точка K, расстояния от которой до сторон $ABCD$ пропорциональны этим сторонам. Доказать, что K — точка пересечения диагоналей $ABCD$.

Первое решение. Пусть U — точка пересечения касательных к окружности $ABCD$ в точках A и C, X, Y — проекции U на AB и BC. Тогда

$$\frac{UX}{UY} = \frac{\sin\angle UAX}{\sin\angle UCY} = \frac{\sin\angle BCA}{\sin\angle BAC} = \frac{AB}{BC},$$

т. е. K лежит на прямой UB. Аналогично, K лежит на прямой UD, и, если эти прямые не совпадают, то $K = U$. Точно так же доказывается, что, если не совпадают прямые AV и CV, где V — точка пересечения касательных в точках B и D, то $K = V$, что невозможно. Будем считать, что на одной прямой лежат точки B, D, U. Тогда $AB/AD = AU/UD = CU/UD = BC/CD$ и точки A, C, V также лежат на одной прямой. Следовательно, K — точка пересечения AC и BD.

Второе решение. Множество точек, расстояния от которых до прямых AB и CD пропорциональны соответствующим сторонам, — это прямая, проходящая через точку пересечения AB и CD. Так как $ABCD$ вписанный, треугольники LAB и LCD, где L — точка пересечения диагоналей, подобны, т. е. L лежит на указанной прямой. Аналогично, L лежит на второй такой же прямой и, значит, совпадает с K.

4. (*И. Ф. Шарыгин*) В треугольнике ABC $\angle A = \alpha$, $BC = a$. Вписанная окружность касается прямых AB и AC в точках M и P. Найти длину хорды, высекаемой на прямой MP окружностью с диаметром BC.

Первое решение. Расстояние от центра окружности до хорды равно полусумме расстояний от точек B и C до прямой MP (рис. 57), т. е.

$$\frac{1}{2}(BM\sin\angle AMP + CP\sin\angle APM) = \frac{1}{2}(BM + CP)\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2}\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Соответственно, длина хорды равна $a\sin\frac{\alpha}{2}$.

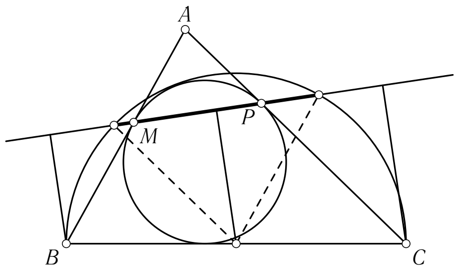


Рис. 57

В т о р о е р е ш е н и е. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника, X, Y — точки пересечения прямых BI, CI с прямой MP. Тогда

$$\angle MXB = \angle AMP - \angle MBX = \frac{\angle C}{2}.$$

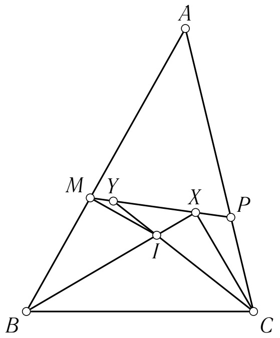


Рис. 58

Следовательно, треугольники BXM и BCI подобны, т. е.

$$\frac{BX}{BC} = \frac{BM}{BI} = \cos\frac{\angle B}{2}.$$

Это значит, что угол BXC прямой (рис. 58).

Аналогично, угол BYC прямой. Следовательно, искомая хорда

$$XY = BC \sin \angle XCY = a \sin\frac{\alpha}{2}.$$

5. (*В. Ю. Протасов*) На плоскости дан угол и точка K внутри него. Доказать, что найдётся точка M, обладающая следующим свойством: если произвольная прямая, проходящая через K, пересекает стороны угла в точках A и B, то MK является биссектрисой угла AMB.

П е р в о е р е ш е н и е. На произвольной прямой, проходящей через K и пересекающей стороны угла в точках A и B, возьмём такую точку K', что $AK'/BK' = AK/BK$. Так как все точки K' лежат на прямой l, проходящей через вершину угла, все окружности с диаметром KK'

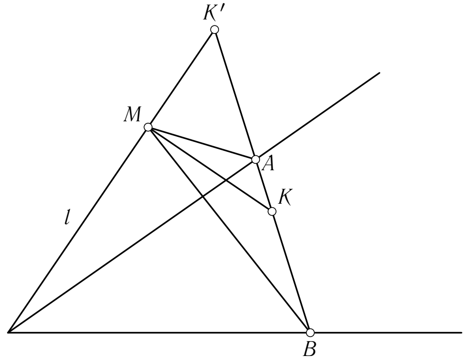


Рис. 59

проходят через проекцию M точки K на l. При этом всегда выполнено равенство $AM/BM = AK/BK$, т.е. точка M — искомая (рис. 59).

Второе решение. (*Р. Девятов*) Пусть O — вершина угла. Построим параллелограмм $KXOY$, две стороны которого лежат на сторонах угла. Пусть M — точка, симметричная K относительно XY. Докажем, что точка M — искомая.

Пусть прямая, проходящая через K, пересекает прямые OX и OY в точках A и B. Заметим, что

$$MX = KX, \quad MY = KY, \quad \triangle MXY = \triangle KXY = \triangle OYX,$$

поэтому $MOYX$ — равнобокая трапеция и $\angle MXO = \angle MYO$. Значит,

$$\angle MXA = 180^\circ - \angle MXO = 180^\circ - \angle MYO = \angle BYM.$$

Далее, треугольники AXK и KYB подобны, так как их стороны соответственно параллельны, поэтому $KX/XA = BY/YK$. Отсюда получаем

$$\frac{MX}{XA} = \frac{KX}{XA} = \frac{BY}{YK} = \frac{BY}{YM}.$$

Отсюда и из равенства углов MXA и BYM получаем, что треугольники MXA и BYM подобны (рис. 60).

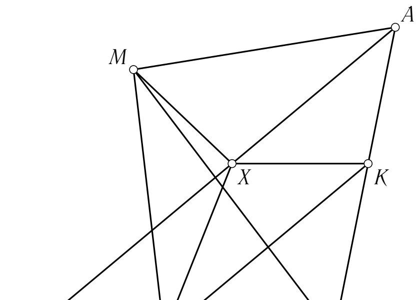


Рис. 60

Теперь, пользуясь двумя доказанными подобиями, получаем

$$\frac{MA}{BM} = \frac{MX}{BY} = \frac{KX}{BY} = \frac{AK}{KB},$$

что и означает, что MK — биссектриса треугольника AMB.

6. (*И. И. Богданов*) Сфера, вписанная в тетраэдр $ABCD$, касается его граней в точках A', B', C', D'. Отрезки AA' и BB' пересекаются, и точка их пересечения лежит на вписанной сфере. Доказать, что отрезки CC' и DD' тоже пересекаются на вписанной сфере.

Р е ш е н и е. Так как отрезки AA' и BB' пересекаются, прямые AB и $A'B'$ тоже пересекаются или параллельны. Обозначим их точку пересечения (возможно, бесконечно удалённую) через P. Так как P лежит вне двугранного угла при ребре CD, плоскость CDP не пересекает вписанную сферу. Поэтому существует проективное преобразование, сохраняющее сферу и переводящее эту плоскость в бесконечно удалённую. В результате этого преобразования отрезок $A'B'$ станет диаметром сферы, а AB будет ему параллелен. Так как точка пересечения AA' и BB' лежит на сфере, расстояние от её центра до AB равно удвоенному радиусу (на рис. 61 показана проекция на плоскость $ABA'B'$).

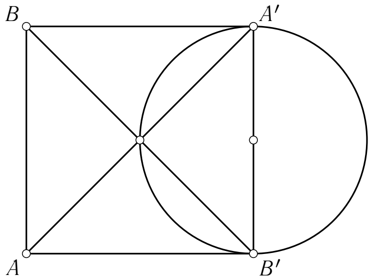


Рис. 61

Значит, угол между плоскостями ABC и ABD равен 60°, дуга большого круга, соединяющая C' и D', равна 120°, и прямые, проходящие через C', D' и параллельные ABC, ABD, пересекаются на сфере (на рис. 62 показана проекция на плоскость, перпендикулярную AB).

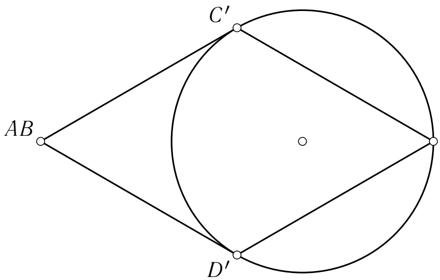


Рис. 62

Вторая олимпиада (2006)

Заочный тур

1. (*В. Смирнов*) Две прямые на плоскости, пересекающиеся под углом 46°, являются осями симметрии фигуры F. Какое наименьшее число осей симметрии может иметь эта фигура? (8 *класс*)

Ответ. 90.

Решение. Пусть l_1, l_2 — оси симметрии F. Применив последовательно симметрию относительно l_1, симметрию относительно l_2 и снова симметрию относительно l_1, получим симметрию относительно прямой, симметричной l_2 относительно l_1 (рис. 63). Следовательно, осями симметрии F будут все прямые, образующие с l_1 углы 46°, $2\cdot 46^\circ$, $\ldots$, $n\cdot 46^\circ$, $\ldots$ Так как $46n$ при $n < 90$ не делится на 180, эти прямые для $n = 1, \ldots, 90$ различны, т. е. F имеет по крайней мере 90 осей симметрии. С другой

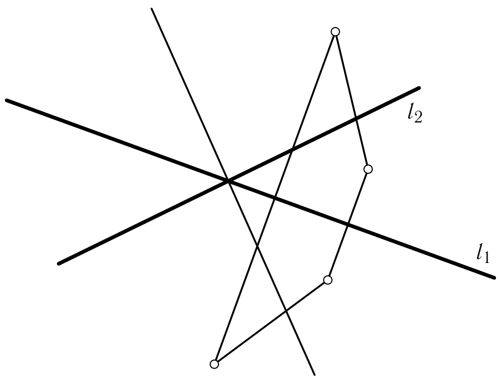


Рис. 63

стороны, правильный 90-угольник удовлетворяет условию задачи и имеет ровно 90 осей симметрии.

2. (*А. Акопян*) Точки A, B движутся с равными скоростями по двум равным окружностям. Докажите, что серединные перпендикуляры к AB проходят через фиксированную точку. (8–9 *класс*)

Решение. (*Найдено девятиклассником московской гимназии № 1543 Никитой Баканчевым.*) Пусть l — прямая, при симметрии относительно которой окружности переходят друг в друга, A' — точка, симметричная A относительно l. Тогда точки B и A' движутся по одной окружности с противоположными скоростями, и значит, серединный перпендикуляр к отрезку $A'B$ не меняется. Точка его пересечения с l является центром описанной окружности треугольника $AA'B$, следовательно, серединный перпендикуляр к AB всё время проходит через эту точку.

3. (*Фольклор*) На карте указаны отрезки трёх прямолинейных дорог, соединяющих три деревни, но сами деревни расположены за пределами карты. Кроме того, на карте не указана пожарная часть, находящаяся на равном расстоянии от трёх деревень, хотя место её расположения находится в пределах карты. Можно ли найти это место с помощью циркуля и линейки, если проводить построения только в пределах карты? (8–9 *класс*)

Решение. Возьмём на карте произвольную точку P. При гомотетии с центром P и достаточно малым коэффициентом k точки пересечения дорог перейдут в некоторые точки A, B, C, лежащие в пределах карты, так что можно найти центр O описанной около треугольника ABC окружности. Гомотетия с центром P и коэффициентом $1/k$ переводит O в искомую точку.

4. (*А. Горская*, *И. Богданов*)

а) Даны два квадрата $ABCD$ и $DEFG$, причём точка E лежит на отрезке CD, а точки F, G — вне квадрата $ABCD$. Найдите угол между прямыми AE и BF. (8 *класс*)

б) Даны два правильных пятиугольника $OKLMN$ и $OPRST$, причём точка P лежит на отрезке ON, а точки R, S, T вне пятиугольника $OKLMN$. Найдите угол между прямыми KP и MS. (9–11 *класс*)

Решение.

а) Пусть H — вторая точка пересечения описанных около квадратов окружностей (рис. 64). Так как

$$\angle AHD = 45^\circ, \quad \angle DHF = 90^\circ, \quad \angle EHF = 135^\circ,$$

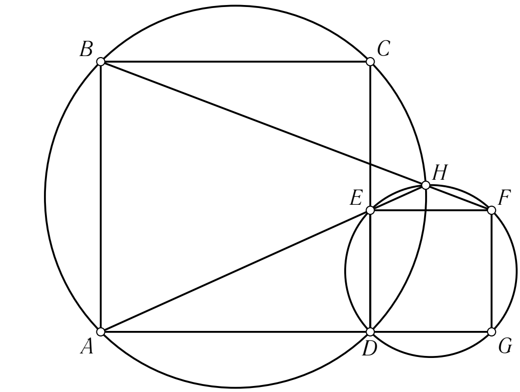


Рис. 64

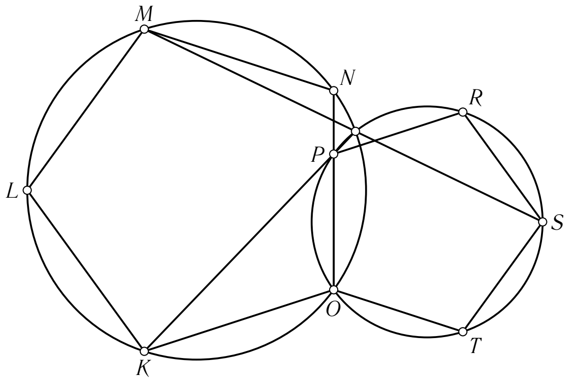


Рис. 65

то точки A, E, H лежат на одной прямой. Аналогично, точки B, H, F лежат на одной прямой. Следовательно, искомый угол равен $\angle BHA = 45°$.

б) Ответ. $72°$. Решение аналогично п. а) (рис. 65).

5. (*А. Тарасов*)

а) Сложите квадрат 10×10 из прямоугольной полоски 1×118. (8 *класс*)

б) Сложите квадрат 10×10 из прямоугольной полоски $1 \times (100 + 9\sqrt{3})$ (примерно $1 \times 115{,}58$). (9–11 *класс*)

В обоих пунктах полоску можно сгибать, но не разрывать.

Р е ш е н и е.

а) Пусть точки A, B расположены на противоположных сторонах полоски на расстоянии 10 от края, C, D — на расстоянии 12. Согнув полоску по сгибам, показанным на рис. 66, расположим её часть, лежащую правее CD, рядом с частью, лежащей левее AB. Повторив эту операцию 9 раз и загнув образовавшиеся прямоугольные треугольники, получим искомый квадрат.

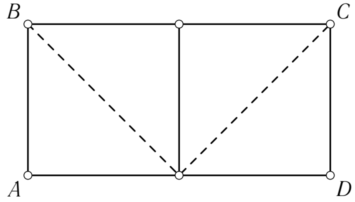


Рис. 66

б) Пусть точки A, B расположены на противоположных сторонах полоски на расстоянии 10 от края, C, D — на расстоянии $10 + \sqrt{3}$. Согнув полоску по сгибам, показанным на рис. 67, расположим её часть, лежащую правее CD, рядом с частью, лежащей левее AB. Повторив эту операцию 9 раз и загнув образовавшиеся треугольники, получим искомый квадрат.

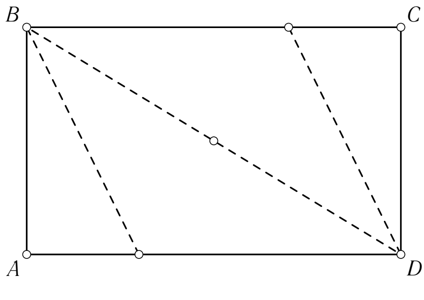


Рис. 67

6. (*А. Афанасьев*)

а) Дан отрезок AB с точкой C внутри него, являющийся хордой окружности радиуса R. Впишите в образовавшийся сегмент окружность, которая проходит через точку C и касается исходной окружности. (8–9 *класс*) б) Дан отрезок AB с точкой D внутри него, являющейся точкой касания окружности радиуса r. Проведите через A и B окружность, касающуюся исходной окружности. (9—10 *класс*)

Решение. Докажем сначала следующий факт.

Лемма. *Пусть окружность, вписанная в сегмент, ограниченный дугой и хордой AB, касается дуги в точке X, а хорды в точке C. Тогда XC — биссектриса угла AXB.*

Доказательство. Пусть O — центр большой окружности, O' — центр малой, L — середина дуги AB, не содержащей точки X (рис. 68). Так как O' лежит на отрезке OX, а $O'C \parallel OL$, равнобедренные треугольники $O'CX$ и OLX подобны. Следовательно, C лежит на отрезке XL и прямая XC делит угол AXB пополам.

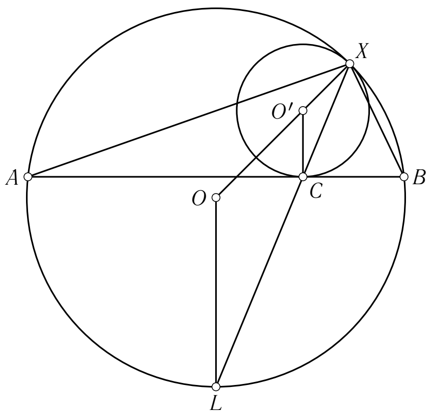


Рис. 68

Теперь приведём решение задачи.

а) Пусть искомая окружность касается данной в точке X. Из леммы следует, что $AX/XB = AC/CB$. Множество точек, удовлетворяющих этому условию, — это окружность с центром на прямой AB (она называется *окружностью Аполлония* точек A и B). Возьмём любую из точек пересечения окружности Аполлония с данной, соединим её с центром данной окружности и найдём точку пересечения этой прямой с перпендикуляром, восставленным из C к AB. Получим центр искомой окружности. Задача имеет два решения, так как окружность можно вписать в любой из двух сегментов, на которые хорда AB делит данный круг.

б) Аналогично п. а) построим окружность Аполлония и найдём отличную от X точку её пересечения с данной окружностью. Искомая окружность проходит через эту точку и точки A, B. Задача имеет единственное решение.

7. (*Д. Калинин*) Внутри квадрата $ABCD$ взята точка E, а вне — точка F так, что треугольники ABE и BCF равны. Найдите углы треугольника ABE, если известно, что отрезок EF равен стороне квадрата, а угол BFD — прямой. (8–10 *класс*)

Решение. Так как угол BFD прямой, точка F лежит на описанной около квадрата окружности, т. е. $\angle BFC = 135° = \angle AEB$ (так как два других угла треугольника AEB, очевидно, острые). Так как

$$\angle ABE = \angle CBF\,[1], \quad \angle EBF = 90° \quad \text{и} \quad \frac{BE}{EF} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{BE}{AB}.$$

Применяя к треугольнику ABE теорему синусов, получаем, что

$$\sin\angle EAB = \frac{BE \sin\angle AEB}{AB} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, $\angle EAB = 30°$, $\angle EBA = 15°$ (рис. 69).

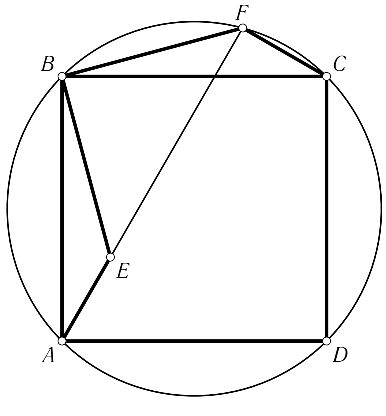


Рис. 69

8. (*А. Блинков*) Отрезок AB делит квадрат на две части, в каждую из которых можно вписать окружность. Радиусы этих окружностей равны r_1 и r_2, причём $r_1 > r_2$. Найдите длину AB. (8–9 *класс*)

Решение. Если отрезок AB является диагональю квадрата, то он делит квадрат на два равных треугольника, и $r_1 = r_2$, что противоречит

[1] Нетрудно убедиться, что случай $\angle ABE = \angle BCF$ невозможен.

условию задачи. Если же одна из частей является четырёхугольником, то сумма его стороны AB с противоположной больше суммы двух других сторон (рис. 70), и вписать в него окружность нельзя. Следовательно, AB делит квадрат на треугольник и пятиугольник (рис. 71).

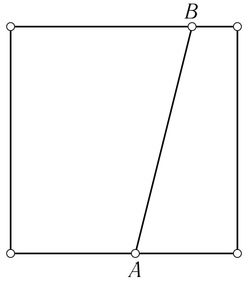


Рис. 70

Окружности с радиусами r_1, r_2 являются вневписанной и вписанной окружностями прямоугольного треугольника ABC. Значит,

$$r_1 = \frac{AB + BC + CA}{2}, \quad r_2 = \frac{BC + CA - AB}{2}$$

и $AB = r_1 - r_2$.

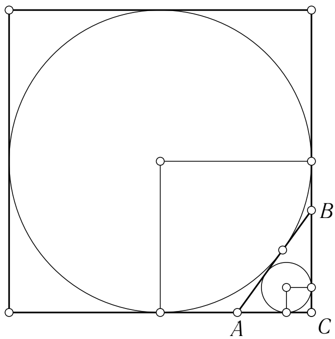


Рис. 71

9. (*А. Канель-Белов*) Пусть прямая $L(\alpha)$ соединяет точки единичной окружности, отвечающие углам α и $\pi - 2\alpha$. Докажите, что если $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$, то прямые $L(\alpha)$, $L(\beta)$ и $L(\gamma)$ пересекаются в одной точке[1]. (8–10 *класс*)

Решение. Пусть A, B, C — точки окружности, соответствующие углам α, β, γ. Перпендикуляр из центра окружности к прямой AB пересекает окружность в точке, соответствующей углу $(\alpha+\beta)/2 = \pi - \gamma/2$, а перпендикуляр к прямой $L(\gamma)$ — в точке, соответствующей углу $(\gamma + \pi - 2\gamma)/2 = \pi/2 - \gamma/2$. Следовательно, $L(\gamma)$ — высота треугольника ABC. Аналогично, $L(\alpha)$, $L(\beta)$ — высоты ABC, и значит, все три прямые пересекаются в его ортоцентре.

[1] Условие задачи было опубликовано с опечаткой.

10. (*Б. Френкин*) При каких n правильный n-угольник можно разрезать непересекающимися диагоналями на $n-2$ равнобедренных (и, возможно, равносторонних) треугольников? (8–11 *класс*)

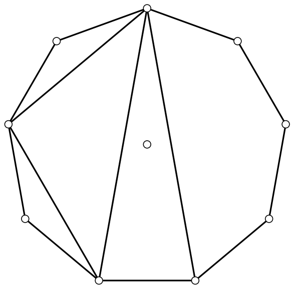


Рис. 72

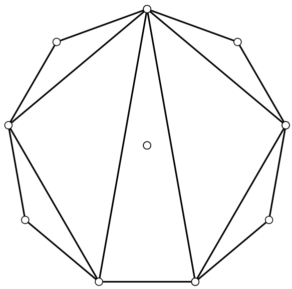


Рис. 73

О т в е т. n должно быть суммой двух степеней двойки, может быть равных (в этом случае само n — степень двойки).

Р е ш е н и е. Рассмотрим треугольник разбиения ABC, содержащий центр (рис. 72). Если сторона AB не является стороной исходного многоугольника, то отрезает от него многоугольник, в котором наибольшее расстояние между вершинами — длина AB. Следовательно, AB должна быть основанием треугольника разбиения, и число отрезаемых ею сторон чётно. Для боковых сторон указанного треугольника можно провести аналогичные рассуждения, следовательно, число сторон, которые отрезает AB, есть степень двойки. (Если AB — сторона исходного многоугольника, то она отрезает 2^0 сторон.) Это верно и для сторон BC и AC. Так как в треугольнике ABC хотя бы две стороны равны, то

$$n = 2^k + 2^k + 2^l = 2^{k+1} + 2^l.$$

Обратно, пусть $n = 2^k + 2^l$, причём $k > 0$. Пусть A — одна из вершин правильного n-угольника, а вершины B и C отстоят от неё на 2^{k-1} сторон в двух направлениях. Тогда $AB = AC$, и существует разрезание нужного вида, содержащее треугольник ABC (рис. 73).

11. (*А. Заславский*) В треугольнике ABC точка O — центр описанной окружности; A', B', C' — точки, симметричные A, B, C относительно противоположных сторон; A_1, B_1, C_1 — точки пересечения прямых OA' и BC, OB' и AC, OC' и AB. Докажите, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке. (9–10 *класс*)

Р е ш е н и е. Пусть O_a, O_b, O_c — точки, симметричные O относительно BC, CA, AB. Очевидно, что прямые CO_c, OC' и AB пересекаются в одной точке, так что для решения задачи достаточно доказать, что прямые AO_a, BO_b и CO_c пересекаются в одной точке.

Так как треугольник $O_aO_bO_c$ гомотетичен серединному треугольнику ABC с центром O и коэффициентом 2, он центрально симметричен треугольнику ABC, и прямые, соединяющие соответствующие вершины этих треугольников, проходят через центр симметрии. Нетрудно также убедиться, что эта точка является для каждого из треугольников центром окружности 9 точек.

12. (*Б. Френкин*) В треугольнике ABC биссектриса угла A равна полусумме высоты и медианы, проведённых из вершины A. Докажите, что если угол A тупой, то $AB = AC$. (9–10 *класс*)

Р е ш е н и е. Предположим, что утверждение задачи неверно. Пусть H, L, M — основания высоты, биссектрисы и медианы, P — середина дуги BC описанной окружности треугольника, не содержащей точки A (рис. 74).

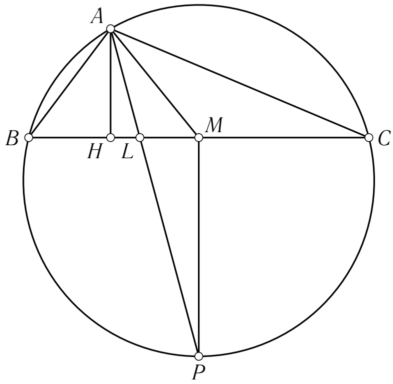


Рис. 74

Если угол A тупой, то $PM > AH$. Поскольку L лежит на отрезке AP, отсюда следует, что $HL < LM$, и значит, отрезок AL меньше медианы треугольника AHM, которая, в свою очередь, меньше полусуммы сторон AH и AM — противоречие.

13. (*А. Акопян*) Даны две прямые a и b, а также точки A и B. Точка X скользит по прямой a, а точка Y по прямой b так, что $AX \parallel BY$. Найдите ГМТ пересечения AY с XB. (9–10 *класс*)

Р е ш е н и е. Проведём через A прямую, параллельную b и пересекающую a в точке U. Аналогично, проведём через B прямую, параллельную a и пересекающую b в точке V. Для любых удовлетворяющих условию точек X, Y соответствующие стороны треугольников AUX и YVB параллельны. Следовательно, эти треугольники гомотетичны, т. е. прямые

AY, BX и UV пересекаются в центре гомотетии. Очевидно, что так можно получить любую точку прямой UV.

14. (*А. Заславский*) Дана окружность и не лежащая на ней фиксированная точка P. Найдите геометрическое место ортоцентров треугольников ABP, где AB — диаметр окружности. (9—11 *класс*)

Р е ш е н и е. Пусть O — центр окружности, C — ортоцентр, A', B', C' — основания высот ABP, проведённых из A, B, P; P' — проекция C на прямую OP (рис. 75). Так как

$$\angle CC'O = \angle CP'O = 90^\circ,$$

точки O, C, C', P' лежат на окружности, и $CP \cdot PC' = OP \cdot PP'$. Аналогично, $CP \cdot PC' = BP \cdot PA'$. Но A' лежит на исходной окружности, следовательно,

$$BP \cdot A'P = |R^2 - OP^2|.$$

Таким образом, произведение $OP \cdot PP'$, а значит, и точка P', не зависят от выбора диаметра AB, т. е. искомым геометрическим местом будет прямая, проходящая через P' и перпендикулярная OP.

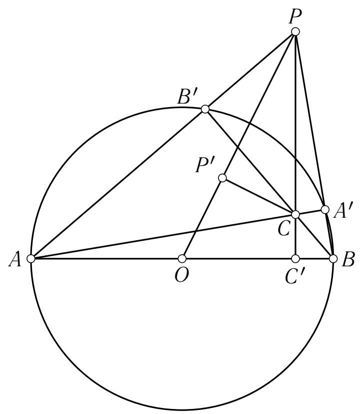


Рис. 75

15. (*В. Протасов*) Около треугольника ABC описана окружность и в него же вписана окружность, которая касается сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Прямая B_1C_1 пересекает прямую BC в точке P, а точка M — середина отрезка PA_1. Докажите, что отрезки касательных, проведённых из точки M к вписанной и описанной окружностям равны. (9—11 *класс*)

Р е ш е н и е. Пусть $AB < AC$. Так как прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке, из теорем Чевы и Менелая получаем, что

$$\frac{PB}{PC} = \frac{A_1B}{AC}.$$

Кроме того,

$$MB = \frac{PB - A_1B}{2}, \quad MC = \frac{PC + A_1C}{2},$$
$$MA_1 = \frac{PB + A_1B}{2} = \frac{PC - A_1C}{2}.$$

Следовательно,

$$\frac{MB}{MA_1} = \frac{MA_1}{MC} = \frac{A_1B}{A_1C},$$

что равносильно утверждению задачи.

16. (*П. Пушкарь*) На сторонах треугольника ABC построены во внешнюю сторону правильные треугольники. Оказалось, что их вершины образуют правильный треугольник. Верно ли, что исходный треугольник — правильный? (9—11 *класс*)

О т в е т. Верно.

Р е ш е н и е. Предположим противное. Тогда один из углов треугольника ABC, например, $\angle A > 60°$. Тогда луч $B'C'$ лежит вне угла $AB'C$,

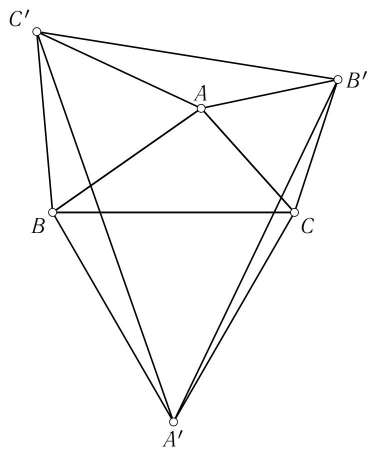


Рис. 76

а так как $\angle A'B'C' = \angle AB'C = 60°$, луч $B'A'$ лежит внутри этого угла, и значит, луч $A'B'$ лежит внутри угла $B'AC'$ (рис. 76). Аналогично, луч $A'C'$ лежит внутри этого угла, что противоречит равенству $\angle B'A'C' = \angle BA'C = 60°$.

17. (*А. Заславский*) В двух окружностях, пересекающихся в точках A и B, проведены параллельные хорды A_1B_1 и A_2B_2. Прямые AA_1 и BB_2 пересекаются в точке X, а прямые AA_2 и BB_1 — в точке Y. Докажите, что $XY \parallel A_1B_1$. (9–11 *класс*)

Решение. Утверждение задачи равносильно тому, что точки A, B, X, Y лежат на одной окружности, т. е. $\angle XAY = \angle XBY$. Но

$$\angle XAY = \angle BAA_2 - \angle BAX = \angle BAA_2 - \angle BB_1A_1,$$
$$\angle XBY = \angle B_2BA - \angle AA_1B_1.$$

При этом из параллельности A_1B_1 и A_2B_2 следует, что

$$\angle ABB_1 + \angle A_1B_1B = \angle BAA_2 + \angle B_2A_2A,$$

откуда, очевидно, и вытекает искомое утверждение (рис. 77).

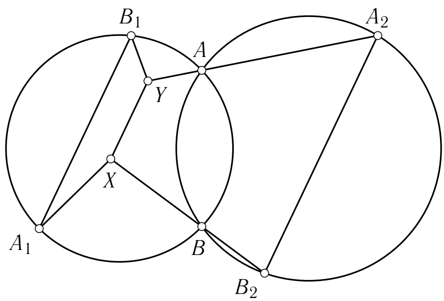


Рис. 77

18. (*А. Акопян*) Через ортоцентр H треугольника ABC проведены две перпендикулярные прямые, одна из которых пересекает BC в точке X, а другая пересекает AC в точке Y. Прямые AZ, BZ параллельны соответственно прямым HX и HY. Докажите, что точки X, Y, Z лежат на одной прямой. (9–11 *класс*)

Решение. Рассмотрим для определённости случай, изображённый на рис. 78. Пусть U — точка пересечения HX и BZ, V — точка пересечения HY и AZ. Тогда утверждение задачи равносильно равенству

$$\frac{HU}{UX}=\frac{YV}{HV} \quad \text{или} \quad \frac{HU}{YV}=\frac{HV}{UX}.$$

В прямоугольных треугольниках AYV и BUH углы AYV и BUH равны, так как их стороны перпендикулярны. Следовательно, треугольники подобны и

$$\frac{HU}{YV}=\frac{BU}{AV}. \quad \text{Аналогично,} \quad \frac{HV}{UX}=\frac{BU}{AV}.$$

Другие случаи рассматриваются аналогично.

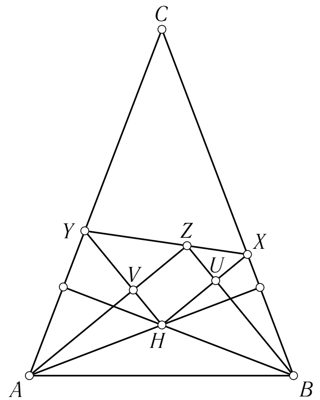


Рис. 78

19. (*Л. Емельянов*) Через середины сторон треугольника T проведены прямые, перпендикулярные биссектрисам противолежащих углов треугольника. Эти прямые образовали треугольник T_1. Докажите, что центр описанной около T_1 окружности находится в середине отрезка, образованного центром вписанной окружности и точкой пересечения высот треугольника T. (10–11 *класс*)

Решение. Стороны треугольника T_1 являются внешними биссектрисами углов треугольника T_0, образованного средними линиями T, и значит, пересекаются в центрах его вневписанных окружностей. При этом биссектрисы внутренних углов T_0 являются высотами T_1, т. е. его центр вписанной окружности I_0 совпадает с ортоцентром T_1, а O_0 — центр описанной окружности — является центром окружности, проходящей через середины T_1, и, значит, серединой отрезка I_0O_1, где O_1 — центр описанной окружности T_1. Кроме того, O_0 — середина отрезка OH, где O, H — центр описанной окружности и ортоцентр треугольника T, а центр тяжести T M делит отрезок HO в отношении $2:1$ (рис. 79).

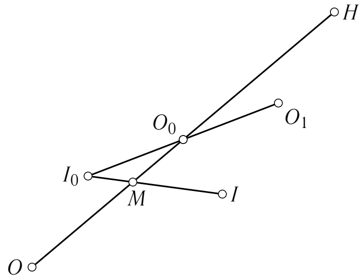


Рис. 79

Гомотетия с центром I_0 и коэффициентом $1/3$ переводит центр I вписанной окружности T в M, а гомотетия с центром O_0 и коэффициентом -3 переводит M в H. Так как композиция этих гомотетий есть центральная симметрия с центром O_1, O_1 — середина IH.

20. (*А. Заславский*) Даны четыре точки A, B, C, D. Точки A_1, B_1, C_1, D_1 — ортоцентры треугольников BCD, CDA, DAB, ABC. Точки A_2, B_2, C_2, D_2 — ортоцентры треугольников $B_1C_1D_1$, $C_1D_1A_1$, $D_1A_1B_1$, $A_1B_1C_1$ и т. д. Докажите, что все окружности, проходящие через середины сторон таких треугольников, пересекаются в одной точке. (10—11 *класс*)

Решение. Докажем сначала, что окружности, проходящие через середины сторон треугольников ABC, BCD, CDA и DAB, пересекаются в одной точке. Пусть X — точка пересечения окружностей 9 точек треугольников ACD и BCD, отличная от середины AB; Y, Z, U — середины AC, BC, CD. Тогда

$$\angle YXZ = \angle YXU + \angle XUZ = \angle DCA + \angle BDC = \angle BCD,$$

т. е. X лежит на окружности 9 точек треугольника ABC. Аналогично, X лежит и на окружности 9 точек треугольника ABD. Далее, так как окружности 9 точек треугольников CDA и ACB_1 совпадают, точка X лежит также на окружностях 9 точек треугольников ABB_1 и CBB_1. Аналогично она лежит на окружностях 9 точек треугольников ABA_1 и BCC_1, а, значит, и на окружностях 9 точек треугольников A_1B_1B, BB_1C_1 и $A_1B_1C_1$, откуда и следует утверждение задачи.

Более короткое решение можно получить, используя следующий факт.

Пусть точки U, V, W лежат на равносторонней гиперболе. Тогда ортоцентр треугольника UVW также лежит на этой гиперболе, а его окружность 9 точек проходит через её центр.

Действительно, проведя равностороннюю гиперболу через точки A, B, C, D, получим, что все окружности проходят через её центр.

21. (*А. Заславский*) На сторонах AB, BC, CA треугольника ABC взяты точки C', A', B'. Докажите, что для площадей соответствующих треугольников выполняется неравенство:

$$S_{ABC}S^2_{A'B'C'} \geqslant 4S_{AB'C'}S_{BC'A'}S_{CA'B'},$$

причём равенство достигается тогда и только тогда, когда прямые AA', BB', CC' пересекаются в одной точке. (10—11 *класс*)

Решение. Обозначим $P_1 = AB' \cdot BC' \cdot CA'$, $P_2 = BA' \cdot AC' \cdot CB'$. Нетрудно убедиться, что $S_{A'B'C'} = (P_1 + P_2)/4R$, где R — радиус описанной окружности ABC, и, следовательно,

$$\frac{S_{AB'C'}S_{BC'A'}S_{CA'B'}}{S_{ABC}(S_{A'B'C'})^2} = \frac{P_1P_2}{(P_1+P_2)^2} \leqslant \frac{1}{4},$$

причём равенство возможно лишь при $P_1 = P_2$, что равносильно пересечению прямых AA', BB' и CC' в одной точке.

22. (*А. Заславский*) Дана окружность, точки A, B на ней и точка P. Пусть X — произвольная точка окружности, Y — точка пересечения прямых AX и BP. Найдите геометрическое место центров окружностей, описанных около треугольников PXY. (10–11 *класс*)

Решение. Пусть Q — отличная от X точка пересечения окружностей ABX и PXY. Тогда

$$\angle ABQ = \angle AXQ = \angle YXQ = \angle YPQ = \angle BPQ.$$

Значит,

$$\angle BQP = \pi - (\angle BPQ + \angle QBP) = \pi - \angle ABP$$

и, следовательно, не зависит от выбора точки X. Поэтому все окружности PXY проходят через Q и их центры лежат на серединном перпендикуляре к PQ.

23. (*А. Мякишев*) Пусть $ABCD$ — выпуклый четырёхугольник, G — центр тяжести его как однородной пластины (т. е. точка пересечения двух прямых, каждая из которых соединяет центроиды треугольников, имеющих общую диагональ).

а) Пусть около $ABCD$ можно описать окружность с центром в O. Точку H определим аналогично G, взяв вместо центроидов ортоцентры. Докажите, что точки H, G, O лежат на одной прямой и $HG : GO = 2 : 1$. (9–10 *класс*)

б) Пусть в $ABCD$ можно вписать окружность с центром в I. Точкой Нагеля N описанного четырёхугольника назовём точку пересечения двух прямых, каждая из которых проходит через точки на противоположных сторонах четырёхугольника, симметричные точкам касания вписанной окружности относительно середин сторон. (Эти прямые делят периметр четырёхугольника пополам). Докажите, что N, G, I лежат на одной прямой, причём $NG : GI = 2 : 1$. (10–11 *класс*)

Решение.

а) Пусть M_a и H_a — соответственно центроид и ортоцентр треугольника BCD. Центроиды и ортоцентры остальных трёх треугольников обозначим аналогично. Все треугольники имеют общую описанную окружность с центром в O. Рассмотрев прямые Эйлера этих треугольников, заметим, что четырёхугольник $M_aM_bM_cM_d$ переходит в четырёхугольник $H_aH_bH_cH_d$ при гомотетии с центром в O и коэффициентом 3. Соответственно точки пересечения диагоналей этих четырёхугольников переходят друг в друга.

б) Обозначим через M_1 центр тяжести периметра четырёхугольника. Точка G лежит на отрезке IM_1 и делит его в отношении $2 : 1$.

Действительно, M_1 — это центр тяжести четырёх точек, помещённых в середины сторон четырёхугольника с массами, пропорциональными их длинам, а G — центр тяжести четырёх точек, помещённых в центрах тяжести треугольников IAB, IBC, ICD, IDA с массами, пропорциональными площадям этих треугольников. Очевидно, две этих системы точек гомотетичны с центром I и коэффициентом $2/3$.

Пусть a, b, c, d — длины касательных к вписанной окружности из вершин A, B, C, D. Очевидно, что, если поместить в A, B, C, D массы a, b, c, d, то центром тяжести полученной системы будет точка N, а, если поместить в вершины массы $2a+b+d$, $2b+a+c$, $2c+b+d$, $2d+c+a$, то — точка M_1. Осталось показать, что I — центр тяжести масс $b+d$, $a+c$, $b+d$, $a+c$.

Точка I удовлетворяет соотношению $S_{IAB} - S_{IBC} + S_{ICD} - S_{IDA} = 0$. Этому же соотношению удовлетворяют середины U и V диагоналей четырёхугольника. Следовательно, эти три точки лежат на одной прямой (это утверждение называется *теоремой Монжа*). Пусть теперь X, Y — точки касания вписанной окружности со сторонами BC и AD. Тогда прямая XY образует равные углы с этими сторонами и по теореме Брианшона проходит через точку L пересечения диагоналей. Применив теорему синусов к треугольникам LXB и LYD, получим, что $BL/DL = b/d$. Аналогично, $AL/CL = a/c$. Отсюда и из соотношений

$$\frac{S_{UBC}}{S_{UAD}} = \frac{BL}{DL}, \quad \frac{S_{VBC}}{S_{VAD}} = \frac{CL}{AL}, \quad \frac{S_{IBC}}{S_{IAD}} = \frac{b+c}{a+d}$$

вытекает, что I делит отрезок AC в отношении $(a+c)/(b+d)$, что и требуется.

24. (*Фольклор*)

а) Через фиксированную точку P внутри данной окружности проводятся два перпендикулярных луча, пересекающие окружность в точках A и B. Найдите геометрическое место проекций P на прямые AB. (9–10 *класс*)

б) Через фиксированную точку P внутри данной сферы проводятся три попарно перпендикулярных луча, пересекающие сферу в точках A, B, C. Найдите геометрическое место проекций точки P на плоскости ABC. (10–11 *класс*)

Решение.

а) Пусть P_1 — точка, симметричная P относительно прямой AB, P_2 — точка, симметричная P относительно середины отрезка AB. Тогда треугольники ABP_1 и ABP_2 симметричны относительно серединного перпендикуляра к AB, следовательно, $OP_1 = OP_2$. Так как $APBP_2$ —

прямоугольник, то $OA^2 + OB^2 = OP^2 + OP_2^2$, т. е. расстояние OP_2 не зависит от выбора лучей PA, PB. Следовательно, точки P_1, P_2 лежат на окружности с центром O, а проекция P на AB — на окружности вдвое меньшего радиуса с центром в середине отрезка OP.

б) Достроим пирамиду $PABC$ до прямоугольного параллелепипеда $PAC'BCB'P'A'$. Аналогично п. а) получаем, что $OP'^2 = 3R^2 - 2OP^2$, т. е. точка P' лежит на сфере с центром O. Так как центр тяжести M треугольника ABC лежит на отрезке PP' и делит его в отношении $1:2$, M лежит на сфере, центром которой является точка, лежащая на отрезке OP и делящая его в отношении $2:1$. Далее, проекцией O на плоскость ABC является центр O' описанной около треугольника ABC окружности, а проекцией P — его ортоцентр H. Так как M лежит на отрезке $O'H$ и $MH = 2MO'$, то $MK = KH$, т. е. искомым ГМТ будет сфера с центром K и радиусом равным $\sqrt{3R^2 - 2OP^2}/3$.

25. (*А. Заславский*) В тетраэдре $ABCD$ двугранные углы при рёбрах BC, CD и DA равны α, а при остальных рёбрах — β. Найдите отношение AB/CD. (11 *класс*)

Решение. Из условия следует равенство трёхгранных углов в вершинах A и B, C и D. Следовательно,

$$\angle CBD = \angle CBA = \angle DAC = \angle DAB,$$
$$\angle ADB = \angle CDB = \angle DCA = \angle BCA,$$

и все грани тетраэдра подобны. При этом

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{BD} = \frac{BD}{CD} = \frac{\sin\angle BAC}{\sin\angle BAD} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

Значит,

$$\frac{AB}{CD} = \left(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\right)^3.$$

26. (*Д. Терешин*) Даны четыре конуса с общей вершиной и образующей одинаковой длины (но, возможно, с разными радиусами оснований). Каждый из них касается двух других. Докажите, что четыре точки касания окружностей оснований конусов лежат на одной окружности. (11 *класс*)

Решение. Окружности оснований конусов лежат на сфере с центром в вершине конусов и радиусом, равным их образующей. Инверсия с центром в любой точке этой сферы переводит её в плоскость, а окружности — в окружности на этой плоскости, каждая из которых касается двух других. Из теоремы об угле между касательной и хордой сразу следует, что четыре точки касания лежат на одной окружности, которой соответствует окружность на сфере.

Финальный тур

8 класс

1. (*И. Ященко*) Впишите в данный полукруг правильный треугольник наибольшего периметра.

Р е ш е н и е. Очевидно, вписать треугольник в полукруг можно двумя способами: либо две вершины треугольника лежат на дуге, а третья на диаметре полукруга, либо, наоборот, две вершины на диаметре, а третья на дуге. Рассмотрим первый случай. Пусть вершины A, B лежат на дуге. Тогда серединный перпендикуляр к AB проходит через центр полукруга. Следовательно, третья вершина совпадает с центром и сторона треугольника равна радиусу полукруга (рис. 80).

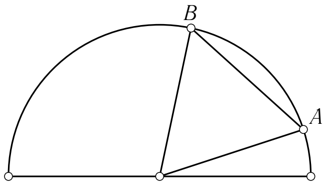


Рис. 80

Во втором случае высота треугольника не превосходит радиуса полукруга, причём в случае, изображённом на рис. 81, равенство достигается. Следовательно, именно этот треугольник и будет искомым.

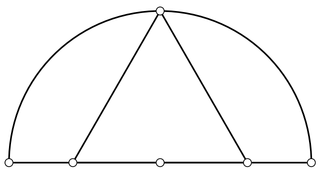


Рис. 81

2. (*Б. Френкин*) При каком наименьшем n существует n-угольник, который можно разрезать на треугольник, четырёхугольник, ..., 2006-угольник?

О т в е т. $n = 3$.

Р е ш е н и е. Из рис. 82 видно, что при любом $n \geqslant 3$ треугольник можно разрезать на n-угольник и $(n+1)$-угольник. Следовательно, можно лучами, выходящими из одной вершины, разрезать треугольник на

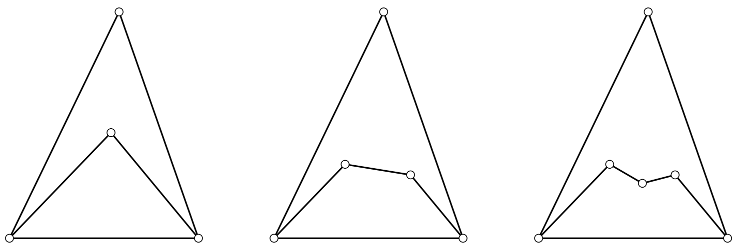


Рис. 82

1002 треугольника, а затем первый из них разрезать на треугольник и четырёхугольник, второй на пятиугольник и шестиугольник, ..., последний — на 2005-угольник и 2006-угольник.

3. (*В. Протасов*) Дан параллелограмм $ABCD$. Две окружности с центрами в вершинах A и C проходят через D. Прямая l проходит через D и вторично пересекает окружности в точках X, Y. Докажите, что $BX = BY$.

Решение. Рассмотрим, например, случай, изображённый на рис. 83. Имеем $AX = AD = BC$ и $CY = CD = AB$. Кроме того,

$$\begin{aligned}\angle BCY &= \angle C - \angle DCY = \angle C - (\pi - 2\angle CDY) = \\ &= 2\angle CDY - \angle D = \angle CDY - \angle ADX, \\ \angle BAX &= \angle DAX - \angle A = \pi - 2\angle ADX - \angle A = \\ &= \angle D - 2\angle ADX = \angle CDY - \angle ADX.\end{aligned}$$

Значит, треугольники ABX и CYB равны, откуда и следует искомое равенство. Другие случаи расположения точек X, Y рассматриваются аналогично.

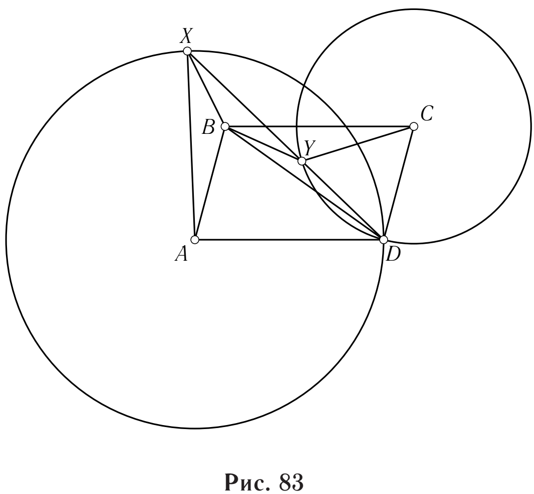


Рис. 83

4. (*А. Заславский*) Две равные окружности пересекаются в точках A и B. P — отличная от A и B точка одной из окружностей, X, Y — вторые точки пересечения прямых PA, PB с другой окружностью. Докажите, что прямая, проходящая через P и перпендикулярная AB, делит одну из дуг XY пополам.

Решение. Рассмотрим случай, когда P лежит внутри второй окружности (рис. 84). Пусть Q — точка пересечения прямой, проходящей через P и перпендикулярной AB, лежащая вне первой окружности. Тогда

$$\angle QPX = \frac{\smile QX + \smile AP}{2}, \quad \angle QPY = \frac{\smile QY + \smile BP}{2}.$$

Но

$$\frac{\smile AP - \smile BP}{2} = \angle PBA - \angle PAB = \angle QPX - \angle QPY,$$

следовательно, дуги QX и QY равны. Другие случаи рассматриваются аналогично.

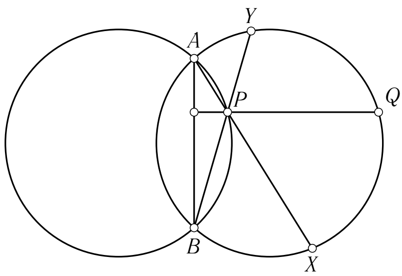


Рис. 84

5. (*В. Гуровиц, Б. Френкин*) Существует ли выпуклый многоугольник, у которого каждая сторона равна какой-нибудь диагонали, а каждая диагональ — какой-нибудь стороне?

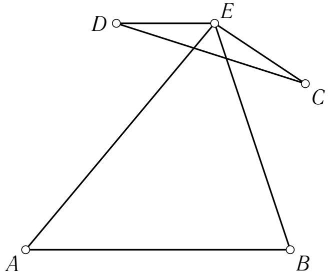


Рис. 85

Ответ. Нет.

Решение. Предположим противное, и пусть AB — наибольшая сторона многоугольника, CD — наименьшая диагональ (AB и CD могут иметь один общий конец), E — вершина, лежащая от CD по другую сторону, чем A и B (рис. 85). Тогда, так как $AE \leqslant AB$ и $BE \leqslant AB$, $\angle AEB \geqslant 60°$. С другой стороны, так как $CE \geqslant CD$ и $DE \geqslant CD$, $\angle CED \leqslant 60°$. Но $\angle CED > \angle AEB$ — противоречие.

6. (*М. Волчкевич*) Дан треугольник ABC и точка P внутри него. A', B', C' — проекции P на прямые BC, CA, AB. Докажите, что центр окруж-

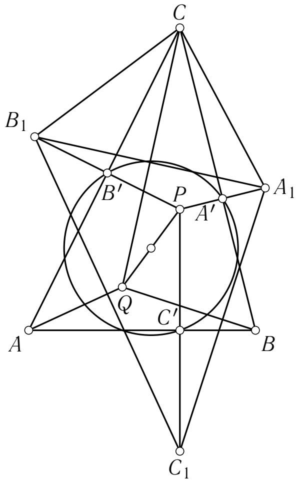


Рис. 86

ности, описанной около треугольника $A'B'C'$, лежит внутри треугольника ABC.

Решение. Пусть A_1, B_1, C_1 — точки, симметричные P относительно BC, CA, AB. Так как $CA_1 = CP = CB_1$, серединный перпендикуляр к отрезку A_1B_1 совпадает с биссектрисой $\angle A_1CB_1$. Так как $\angle A_1CB_1 = 2\angle ACB$, эта биссектриса проходит внутри $\angle ACB$ (рис. 86). Аналогично, серединные перпендикуляры к отрезкам A_1C_1 и B_1C_1 проходят внутри соответствующих углов треугольника ABC. Следовательно, центр Q окружности, описанной около треугольника $A_1B_1C_1$, лежит внутри треугольника ABC. Так как треугольник $A'B'C'$ получается из треугольника $A_1B_1C_1$ гомотетией с центром P и коэффициентом $1/2$, центр окружности, описанной около $A'B'C'$, совпадает с серединой отрезка PQ и, значит, лежит внутри ABC.

9 класс

1. (*В. Протасов*) Дана окружность радиуса R. Две другие окружности, сумма радиусов которых также равна R, касаются её изнутри. Докажите, что прямая, соединяющая точки касания, проходит через одну из общих точек этих окружностей.

Решение. Пусть O — центр внешней окружности, O_1, O_2 — центры внутренних, A, B — точки касания. Проведём через O_1 прямую,

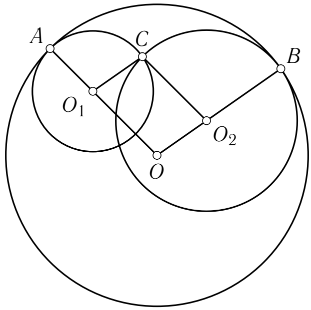


Рис. 87

параллельную OB, а через O_2 прямую, параллельную OA. По теореме Фалеса эти прямые пересекутся в точке C, лежащей на отрезке AB. При этом

$$O_1C = O_1A \quad \text{и} \quad O_2C = O_2B$$

так, что точка C принадлежит обеим внутренним окружностям (рис. 87).

2. (*В. Протасов*) Дана окружность, точка A на ней и точка M внутри неё. Рассматриваются хорды BC, проходящие через M. Докажите, что окружности, проходящие через середины сторон всех треугольников ABC, касаются некоторой фиксированной окружности.

Р е ш е н и е. Пусть O — центр данной окружности, O' — центр окружности, проходящей через середины сторон ABC, P — центр тяжести ABC. Поскольку вершины треугольника ABC переходят в середины его сторон при гомотетии с центром P и коэффициентом $-1/2$, P лежит на отрезке OO' и делит его в отношении $2:1$. Кроме того, так как множество середин хорд, проходящих через M, — это окружность с диаметром OM, множество центров тяжести треугольников ABC — тоже окружность, получающаяся из неё гомотетией с центром A и коэффициентом $2/3$. Значит, множество точек O' — тоже окружность (рис. 88).

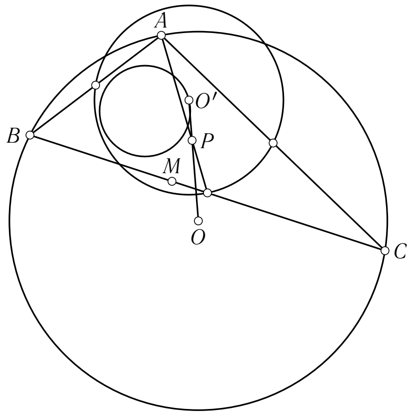


Рис. 88

Поскольку радиусы всех окружностей, проходящих через середины сторон ABC, равны половине радиуса данной окружности, все эти окружности касаются двух окружностей, концентричных с окружностью, на которой лежат точки O' (если точка M совпадает с O, одна из этих окружностей вырождается в точку).

3. (*А. Акопян*) Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны и по-разному ориентированы. На отрезке AA_1 взята точка A' такая, что

$$\frac{AA'}{A_1A'} = \frac{BC}{B_1C_1}.$$

Аналогично строим B' и C'. Докажите, что A', B' и C' лежат на одной прямой.

Решение. Подобие, переводящее ABC в $A_1B_1C_1$, можно представить как композицию симметрии относительно прямой l и гомотетии с центром в некоторой точке, лежащей на l, и коэффициентом k, равным отношению соответствующих сторон треугольников. Очевидно, что отрезки AA_1, BB_1, CC_1 делятся l в отношении, равном k, т. е. точки A', B', C' лежат на l.

4. (*С. Маркелов*) В невыпуклом шестиугольнике каждый угол равен либо 90, либо 270 градусов. Верно ли, что при некоторых длинах сторон его можно разрезать на два подобных ему и неравных между собой шестиугольника?

Решение. Пусть t — корень уравнения $t^4 + t^2 = 1$. Возьмём шестиугольник $ABCDEF$, в котором

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{CD} = \frac{CD}{AF} = \frac{AF}{FE} = \frac{FE}{ED} = \frac{1}{t},$$

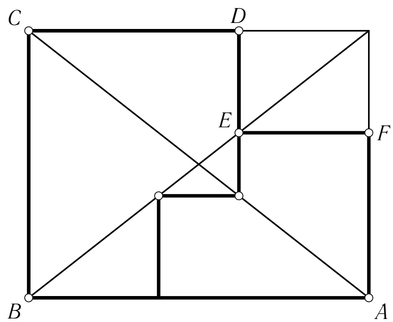


Рис. 89

и разрежем его, как на рис. 89. Тогда получившиеся шестиугольники подобны $ABCDEF$ с коэффициентами t и t^2.

5. (*А. Заславский*) Прямая, проходящая через центр описанной окружности и точку пересечения высот неравностороннего треугольника ABC, делит его периметр и площадь в одном и том же отношении. Найдите это отношение.

Ответ. $1:1$.

Решение. Прежде всего докажем, что прямая делит периметр и площадь треугольника в одном отношении тогда и только тогда, когда она проходит через центр вписанной окружности. Действительно, пусть прямая пересекает стороны AC, BC в точках X, Y, а биссектрису угла C в точке J; d_1 — расстояние от J до стороны AB, d_2 — расстояние от J до двух других сторон. Тогда

$$2S_{CXY} = (CX + CY)d_2,$$
$$2S_{AXYB} = (AX + BY)d_2 + AB \cdot d_1,$$

и отношения равны тогда и только тогда, когда $d_2 = d_1$, т. е. J — центр вписанной окружности.

Пусть теперь центр описанной окружности O, центр вписанной окружности I и ортоцентр H лежат на одной прямой. Эта прямая содержит не более одной вершины треугольника. Пусть она не проходит через вершины A и B. Так как AI, BI — биссектрисы углов HAO, HBO, получаем, что

$$\frac{AH}{AO} = \frac{HI}{IO} = \frac{BH}{BO}.$$

Так как $AO = BO$, то $AH = BH$, т. е. треугольник ABC равнобедренный и искомое отношение равно $1:1$.

6. (*Я. Ганин*, *Ф. Ридо*) Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. A', B', C', D' — ортоцентры треугольников BCD, CDA, DAB, ABC. Докажите, что в четырёхугольниках $ABCD$ и $A'B'C'D'$ соответствующие диагонали делятся точками пересечения в одном и том же отношении.

Решение. Используем следующее утверждение.

Пусть $KLMN$ — выпуклый четырёхугольник; точки X, Y делят отрезки KL и NM в отношении α; точки U, V делят в отрезки LM и KN в отношении β. Тогда точка пересечения отрезков XY и UV делит первый из ни х в отношении β, а второй в отношении α (рис. 90)

Доказательство этого утверждения легко получить методом масс.

Пусть теперь A_1, B_1, C_1, D_1 — центры тяжести треугольников BCD, CDA, DAB, ABC; A_2, B_2, C_2, D_2 — центры описанных около них окружностей. Четырёхугольник $A_1B_1C_1D_1$ гомотетичен четырёхугольнику $ABCD$ относительно его центра тяжести с коэффициентом $-1/3$. Следовательно, соответствующие диагонали этих четырёхугольников делятся точками пересечения в одинаковых отношениях. Докажем, что в тех же отношениях делят друг друга диагонали четырёхугольника $A_2B_2C_2D_2$.

Пусть P — точка пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$. Тогда

$$\frac{AP}{CP} = \frac{AP}{BP}\frac{BP}{CP} = \frac{\sin\angle ABD \cdot \sin\angle ACB}{\sin\angle BAC \cdot \sin\angle CBD}.$$

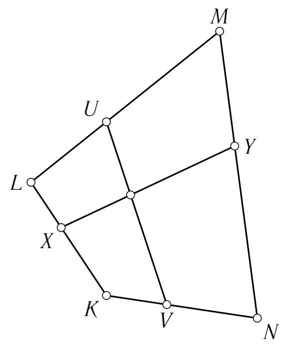


Рис. 90

Поскольку стороны и диагонали четырёхугольника $A_2B_2C_2D_2$ перпендикулярны сторонам и диагоналям четырёхугольника $ABCD$ (например, точки A_2, B_2 лежат на серединном перпендикуляре к CD), в таком же отношении делится и диагональ A_2C_2.

Пусть теперь P_1, P_2 — точки пересечения диагоналей четырёхугольников $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$; P' — точка на отрезке $A'C'$, делящая его в отношении A_2P_2/P_2C_2. Так как точки A_1, C_1 лежат на отрезках $A'A_2$, $C'C_2$ и делят их в отношении $2:1$, из сформулированного утверждения вытекает, что точка P_1 также делит отрезок $P'P_2$ в отношении $2:1$. Рассмотрев аналогичную точку на отрезке $B'D'$, получим тот же результат. Отсюда следует, что P' — точка пересечения диагоналей четырёхугольника $A'B'C'D'$, причём диагонали делятся этой точкой в том же отношении, что и в четырёхугольниках $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$ и $ABCD$.

10 класс

1. (*Гиацинты*) Пять прямых проходят через одну точку. Докажите, что существует замкнутая пятизвенная ломаная, вершины и середины звеньев которой лежат на этих прямых, причем на каждой прямой лежит ровно по одной вершине.

Р е ш е н и е. Пусть O — точка пересечения прямых. Возьмём на прямой l_1 точку A_1 и найдём на l_3 такую точку A_2, что середина B отрезка A_1A_2 лежит на прямой l_2 (рис. 91). Применяя теорему синусов к треугольникам OA_1B и OA_2B, получаем, что

$$\frac{OA_2}{OA_1} = \frac{\sin\angle A_1OB}{\sin\angle A_2OB}.$$

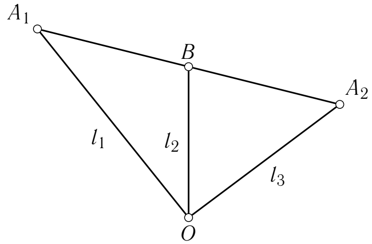


Рис. 91

Аналогично по точке A_2 построим на прямой l_5 такую точку A_3, что середина A_2A_3 лежит на l_4 и т. д. Перемножив полученные соотношения, получим, что A_6 совпадает с A_1.

2. (*А. Заславский*) Проекции точки X на стороны четырёхугольника $ABCD$ лежат на одной окружности. Y — точка, симметричная X относительно центра этой окружности. Докажите, что проекции точки B на прямые AX, XC, CY, YA также лежат на одной окружности.

Решение. Рассмотрим случай, когда X лежит внутри $ABCD$, остальные разбираются аналогично. Пусть K, L, M, N — проекции X на AB, BC, CD, DA; K', L', M', N' — точки, симметричные X относительно этих прямых. Так как K, L, M, N лежат на окружности, K', L', M', N' также лежат на окружности. Так как $BK' = BX = BL'$, серединный перпендикуляр к отрезку $K'L'$ проходит через B и является биссектрисой угла $K'BL'$, т. е. симметричен BX относительно биссектрисы угла B. Следовательно, четыре прямые, симметричные прямым, соединяющим X с вершинами $ABCD$, относительно биссектрис соответствующих углов, пересекаются в одной точке X', являющейся центром описанной окружности четырёхугольника $K'L'M'N'$. При этом центром окружности $KLMN$ будет середина XX', и значит, X' совпадает с Y. Далее, так как четырёхугольники $XKBL$, $XLCM$, $XMDN$, $XNAK$ вписанные,

$$\begin{aligned}\angle AXB + \angle CXD &= \angle KXA + \angle KXB + \angle CXM + \angle DXM = \\ &= \angle KNA + \angle BLK + \angle CLM + \angle MND = \\ &= (\pi - \angle KLM) + (\pi - \angle MNK) = \pi.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что прямые XB и DX симметричны относительно биссектрисы угла AXC. Аналогично, прямые YB и DY симметричны относительно биссектрисы угла AYC. Кроме того, как уже было показано, совпадают биссектрисы углов BAD и XAY, BCD и XCY. Таким образом,

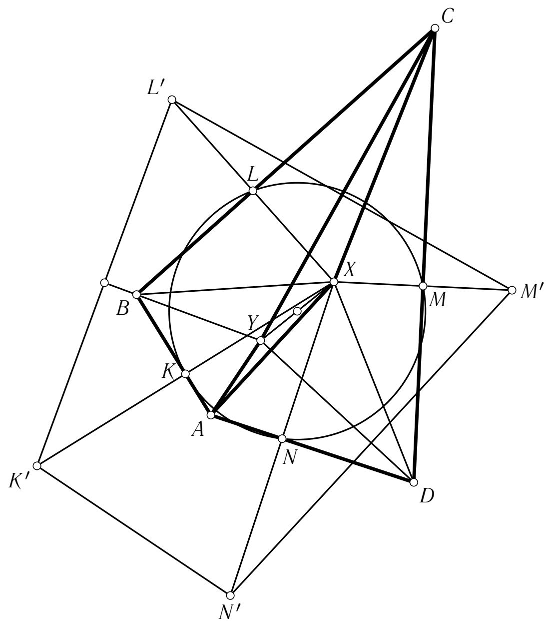


Рис. 92

прямые, симметричные BA, BX, BC, BY относительно биссектрис соответствующих углов $AXCY$, пересекаются в точке D. Отсюда, рассуждая аналогично началу решения, получаем утверждение задачи (рис. 92).

3. (*П. Кожевников*) Дана окружность и точка P внутри неё, отличная от центра. Рассматриваются пары окружностей, касающиеся данной изнутри и друг друга в точке P. Найдите геометрическое место точек пересечения общих внешних касательных к этим окружностям.

Решение. Пусть X — точка пересечения касательных. Проведём окружность с центром X и радиусом XP и рассмотрим инверсию относительно неё. При этой инверсии окружности, касающиеся в точке P, перейдут друг в друга, так как они касаются окружности инверсии и двух прямых, переходящих в себя. Следовательно, исходная окружность перейдёт в себя. Значит, окружность инверсии ортогональна исходной, т. е. касательная из X к исходной окружности равна XP, и X лежит на радикальной оси точки P и исходной окружности. Очевидно, что любая точка радикальной оси может быть получена таким образом, т. е. искомое ГМТ совпадает с радикальной осью точки P и исходной окружности.

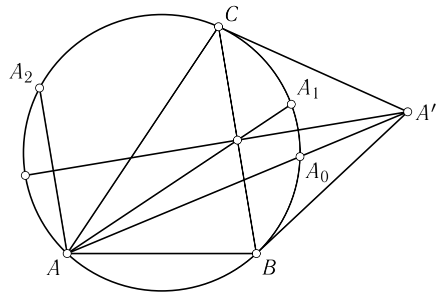


Рис. 93

4. (*А. Заславский*) Прямые, содержащие медианы треугольника ABC, вторично пересекают его описанную окружность в точках A_1, B_1, C_1. Прямые, проходящие через A, B, C и параллельные противоположным сторонам, пересекают её же в точках A_2, B_2, C_2. Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 пересекаются в одной точке.

Решение. (*М. Илюхина*) Пусть A' — точка пересечения касательных к описанной окружности ω в точках B и C (аналогично построим точки B' и C'). Тогда, как известно, прямая AA' является симедианой треугольника ABC (т. е. прямой, симметричной AA_1 относительно биссектрисы угла A). Пусть прямая AA' вторично пересекает ω в точке A_0. Тогда $\angle A_1AB = \angle A_0AC$, откуда дуги BA_1 и CA_0 равны.

Так как треугольник $A'BC$ равнобедренный, а ω — его вневписанная окружность, то они симметричны относительно биссектрисы l угла $BA'C$. Из равенства дуг следует, что при этой симметрии точки A_1 и A_0 переходят друг в друга. Заметим, что l — серединный перпендикуляр к BC, поэтому A при этой симметрии переходит в A_2 (рис. 93), а, следовательно, прямая A_1A_2 переходит в прямую AA'. Поэтому, так как прямые AA', BB', CC' пересекаются в одной точке L как симедианы треугольника ABC, то прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 также пересекаются в точке, изогонально сопряжённой L относительно треугольника $A'B'C'$.

Случай, когда одной из точек A', B', C' не существует, аналогичен.

5. (*С. Маркелов*) Может ли развёртка тетраэдра оказаться треугольником со сторонами 3, 4 и 5 (тетраэдр можно резать только по рёбрам)?

Ответ. Да.

Решение. Например, можно склеить тетраэдр из развёртки, показанной на рис. 94 (меньший катет разделён на три равные части, а гипотенуза в отношении 4 : 1). Нетрудно убедиться, что каждый из трёх углов, на которые делится меньший угол треугольника, меньше суммы двух других; следовательно, из такой развёртки, действительно, можно склеить тетраэдр.

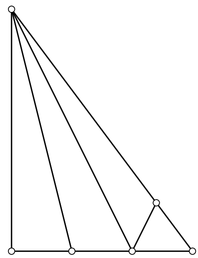


Рис. 94

6. (*А. Заславский*) На доске был нарисован четырёхугольник, в который можно вписать и около которого можно описать окружность. В нём отметили центры этих окружностей и точку пересечения прямых, соединяющих середины противоположных сторон, после чего сам четырёхугольник стёрли. Восстановите его с помощью циркуля и линейки.

Решение. Построение основано на двух леммах.

Лемма 1. *Диагонали всех четырёхугольников, вписанных в данную окружность с центром O и описанных около данной окружности с центром I, пересекаются в одной и той же точке L, лежащей на продолжении отрезка OI за точку I.*

Лемма 2. *Центр вписанной в четырёхугольник окружности лежит на прямой, соединяющей середины его диагоналей* (*Теорема Монжа*).

Отметим также, что в любом четырёхугольнике точка M пересечения прямых, соединяющих середины противоположных сторон, делит пополам отрезок между серединами диагоналей.

Из леммы 1 следует, что середины диагоналей искомого четырёхугольника лежат на окружности с диаметром OL. Отсюда и из леммы 2 получаем, что точка M лежит на окружности, диаметрально противоположными точками которой являются I и середина OL. Поэтому, проведя через M прямую, перпендикулярную IM, и найдя точку её пересечения с OI, мы получим середину OL, а значит, и саму точку L. Далее, построив окружность с диаметром OL и найдя её точки пересечения с прямой MI, получим середины диагоналей четырёхугольника. Кроме того, рассмотрев четырёхугольник, две вершины которого лежат на прямой OI, нетрудно убедиться, что для третьей вершины X XI — биссектриса $\angle OXL$ (рис. 95). Это даёт возможность восстановить описанную окружность четырёхугольника и найти его вершины как точки пересечения этой окружности с диагоналями.

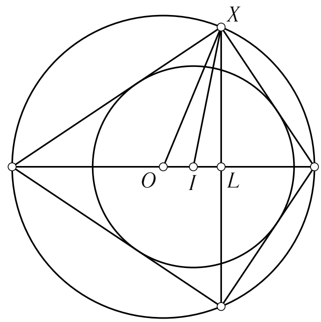


Рис. 95

Третья олимпиада (2007)

Заочный тур

1. Треугольник разрезан на несколько (не менее двух) треугольников. Один из них равнобедренный (не равносторонний), а остальные — равносторонние. Найдите углы исходного треугольника. (8 *класс*)

2. Каждая диагональ четырёхугольника разбивает его на два равнобедренных треугольника. Верно ли, что четырёхугольник — ромб? (8 *класс*)

3. Отрезки, соединяющие внутреннюю точку выпуклого неравностороннего n-угольника с его вершинами, делят n-угольник на n равных треугольников. При каком наименьшем n это возможно? (8–9 *класс*)

4. Существует ли такой параллелограмм, что все точки попарных пересечений биссектрис его углов лежат вне параллелограмма? (8 *класс*)

5. Невыпуклый n-угольник разрезали прямолинейным разрезом на три части, после чего из двух частей сложили многоугольник, равный третьей части. Может ли n равняться

а) пяти? (8 *класс*)

б) четырём? (8–10 *класс*)

6. а) Сколько осей симметрии может иметь клетчатый многоугольник, т. е. многоугольник, стороны которого лежат на линиях листа бумаги в клетку? (укажите все возможные значения) (8–9 *класс*)

б) Сколько осей симметрии может иметь клетчатый многогранник, т. е. многогранник, составленный из одинаковых кубиков, примыкающих друг к другу гранями? (10–11 *класс*)

7. Выпуклый многоугольник описан около окружности. Точки касания его сторон с окружностью образуют многоугольник с таким же набором углов (порядок углов может быть другим). Верно ли, что многоугольник правильный? (8–9 *класс*)

8. Три окружности проходят через точку P, а вторые точки их пересечения A, B, C лежат на одной прямой. A_1, B_1, C_1 — вторые точки пересечения прямых AP, BP, CP с соответствующими окружностями. C_2 — точка пересечения прямых AB_1 и BA_1. A_2, B_2 определяются аналогично. Докажите, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равны. (8–9 *класс*)

9. Два выпуклых четырёхугольника таковы, что стороны каждого лежат на серединных перпендикулярах к сторонам другого. Найдите их углы. (8–9 *класс*)

10. Найдите геометрическое место центров правильных треугольников, стороны которых проходят через 3 заданные точки A, B, C (т. е. на каждой стороне или её продолжении лежит ровно одна из заданных точек). (8–9 *класс*)

11. Мальчик с папой стоят на берегу моря. Если мальчик встанет на цыпочки, его глаза будут на высоте 1 м от поверхности моря, а если сядет папе на плечи, то на высоте 2 м. Во сколько раз дальше он будет видеть во втором случае? (Найдите ответ с точностью до 0,1, радиус Земли считайте равным 6 000 км.) (8–10 *класс*)

12. Дан прямоугольник $ABCD$ и точка P. Прямые, проходящие через A и B и перпендикулярные, соответственно, PC и PD, пересекаются в точке Q. Докажите, что $PQ \perp AB$. (9–10 *класс*)

13. На стороне AB треугольника ABC взяты точки X, Y, такие что $AX = BY$. Прямые CX и CY вторично пересекают описанную окружность треугольника в точках U и V. Докажите, что все прямые UV проходят через одну точку. (9–10 *класс*)

14. В трапеции с основаниями AD и BC, точки P и Q — середины диагоналей AC и BD соответственно. Докажите, что, если $\angle DAQ = \angle CAB$, то $\angle PBA = \angle DBC$. (9–11 *класс*)

15. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA', BB' и CC'. Пусть $A'B' \cap CC' = P$ и $A'C' \cap BB' = Q$. Докажите, что $\angle PAC = \angle QAB$. (9–11 *класс*)

16. На сторонах угла взяты точки A, B. Через середину M отрезка AB проведены две прямые, одна из которых пересекает стороны угла в точках A_1, B_1, другая — в точках A_2, B_2. Прямые A_1B_2 и A_2B_1 пересекают AB в точках P и Q. Докажите, что M — середина PQ. (9–11 *класс*)

17. Какие треугольники можно разрезать на три треугольника с равными радиусами описанных окружностей? (9–11 *класс*)

18. Найдите геометрическое место вершин треугольников с заданными ортоцентром и центром описанной окружности. (9–11 *класс*)

19. В угол A, равный α, вписана окружность, касающаяся его сторон в точках B и C. Прямая, касающаяся окружности в некоторой точке M, пересекает отрезки AB и AC в точках P и Q соответственно. При каком наименьшем α возможно неравенство $S_{PAQ} < S_{BMC}$? (10–11 *класс*)

20. Основанием пирамиды является правильный треугольник со стороной 1. Из трёх углов при вершине пирамиды два — прямые. Найдите наибольший объём пирамиды. (11 *класс*)

21. На плоскости лежат три трубы (круговые цилиндры одного размера в обхвате 4 м). Две из них лежат параллельно и, касаясь друг друга по общей образующей, образуют над плоскостью тоннель. Третья, перпендикулярная к первым двум, вырезает в тоннеле камеру. Найдите площадь границы этой камеры. (11 *класс*)

Приложение

И.Ф. Шарыгин

Где ошибка?[1]

Большинство граждан любой страны, Соединённых Штатов или России, Японии или Израиля, в том числе и считающиеся хорошо образованными, имеют весьма смутное представление о математике и с недоверием воспринимают даже вполне математически обоснованные утверждения, если они не соответствуют сложившимся стереотипам. Причём это незнание и недоверие относится и к самым элементарным вещам. Попробуем, например, решить следующую очень простую задачу на чисто школьную тему, на проценты.

1. Фермер собрал 10 т арбузов и отправил их на барже по реке в ближайший город. Как известно, арбузы почти целиком состоят из воды. В момент отправления содержание воды в них равнялось 99%. За время транспортировки арбузы несколько усохли, содержание воды уменьшилось на 1%. (Стало равным 98%.) Чему равна масса арбузов, прибывших в город?

Многие, узнав ответ, даже самостоятельно найдя этот ответ, отказываются в него верить. (Решите эту задачу самостоятельно.) С другой же стороны, рядовые граждане зачастую просто неспособны к простейшим мыслительным действиям и готовы поверить любому идиотскому рассуждению, особенно если это рассуждение произносится уверенным тоном и публично. Рассмотрим, например, следующую старинную задачу.

2. Один отставной генерал решил продать свои сапоги. Он послал своего денщика на базар, дал ему пару сапог и велел продать их за 15 руб. Денщик встретил на базаре двух одноногих ветеранов и продал каждому из них по сапогу за 7,5 руб. Когда он рассказал об этом генералу, тот заявил, что с ветеранов и инвалидов можно было бы взять и поменьше. Генерал дал денщику 5 руб. и велел вернуть их покупателям. По дороге денщик 3 руб. прогулял в трактире и вернул каждому инвалиду по

[1] Впервые напечатано в журнале «Quantum» № 7–8, 1998. Печатается в сокращении.

1 руб. А теперь давайте считать. Каждый инвалид заплатил по 6,5 руб. Умножаем 6,5 на 2 и получаем 13 руб. Да ещё 3 руб. денщик прогулял. $13+3 = 16$ руб. Откуда взялся лишний рубль? (Подобным образом некоторые политические деятели предлагают добывать деньги на социальные программы.)

Конечно, предыдущий пример достаточно прост, но он вполне чётко показывает схему получения многих математических парадоксов. Читателю навязывается некоторое правдоподобное рассуждение, содержащее ошибку. В результате получается утверждение, противоречащее очевидным или же известным математическим фактам. (Иногда эта ошибка бывает достаточно тонкой и найти её не так просто.) В качестве примера приведём одну «теорему» по геометрии.

3. Ещё один признак равенства треугольников. Если в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ выполняются следующие равенства: $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$, то эти треугольники равны.

«Доказательство». Построим треугольник $AB'C$ как на рис. 1. В этом треугольнике $\angle CAB' = \angle C_1A_1B_1$, $AB' = A_1B_1$. По соответствующему признаку равенства треугольники $AB'C$ и $A_1B_1C_1$ равны. (Ведь по условию $AC = A_1C_1$.) Значит, в соответствии с условием

$$\angle AB'C = \angle ABC, \quad AB' = AB.$$

Проведём отрезок BB'. Треугольник BAB' равнобедренный. Значит,

$$\angle ABB' = \angle AB'B.$$

Далее получаем, что $\angle CBB' = \angle CB'B$. Таким образом, треугольник CBB' также является равнобедренным и $CB = CB'$. Итак, треугольник

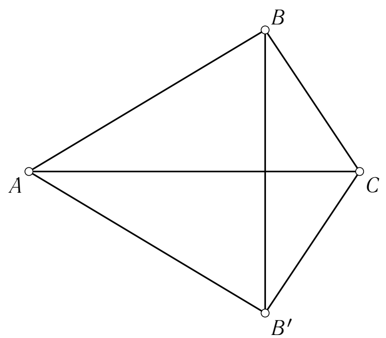


Рис. 1

ACB' равен треугольнику ACB по трём сторонам, т. е. треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны. Теорема доказана?

Мы не просим Вас опровергнуть утверждение теоремы. То, что она неверна, доказать нетрудно. Вопрос: где ошибка в «доказательстве»? В математике неверность того или иного утверждения далеко не всегда очевидна. Умение найти ошибку, содержащуюся в том или ином рассуждении, почувствовать наличие логического пробела является одним из важнейших умений в профессиональной математической деятельности. В математической науке известны случаи, когда через многие годы, через десятилетия, обнаруживались ошибки в считавшихся безукоризненными доказательствах, более того, оказывалось, что и сами теоремы неверны. Мы рассмотрим здесь ещё несколько чисто учебных примеров. Для каждой из следующих задач будет предложено решение. Решение это содержит ту или иную ошибку, которую Вы должны обнаружить.

4. Дан параллелограмм $ABCD$, в котором $\angle ABD = 40°$. Известно также, что центры окружностей, описанных около треугольников ABC и CAD расположены на BD. Чему равен $\angle ABC$?

«Решение». Пусть O и Q — центры окружностей, описанных около треугольников ABC и CAD. Поскольку перпендикуляры из этих центров к стороне AC делят эту сторону пополам, то прямая OQ перпендикулярна диагонали AC параллелограмма. Теперь из условия задачи следует, что диагонали параллелограмма перпендикулярны. Значит, данный параллелограмм является ромбом и $\angle ABC = 80°$.

Вы удовлетворены этим решением?

5. Известно, что числа p и q удовлетворяют уравнению $x^2+px+q=0$. Найти p и q.

«Решение». По теореме Виета получаем систему: $p + q = -p$, $pq = q$. Решая эту систему, получим два решения: $p = q = 0$ и $p = 1$, $q = -2$. Есть ли у Вас какие-нибудь замечания по поводу этого решения?

6. Решить уравнение $\operatorname{tg}(x + \pi/4) = 3 \operatorname{ctg} x - 1$.

«Решение». Левую часть уравнения преобразуем по формуле тангенса суммы и перейдём к новой переменной $y = \operatorname{tg} x$. Получим для этой переменной уравнение:

$$\frac{y+1}{1-y} = \frac{3}{y} - 1.$$

Из этого уравнения найдём $y = 3/5$. Значит, $x = \operatorname{arctg} 3/5 + \pi k$. И всё?

7. Сколько решений имеет уравнение $\log_{1/16} x = (1/16)^x$?

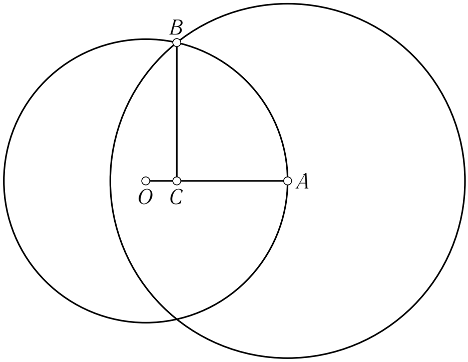


Рис. 2

« Р е ш е н и е ». В левой и правой частях уравнения находятся две хорошо известные взаимно обратные функции. Строим графики этих функций и «видим», что эти графики пересекаются в единственной точке, расположенной на биссектрисе первого координатного угла. Значит, данное уравнение имеет одно решение. У вас есть возражения?

Следующие две задачи не совсем соответствуют нашей теме. Их условия кажутся невыполнимыми. На это мы и обратим внимание.

8. Через вершину прямого кругового конуса проведено сечение наибольшей площади. Оказалось, что это сечение по площади в два раза больше осевого сечения конуса. Найти угол в осевом сечении конуса.

Условие задачи представляется неверным, поскольку наибольшую площадь имеет именно осевое сечение конуса.

9. На поверхности первого шара расположен центр второго шара. Известно, что площадь части поверхности первого шара, расположенной внутри второго, в 5 раз меньше поверхности второго шара. Найти отношение радиусов данных шаров.

Для решения этой задачи нам потребуется формула площади поверхности шарового сегмента: $S = 2\pi Rh$, где R — радиус шара, h — высота сегмента.

« Р е ш е н и е ». Пусть R и r — соответственно радиусы первого и второго шаров. Проведём сечение плоскостью, проходящей через центры шаров (рис. 2). Имеем

$$OA = OB = R, \quad AB = r.$$

Опустим из B перпендикуляр BC на OA. AC есть высота шарового сегмента, представляющего собой часть поверхности первого шара, лежащую внутри второго. Пусть $AC = h$. По теореме Пифагора для треугольников ABC и OBC составляем уравнение:

$$r^2 - h^2 = R^2 - (R - h)^2.$$

Из этого уравнения найдём: $h = r^2/2R$. Теперь по формуле площади поверхности шарового сегмента найдём $S = \pi r^2$. Но вся поверхность второго шара равна $4\pi r^2$. То есть площадь части первого шара внутри второго всегда в 4 раза меньше площади поверхности второго. А по условию, она в 5 раз меньше. Противоречие. Значит, задача не имеет решения (?)

Объяснения

1. Масса арбузов уменьшится ровно в два раза и составит 5 т. Для многих это кажется удивительным.

2. Неверно к 13 прибавлять 3 рубля. Тем самым деньги, которые денщик прогулял, мы считаем дважды. На самом деле $13 = 10 + 3$, где 10 рублей — деньги, полученные генералом, а 3 рубля — потраченные денщиком.

3. Если прямая BB' пройдёт через точку C, то наши рассуждения не проходят. Углы CBB' и $CB'B$ равны, но они равны $0°$, а значит, мы не можем воспользоваться признаком равнобедренного треугольника.

4. Возможен ещё один случай: когда центры указанных в условии окружностей совпадают с центром параллелограмма. Тогда этот параллелограмм оказывается прямоугольником. Задача имеет второй ответ: $90°$.

5. В условии не сказано, что p и q — два корня уравнения и других корней нет. Если $p = q$, то возможно наличие других корней, и задача имеет ещё одно решение: $p = q = -1/2$.

6. При таком решении происходит сужение области определения функций, входящих в уравнение, и теряется серия $x = \pi/2 + \pi n$.

7. Нетрудно убедиться, что числа $1/2$ и $1/4$ удовлетворяют уравнению. Но два корня уравнение иметь не может, число решений обязательно нечётно. На самом деле оба графика очень сильно прижимаются к осям координат и тогда они вполне могут пересекаться более одного раза. Методами математического анализа несложно доказать, что в данном случае число решений уравнения равно трём. И вообще, уравнение $\log_a x = a^x$ имеет не более трёх решений. (Доказательство основано на известной теореме анализа: между любыми двумя нулями функции имеется хотя бы один ноль её производной.)

8. Все сечения конуса, проходящие через вершину, представляют собой равнобедренные треугольники с одинаковыми боковыми сторонами. Если α — угол в осевом сечении конуса, а γ — угол между равными сторонами в произвольном сечении, то $0 < \gamma \leqslant \alpha$. Но площадь сечения пропорциональна $\sin\gamma$. Отсюда следует, что если $\alpha \leqslant 90°$, то наибольшую площадь имеет именно осевое сечение. Если же $\alpha > 90°$, то наибольшую площадь имеет сечение, для которого $\gamma = 90°$. Теперь из условия получаем, что $\alpha > 90°$ и $\sin\alpha = 1/2$, откуда $\alpha = 150°$.

9. Мы должны сделать вывод, что второй шар содержит первый шар целиком и 5 есть просто отношение площади поверхности второго шара к площади поверхности первого и отношение радиусов (второго к первому) равно $\sqrt{5}$. Вот если бы данное в условии отношение было бы меньше четырёх, равнялось бы, например, трём, то задача не имела бы решения.

И. Ф. Шарыгин

Откуда берутся задачи?[1]

После некоторого размышления я решил начать эту статью с двух противоречащих друг другу высказываний, которыми следовало бы её завершить. Во-первых, не хотелось бы, чтобы каждый школьник, прочитавший эту статью, а таковые, надеюсь, найдутся, сразу кинулся сочинять собственные задачи. А во-вторых, я приглашаю всех желающих принять участие в конкурсе по составлению задач (в первую очередь, геометрических)[2]. Теперь к делу. Я хочу поделиться своим довольно большим опытом в деле составления различных геометрических задач, раскрыть некоторые секреты своей кухни, сформулировать эстетические и даже этические принципы. Начну с того, что задачи удобно разделить на три группы: учебные, конкурсные и олимпиадные. Можно говорить ещё и о творческих задачах, но это скорее подтекст, нежели формальный признак, характеристика «творческая» более относится не к самой задаче, а к процессу её решения. Впрочем, стоит всё же выделить в отдельную группу задачи «проблемного» типа. Существует определённый набор характерных технических приёмов, достаточно часто используемых при составлении тех или иных видов задач.

Перефразировка

Начну с примера.

З а д а ч а 1. Докажите, что для произвольного треугольника проекция диаметра описанной около него окружности, перпендикулярного одной стороне этого треугольника, на другую его сторону равна третьей стороне.

Р е ш е н и е. За этой изящной словесностью скрывается широкоизвестный факт, сопутствующий теореме синусов: $a = 2R\sin A$. (Здесь

[1] Впервые опубликовано в «Кванте» № 8, 9, 1991.

[2] Хотя с момента написания статьи прошло более 15 лет, это приглашение остаётся в силе. Задачи можно присылать по электронной почте (адрес `geom_olymp@isa.ru`).

и далее a, b, c — стороны треугольника, A, B, C — противоположные им вершины, h_a, h_b, h_c — высоты к соответствующим сторонам, R — радиус описанной окружности.) Формулировка этой задачи литературно настолько привлекательна, что перед её чарами не устояли даже видавшие виды руководители «Задачника „Кванта“», включившие её в свой задачник. Задача эта скорее учебная, чем олимпиадная. Её смысл — показать известный факт с новой, неожиданной точки зрения.

Весьма распространённым является приём, который можно назвать «замена опорной фигуры». Я, как ведущий раздела «Задачи» в журнале «Математика в школе», нередко прибегаю к нему, если мне не хватает для этого раздела какой-либо не очень трудной задачи (подобные задачи обычно даются без авторской подписи). Такие задачи встречаются довольно часто. Вот пример с XXIV Всесоюзной олимпиады по математике (1990).

Широко и давно известна следующая теорема.

Теорема. *Если на прямых AB, BC и CA взяты произвольно точки C', A' и B' соответственно, отличные от вершин треугольника ABC, то окружности, проходящие через A, B', C'; A', B, C' и A', B', C имеют общую точку.* (Иногда эту теорему называют теоремой Микеля, а общую точку пересечения окружностей обозначают через M и называют точкой Микеля.) Доказывается эта теорема в общем-то несложно. Единственная трудность, если не прибегать к ориентированным углам, состоит в необходимости перебора различных случаев взаимного расположения точек A', B' и C'. В ситуации, изображённой на рис. 1, обозначив через M точку пересечения окружностей $AB'C'$ и $A'BC'$, легко покажем, что точки A', B', C, M лежат на одной окружности.

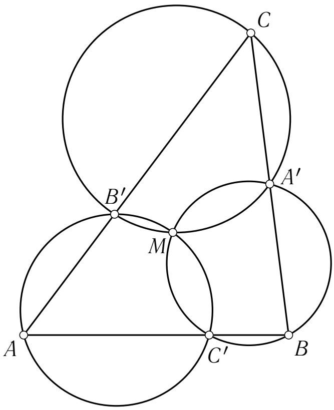


Рис. 1

А вот задача Всесоюзной олимпиады.

Задача 2. На стороне AB выпуклого четырёхугольника $ABCD$ взята точка E, отличная от точек A и B. Отрезки AC и DE пересекаются в точке F. Докажите, что окружности, описанные около треугольников ABC, CDF и BDE, имеют общую точку.

Решение. Присмотревшись к рис. 2 и вдумавшись в условие, мы без труда заметим, что задача 2 совпадает с теоремой, если указанную

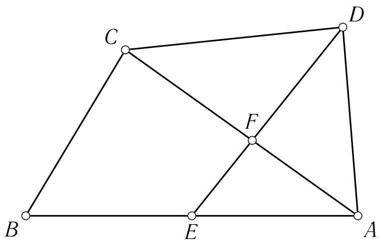


Рис. 2

в ней конфигурацию привязать к треугольнику AEF (переобозначив при этом буквы $E \to B$, $B \to C'$, $F \to C$, $C \to B'$, $D \to A'$). Конечно, формулировка задачи 2 менее естественна, а следовательно, менее эстетична, чем формулировка теоремы. Возможно, что я и ошибся в своих предположениях и неверно «вычислил» происхождение этой задачи 2. Ну что ж, тем хуже для организаторов олимпиады.

Очень красивые и эффектные задачи могут возникать при переводе геометрической задачи с геометрического языка на алгебраический. Например, возьмём известную задачу на построение треугольника по трём высотам (можете ли вы решить эту задачу?). Идея состоит в том, что треугольник со сторонами a, b, c подобен треугольнику со сторонами $1/h_a$, $1/h_b$, $1/h_c$ по третьему признаку подобия треугольников. Пусть теперь высоты треугольника равны a, b, c, а его стороны x, y, z. Если этот треугольник остроугольный, легко получаем систему уравнений для x, y, z. Итак, имеем задачу (рис. 3).

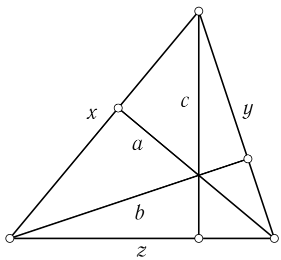


Рис. 3

З а д а ч а 3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - c^2} + \sqrt{y^2 - c^2} = z, \\ \sqrt{y^2 - a^2} + \sqrt{z^2 - a^2} = x, \\ \sqrt{z^2 - b^2} + \sqrt{x^2 - b^2} = y. \end{cases}$$

Зная происхождение этой системы, мы без труда найдём условие, при котором она совместна (остроугольность треугольника со сторонами $1/a$, $1/b$, $1/c$), а затем и решим саму систему. (Докажите при этом, что система, как и задача на построение, не может иметь более одного решения.)

К этому же разделу, хотя и с некоторой натяжкой, можно отнести изменение формулировки, связанное с переходом от прямого утверждения к обратному. (Стоит заметить, что границы между типами задач весьма размыты, условны. Одна и та же задача часто может служить иллюстрацией различных приёмов, тем более, что во многих случаях итоговая задача получается за счёт комбинации различных приёмов.) Здесь возможен широкий спектр различных случаев и разновидностей, поэтому я ограничусь одним примером, показывающим, как из тривиального по сути прямого утверждения получается вполне богатая геометрическим содержанием задача. Совершенно очевидно, что точка пересечения высот (точка H) остроугольного треугольника ABC обладает следующим свойством:

$$\angle HAB = \angle HCB, \quad \angle HBA = \angle HCA, \quad \angle HAC = \angle HBC.$$

В связи с этим вполне естественно возникает задача.

З а д а ч а 4. Найдите геометрическое место таких точек M, для которых имеют место равенства

$$\angle MAB = \angle MCB, \quad \angle MBA = \angle MCA,$$

где ABC — данный остроугольный треугольник.

Р е ш е н и е. Понятно, что искомому месту точек внутри треугольника принадлежит точка пересечения его высот. Кстати, здесь возникает отнюдь не тривиальная задача: единственна ли такая точка внутри треугольника? Мы докажем её единственность. Для этого продолжим AM,

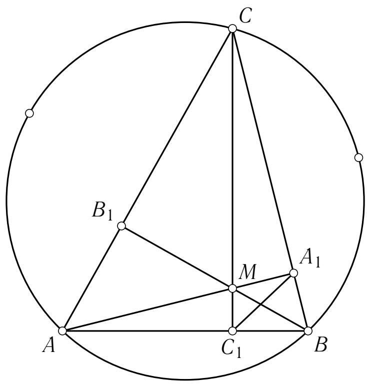


Рис. 4

BM и CM до пересечения со сторонами треугольника в точках A_1, B_1 и C_1 (рис. 4). Точки A, C, A_1 и C_1 лежат на одной окружности. Значит,

$$\angle MA_1C_1 = \angle MCA = \angle MBC_1 \quad \text{и} \quad \angle MAC = \angle MC_1A_1.$$

Таким образом, точки M, B, A_1 и C_1 также лежат на одной окружности и

$$\angle MBA_1 = \angle MC_1A_1 = \angle MAC.$$

Обозначив теперь $\alpha = \angle MCA$, $\beta = \angle MCB$ и $\gamma = \angle MAC$, найдём, что $\alpha + \beta + \gamma = \pi/2$, из чего следует, что AA_1, BB_1 и CC_1 — высоты нашего треугольника. Однако наше геометрическое место не исчерпывается одной точкой пересечения высот. В него входит также дуга AB описанной около ABC окружности, а также середины дуг BC и CA (докажите это).

Конструкции

Чаще всего в задачах этого типа «сооружается» некая геометрическая конструкция, в качестве деталей которой берутся некие фигуры и их элементы.

Иллюстрацией здесь могут служить стереометрические задачи-«монстры», встречающиеся на экзаменах в такие вузы, как МФТИ, мехмат и ВМК МГУ и некоторые другие. Я не буду приводить примеры подобных задач, тем более, что за ними не надо далеко ходить. Достаточно вспомнить стереометрические задачи из вариантов 1990 года, опубликованные в журнале «Квант», № 1 и 2 за 1990 и 1991 годы.

Усложнение геометрической конструкции почти наверняка приводит к многоходовости задачи, превращает её в своего рода задачу-«этажерку» (много полочек и на каждой своя задачка) или задачу-«матрёшку» (несколько задач, одна в другой).

Впрочем, такого рода задачи не обязательно должны иметь в основе сложную геометрическую конструкцию. Вот простой пример, составленный из двух (или из трёх) задач-«полочек».

Задача 5. Диагонали выпуклого четырёхугольника делят его на четыре треугольника. Докажите, что произведение площадей двух противоположных треугольников равно произведению площадей двух других треугольников.

Задача 6. Докажите, что из всех четырёхугольников, вписанных в данную окружность, наибольшую площадь имеет квадрат.

Решите задачи 5 и 6 самостоятельно, а мы из них сконструируем следующую задачу.

З а д а ч а 7. В окружность единичного радиуса вписан четырёхугольник $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке M. Найдите площадь S этого четырёхугольника, если известно, что произведение площадей треугольников ABM и CDM равно 1/4.

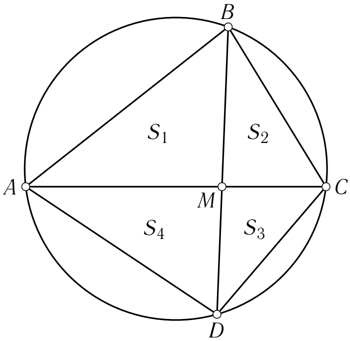


Рис. 5

Р е ш е н и е. Чтобы решить эту задачу, достаточно заметить (рис. 5), что

$$S_1S_3 = S_2S_4 = \frac{1}{4}$$

(задача 5), а также, что

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \geqslant \\ \geqslant 2\sqrt{S_1S_3} + 2\sqrt{S_2S_4} = 2$$

(неравенство о среднем арифметическом).

Кроме того (задача 6), $S \leqslant 2$ так как площадь квадрата, вписанного в единичную окружность, равна 2. Из всего этого следует, что $ABCD$ — квадрат и его площадь 2.

Иногда целью конструкции является маскировка основной идеи или, говоря шахматным языком, добавление вступительной игры. Обычно это приводит к появлению в условии лишних деталей, мало и даже вовсе не работающих в решении, что, конечно же, снижает эстетический уровень задачи («Каждое ружьё должно стрелять!»). В качестве примера, возможно не очень убедительного, поскольку мой анализ основывается на личных домыслах, вновь возьму задачу с XXIV Всесоюзной олимпиады.

З а д а ч а 8. На сторонах A_1A_2 и A_2A_3 правильного $2n$-угольника $A_1A_2\ldots A_{2n}$ взяты точки K и N соответственно так, что

$$\angle KA_{n+2}N = \frac{\pi}{2n}.$$

Докажите, что NA_{n+2} — биссектриса угла KNA_3.

Р е ш е н и е. Вся суть задачи в следующем. Возьмём произвольный треугольник ABC и проведём в нём биссектрису угла B и биссектрисы углов, смежных с углами A и C (рис. 6). Эти три прямые, как известно, пересекаются в одной точке — центре вневписанной окружности треугольника ABC. (Если вы этого не знаете, докажите самостоятельно. Рассуждение полностью аналогично доказательству того, что биссектрисы внутренних углов треугольника пересекаются в одной точке.) Обозначим эту точку через P. Нетрудно доказать, что $\angle APC$ равен $90° - (1/2)\angle B$. Верно и обратное утверждение: если на биссектрисе угла B вне треугольника ABC взята точка P такая, что

$$\angle APC = 90° - \frac{1}{2}\angle B,$$

то AP и CP будут являться биссектрисами внешних углов этого треугольника. (Докажите.) Вот и всё. Именно в этом суть ситуации, описанной в условии задачи 8. (Роль треугольника ABC играет треугольник KA_2N, вместо точки P — вершина A_{n+2}.) Весь антураж в виде правильного $2n$-угольника нужен лишь для того, «чтобы вы не догадались».

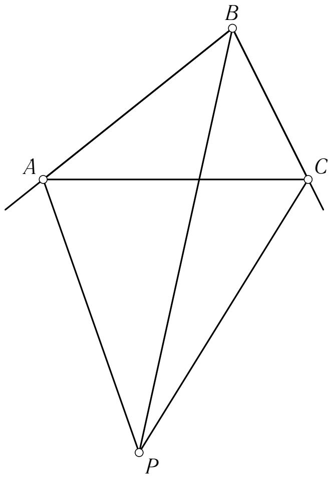


Рис. 6

Многие задачи конструируются авторами под понравившуюся им идею решения. Правда, довольно часто «решатели» находят другие, отличные от авторского, иногда более простые решения.

В связи с задачей 8 хочу в качестве примера взять одну из своих задач. Мне захотелось сконструировать задачу, в которой рассуждение о том, что три биссектрисы пересекаются в одной точке, а вернее, что через точку пересечения двух биссектрис углов некоего треугольника (не обязательно внутренних, см. рис. 6) проходит третья, повторялось бы дважды, причём второй этап существенно опирался бы на первый. Получившуюся задачу нельзя назвать очень удачной, поскольку идея была реализована на известной конструкции, но всё же...

Задача 9. В треугольнике ABC $\angle B$ равен $120°$. На стороне AC взята точка M, а на прямой AB точка K так, что BM — биссектриса угла ABC, а CK — биссектриса угла, смежного с ACB. Отрезок MK пересекает сторону BC в точке P. Докажите, что $\angle APM = 30°$.

Решение. Вот это двухходовое рассуждение. Для треугольника BMC отрезки BK и CK — биссектрисы внешних углов B и C (рис. 7). Следовательно, MP — биссектриса угла BMC, а P — точка пересечения биссектрис углов, внешних к углам B и M треугольника ABM. Значит, AP — биссектриса угла BAC.

Окончательно получаем

$$\angle APM = \angle PMC - \angle PAM = \frac{1}{2}(\angle BMC - \angle BAM) = 30°.$$

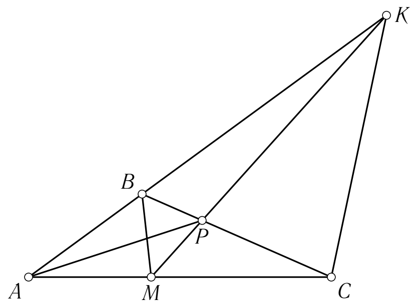


Рис. 7

Ну и наконец, задачу можно конструировать «под ответ» (так часто поступают в учебных задачах) или, более широко, «под результат». Хочу в качестве примера привести одну задачу-ловушку (весьма редко встречающийся тип задач), в которой специально подобранные числовые данные задают непривычную геометрическую ситуацию. Несмотря на определённые недостатки (пришлось прибегнуть к маленькой хитрости в формулировке условия), задача эта мне весьма дорога. Правда, её нельзя отнести ни к олимпиадным — не принято давать на олимпиадах задачи с числовыми данными, ни к конкурсным задачам — попасться в ловушку могут даже самые сильные, а это не соответствует идее конкурса. Скорее, это всё же учебная задача с воспитательным оттенком.

З а д а ч а 10. В основании четырёхугольной пирамиды лежит выпуклый четырёхугольник, две стороны которого равны 6, а две оставшиеся 10, высота пирамиды равна 7, боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 60°. Найдите объём пирамиды.

Р е ш е н и е. Из условия следует, что двугранные углы при основании равны или 60° или 120° (но не обязательно только 60°, именно в этом небольшая тонкость в формулировке!), а вершина пирамиды проектируется в точку, равноудалённую от сторон, а вернее, от прямых, образующих четырёхугольник. Из последнего следует, что четырёхугольник в основании не может быть параллелограммом. Две соседние его стороны равны 6, две другие, также соседние, равны 10. Но если у четырёхугольника $ABCD$ имеет место

$$AB = BC(= 10), \quad AD = DC(= 6),$$

то для него есть две точки O_1 и O_2, равноудалённые от его сторон (рис. 8). Из условия следует, что расстояния от проекции вершины пирамиды до её сторон равны $7/\sqrt{3}$. Если вершина проектируется в точку O_1 — центр вписанной в $ABCD$ окружности, то площадь $ABCD$ должна быть равной $16 \cdot \frac{7}{\sqrt{3}}$. Но площадь $ABCD$ не превосходит 60 (она равна 60, если углы A и C прямые), а $16 \cdot \frac{7}{\sqrt{3}} > 60$. Значит, вершина проектируется в точку O_2, расстояния от которой до прямых, образующих четырёхугольник $ABCD$, равны $7/\sqrt{3}$. Теперь легко найдём

$$S_{ABCD} = (10 - 6)\frac{7}{\sqrt{3}},$$

а затем и объём пирамиды

$$V = \frac{196}{3\sqrt{3}}.$$

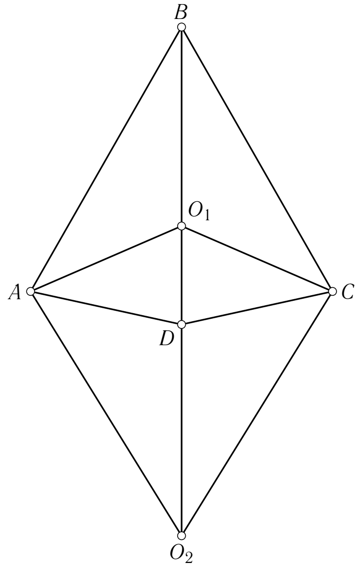


Рис. 8

Частный случай

Многие общие теоремы, вооружающие нас мощным средством решения задач, такие как теорема Чевы в геометрии или неравенства о средних в алгебре, могут выступать и в качестве инструмента составления задач. Возьмём, например, теорему Паскаля. Если A, B, C, D, E и F — шесть точек, расположенных на окружности, то три точки, в которых пересекаются попарно прямые AB и DE, BC и EF, FA и CD, расположены на одной прямой. Рассмотрим также задачу.

З а д а ч а 11. Пусть $ABCD$ — вписанный четырёхугольник, прямые AB и CD пересекаются в точке M, а прямые BC и AD — в точке K. Докажите, что касательные к окружности в точках B и D пересекаются на прямой KM.

Не надо обладать большой наблюдательностью, чтобы заметить, что эта задача является частным, а вернее, предельным случаем теоремы Паскаля.

Профессиональные математики, занимающиеся также и организацией математических олимпиад, нередко черпают красивые и интересные задачи из своей научной деятельности, перенося на школьную почву частные случаи серьёзных математических теорем, приспосабливая к ней те или иные леммы, в большом числе возникающие при доказательстве почти любой серьёзной математической теоремы. Правда, в геометрии такие примеры не слишком часты, серьёзная математика всё же очень далека от школьной геометрии. (Эту фразу ни в коем случае нельзя рассматривать как упрёк геометрии.) Поэтому я ограничусь одним примером, возможно, не очень ярким и характерным.

Есть такая теорема «о зигзаге». Даны две окружности (возможно, в пространстве). Известно, что существует набор из $2n$ точек $A_1, \ldots, A_{2n}$ таких, что точки с нечётными номерами расположены на одной окружности, точки с чётными номерами — на другой и

$$A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots = A_{2n}A_1.$$

Тогда таких наборов из $2n$ точек существует бесконечно много, причём в качестве точки A_1 можно взять любую точку первой окружности, а расстояние между последовательными точками будет таким же, как у исходного набора точек.

Я не знаю элементарного доказательства этой теоремы. Однако её частные случаи вполне можно использовать в качестве элементарных задач. Рассмотрим, например, следующую задачу.

Задача 12. На плоскости даны две окружности с радиусами R и r и расстоянием между центрами a. Найдите сторону ромба, две противоположные вершины которого лежат на одной окружности, а две оставшиеся на другой.

Задача эта достаточно проста, поэтому я ограничусь лишь указанием ответа: $\sqrt{R^2 + r^2 - a^2}$.

Варьирование условий

Простейший пример, достаточно точно иллюстрирующий этот приём, даёт такая серия задач: построить треугольник по а) трём сторонам; б) трём медианам; в) трём высотам; г) трём биссектрисам. На этом примере видно, сколь сильно может меняться уровень сложности при подобном варьировании условия. В нашей четвёрке за совершенно элементарной первой задачей следует вполне содержательная, не очень, правда, сложная задача. Третья задача уже существенно сложнее, а четвёртая — и вовсе не решается при помощи циркуля и линейки.

Любопытную идею, с помощью которой можно создавать серии задач, предложил киевский учитель математики В. Куценок. Возьмём какое-нибудь геометрическое соотношение, допустим, равенство $ah_a = bh_b$, и зададимся вопросом: каковы свойства треугольника, для которого выполняется соотношение, получающееся из рассматриваемого заменой высот на медианы или биссектрисы? В результате можно получить такую задачу.

Задача 13. На плоскости даны две точки A и B. Найдите геометрическое место точек плоскости C таких, что для треугольника ABC имеет место равенство:

а) $am_a = bm_b$ (m_a и m_b — медианы треугольника ABC);

б) $al_a = bl_b$, (l_a, l_b — биссектрисы треугольника ABC).

Решение в обоих пунктах весьма сходно. Рассмотрим пункт а).

Пусть AA_1 и BB_1 — высоты треугольника, AA_0 и BB_0 — медианы. Из условия следует подобие треугольников AA_0A_1 и BB_0B_1. Возможны два случая расположения точек A_1, A_0, B_1, B_0 на сторонах треугольника ABC, изображённые на рис. 9. В первом случае точки A, B, A_0 и B_0 расположены на одной окружности. Из этого ввиду параллельности A_0B_0 и AB следует равнобокость трапеции AB_0A_0B, а значит, равенство $AC = BC$. Во втором случае на одной окружности оказываются точки C, M, A_0, B_0. Во вписанном четырёхугольнике CA_0MB_0 диагональ A_0B_0 есть половина AB и делится диагональю CM пополам. Диагональ CM есть $(2/3)m_c$ и делится диагональю A_0B_0 в отношении $3:1$. Из равенства произведений отрезков диагоналей найдём

$$m_c^2 = \frac{3}{4}AB^2.$$

Таким образом, искомое геометрическое место точек состоит из серединного перпендикуляра к отрезку AB и окружности с центром в середине AB и радиусом $(AB\sqrt{3})/2$.

В пункте б) точка расположена также или на серединном перпендикуляре к AB, или на дуге окружности, из точек которой AB виден под углом $60°$.

Вообще, при варьировании условий задачи могут возникать любопытные серии. Приведу пример двух таких серий (не стремясь к их полноте).

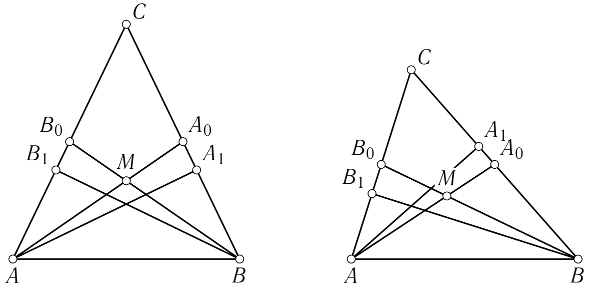


Рис. 9

Известна классическая теорема, утверждающая, что из равенства двух внутренних биссектрис треугольника следует его равнобедренность (теорема Штейнера—Лемуса). Само по себе утверждение этой теоремы вполне естественно и ожидаемо, если бы не трудности, с которыми приходится сталкиваться при её доказательстве, в отличие от родственных тривиальных теорем, касающихся медиан или высот. Уже здесь виден скверный нрав биссектрис. Но в полной мере он проявляется в следующей задаче.

Задача 14. Будет ли равнобедренным треугольник ABC, если у него:

а) равны биссектрисы внешних углов A и B,

б) равны отрезки KA_1 и KB_1, где AA_1 и BB_1 — биссектрисы внутренних углов треугольника, а K — их точка пересечения,

в) равны расстояния от точки C_1 (CC_1 — биссектриса угла C) до середин сторон CA и CB,

г) имеет место равенство $C_1A_1 = C_1B_1$,

д) окружность, проходящая через точки A_1, B_1 и C_1 касается стороны AB данного треугольника?

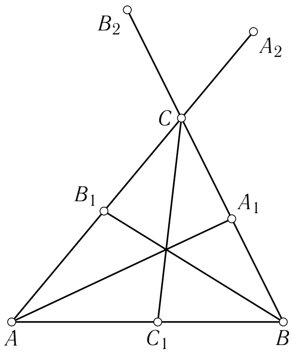


Рис. 10

Во всех пяти пунктах ответ отрицательный. Наиболее нетривиально это получается в пунктах г) и д).

Ограничусь рассмотрением последнего пункта, о котором я узнал лишь недавно из фольклорных источников. При этом я покажу только, как можно построить пример неравнобедренного треугольника, удовлетворяющего условию, не объясняя, как до этого можно додуматься.

Пусть AA_1, BB_1 и CC_1 — биссектрисы треугольника ABC (рис. 10). Возьмём на продолжениях сторон AC и BC точки A_2 и B_2 так, что $CA_2 = CA_1$, $CB_2 = CB_1$. Понятно, что точки A_1, A_2, B_1 и B_2 расположены на одной окружности. Если при этом окажется, что AC_1 и BC_1 равны касательным, проведённым из A и B к этой окружности, то она касается AB в точке C_1. (Если длина отрезка равна сумме касательных, проведённых из его концов к окружности, то этот отрезок касается окружности. Докажите это самостоятельно.) Следовательно, должны выполняться равенства:

$$AC_1^2 = AB_1 \cdot AA_2, \quad BC_1^2 = BA_1 \cdot BB_2.$$

Выражая отрезки сторон треугольника ABC через стороны ($AB_1 = bc/(c+a)$ и т. д.), убедимся, что каждое из этих двух равенств эквивалентно соотношению

$$(a+b+c)(a+b)^2 = c(c+a)(c+b).$$

Остаётся убедиться, что существует неравнобедренный треугольник, стороны которого удовлетворяют этому соотношению. Нетрудно найти конкретный числовой пример. Пусть $c = 1$, $a + b = 1 + \lambda$. Тогда получим $ab = \lambda(2+\lambda)^2$. Если λ достаточно мало, то можно найти a и b, при этом $a \neq b$.

Ещё одна интересная серия задач связана с условием равногранности тетраэдра. Напомним, что тетраэдр (произвольная треугольная пирамида) называется равногранным, если все его грани — равные между собой треугольники. Известен целый ряд условий, необходимых и достаточных для того, чтобы тетраэдр был равногранным. Не стремясь к полноте, а тем более к рекорду, сформулирую следующую многопунктовую задачу.

Задача 15. Какие из следующих условий являются необходимыми и достаточными для того, чтобы тетраэдр $ABCD$ был равногранным:

а) противоположные рёбра попарно равны,

б) периметры всех граней равны между собой,

в) суммы плоских углов при трёх вершинах равны 180°,

г) выполняются равенства $\angle BAD = \angle BCD = \angle ABC = \angle ADC$,

д) выполняются равенства $\angle BAC = \angle BDC$, $\angle ABD = \angle ACD$, $\angle BAD = \angle BCD$,

е) все грани имеют равные радиусы описанных окружностей,

ж) все грани имеют равные радиусы вписанных окружностей,

з) все грани имеют равные площади,

и) отрезки, соединяющие середины противоположных рёбер, перпендикулярны,

к) центр описанной сферы совпадает с центром масс тетраэдра,

л) центр вписанной сферы совпадает с центром масс тетраэдра,

м) центры вписанной и описанной сфер совпадают,

н) сумма косинусов двугранных углов равна 2,

о) на описанной около тетраэдра сфере расположены центры четырёх шаров, каждый из которых касается одной грани во внутренней точке и плоскостей трёх других граней?

Уф!.. Пожалуй, достаточно. В принципе, подобных условий можно выписать несколько десятков, особенно если учесть, что некоторые из них можно смешивать. Так, например, первые 8 условий записываются в виде трёх равенств, и мы имеем возможность выписывать новые условия беря, скажем, одно равенство из пункта а) (равны два противоположных рёбра) и два равенства из пункта в) (суммы плоских углов при двух вершинах равны 180°).

В данной задаче почти все условия являются необходимыми и достаточными, чтобы тетраэдр был равногранным. Вы уже, наверное, догадались, что исключением скорее всего является пункт ж) — опять биссектрисы безобразничают. Так оно и есть. Попробуйте сами построить пример тетраэдра с неравными гранями, но с равными радиусами вписанных в них окружностей. В качестве граней можно взять две пары неравных равнобедренных треугольников, имеющих нужное свойство.

Весьма нетривиально доказывается пункт о). Во всяком случае, достаточно элементарного доказательства я не знаю.

Кстати, пункт д) возник уже в процессе работы над статьёй. Здесь интересно, что существенной является «пространственность» тетраэдра. Если A, B, C и D в одной плоскости, этого недостаточно для равенства треугольников.

Обобщение

Всё развитие математики представляет собой путь постоянных обобщений. Конечно, при использовании этого приёма для получения новых элементарных задач мы, как правило, на многое не претендуем, но тем не менее помнить и понимать его значение необходимо.

Обобщение может идти по различным направлениям. Иногда оказывается возможным в рассматриваемой задаче снять некоторые ограничения и распространить соответствующее утверждение на более широкое множество объектов. Так, однажды в старом математическом журнале я встретил следующую задачу.

Задача 16. Во вписанном четырёхугольнике $ABCD$ сторона AD является диаметром окружности, а биссектрисы углов B и C пересекаются на AD. Докажите, что имеет место равенство $AB + CD = AD$.

Решение этой задачи, приведённое в журнале, мне не понравилось. После некоторого размышления удалось найти другое решение, в котором никак не использовалось то, что AD — диаметр окружности. Это условие оказалось лишним. В результате возникла вполне новая задача.

Задача 16′. Докажите, что если биссектрисы углов B и C вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются на стороне AD, то $AD = AB + CD$.

Суть упомянутого мною решения (есть много других) состоит в следующем. Возьмём точку P на AD, в которой пересекаются биссектрисы углов B и C. Опишем около BCP окружность и обозначим через M вторую точку пересечения этой окружности с AD. Тогда, учитывая равенства соответствующих углов вписанных четырёхугольников $ABCD$ и $BCPM$, докажем равнобедренность треугольников ABM ($AB = AM$) и CDM ($CD = DM$). Проделайте эти рассуждения самостоятельно.

Из этого примера также видно, сколь полезно при решении задачи не ограничиваться одним методом, рассматривать различные пути решения, уделяя особое внимание более геометричным, поскольку они глубже вскрывают внутренние свойства фигур, позволяют отделить главное от второстепенного. В связи с этим ещё один, более свежий пример. На Всероссийской олимпиаде в 1990 году (см.: «Квант» № 10, 1990) была предложена следующая задача.

Задача 17. Точки D и E лежат на сторонах AB и BC треугольника ABC. Точки K и M делят отрезок DE на три равные части. Прямые BK и BM пересекают сторону AC в точках T и P. Докажите, что

$$TP \leqslant \frac{1}{3}AC.$$

Уже сама формулировка вызвала у меня лёгкое чувство протеста. Слишком громоздко, много буквенных обозначений, без которых вполне можно было обойтись. Также не удовлетворило меня и решение этой задачи, приведённое в журнале. Оно в некоторой мере противоречило выработанным мною принципам, выглядело неестественным (для меня). Найдя устраивающее меня решение, я сумел также и несколько переформулировать эту задачу, сделать её более общей.

Задача 17′. Из вершины угла выходят два луча, расположенные внутри угла. Некоторая прямая пересекает стороны угла в точках D и E, а лучи в точках K и M. Докажите, что отношение $\frac{KM}{DE}$ будет наибольшим, если $DK = ME$.

Для доказательства рассмотрим какую-то другую прямую, причём можно считать, что она проходит через E и пересекает другую сторону и лучи в точках D_1, K_1 и M_1 (рис. 11). Положим $DK = ME = a$, $KM = b$, $OD_1 = \lambda OD$. Проведя через D_1 прямую параллельно DE, будем иметь:

$$D_1K_2 = \lambda a, \quad K_2M_2 = \lambda b, \quad \frac{D_1M_1}{M_1E} = \frac{\lambda(a+b)}{a},$$

$$D_1M_1 = \frac{\lambda(a+b)}{\lambda(a+b)+a} \cdot D_1E, \quad D_1K_1 = \frac{\lambda a}{\lambda a + b + a} \cdot D_1E,$$

$$K_1M_1 = \left(\frac{\lambda(a+b)}{\lambda(a+b)+a} - \frac{\lambda a}{\lambda a + b + a}\right) D_1E.$$

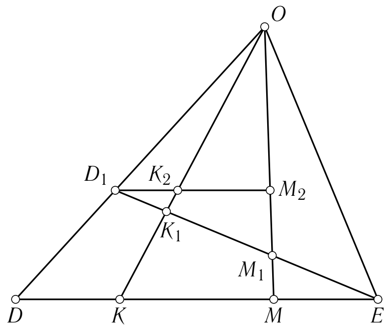


Рис. 11

Окончательно задача сводится к доказательству несложного алгебраического неравенства

$$\frac{\lambda(b^2+2ab)}{(\lambda(a+b)+a)(\lambda a+a+b)} \leqslant \frac{b}{2a+b},$$

которое преобразуется к виду

$$(\lambda-1)^2 a(a+b) \geqslant 0.$$

Другим возможным направлением обобщения является перенос некоего геометрического факта с одних объектов на другие, в частности, выход из плоскости в пространство. Так возникла следующая задача.

Задача 18. К двум сферам проведены две касательные AB и CD, A и C на поверхности одной сферы, B и D — на другой. Докажите, что проекции AC и BD на прямую, проходящую через центры сфер, равны.

В плоском варианте эта задача вполне проста. Да и в пространстве она не слишком сложна. (Всё следует из того, что середины общих касательных к двум сферам лежат в одной плоскости, перпендикулярной линии центров. Докажите это утверждение.) Здесь, на мой взгляд, интереснее то обстоятельство, что пространственный аналог планиметрического утверждения остаётся верным. Такое случается не слишком часто. Нередко смысл пространственного обобщения состоит в построении опровергающего примера. Так простейшее в планиметрии утверждение: основание хотя бы одной высоты треугольника лежит на соответствующей стороне, а не на её продолжении, в пространственном исполнении трансформируется в вопрос.

Задача 19. Верно ли, что для любого тетраэдра основание хотя бы одной высоты принадлежит соответствующей грани этого тетраэдра?

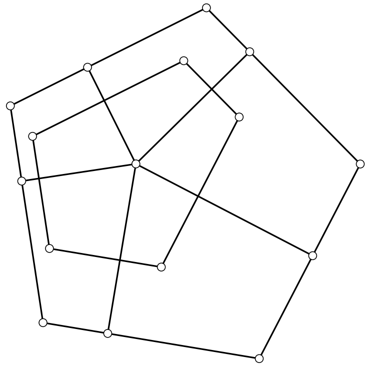


Рис. 12

Ответ на этот вопрос отрицательный. Контрпримером является тетраэдр, у которого два двугранных угла, соответствующие двум скрещивающимся рёбрам, являются тупыми.

Нередко одна и та же задача может обобщаться в различных направлениях, порождать целые обобщающие серии. Возьмём широкоизвестную теорему: *сумма расстояний от произвольной точки внутри правильного треугольника до его сторон постоянна*. (Для тех, кто не знаком с этой задачей, обозначим доказательство. Площадь рассматриваемого правильного треугольника равна сумме площадей трёх треугольников, основания которых — стороны правильного треугольника, и общая вершина — какая-то точка внутри этого треугольника. И т. д.)

Утверждение этой теоремы очевидно обобщается на произвольный выпуклый равносторонний многоугольник. Менее очевидно, что она обобщается и на равноугольный многоугольник. В самом деле, пусть $A_1A_2\ldots A_n$ — равноугольный многоугольник (рис. 12, $n = 5$). Рассмотрим правильный n-угольник $A'_1A'_2\ldots A'_n$ со сторонами, параллельными сторонам исходного n-угольника, и содержащий его. Для любой точки M внутри $A_1\ldots A_n$ сумма расстояний до сторон $A'_1\ldots A'_n$ постоянна. Но расстояние до какой-то стороны исходного n-угольника меньше, чем расстояние до параллельной ей стороны второго правильного n-угольника на постоянную величину. Значит, и вся сумма расстояний от M до сторон $A_1\ldots A_n$ отличается от суммы расстояний от M до сторон $A'_1\ldots A'_n$ на постоянную величину, т. е. и сама является постоянной.

Можно сделать и ещё один шаг обобщения, объединяющий два предыдущих (равносторонность и равноугольность). В итоге можно сформулировать следующую теорему.

З а д а ч а 20. На плоскости даны n различных единичных векторов, сумма которых равна нулю. Рассмотрим выпуклый n-угольник, стороны которого перпендикулярны соответствующим векторам. Тогда для всех внутренних точек этого n-угольника сумма расстояний до его сторон одна и та же.

Возможны и другие пути обобщения исходной теоремы про правильный треугольник. Например, выход в пространство. Кстати, возникает вопрос, верна ли в пространстве теорема-задача 20, вернее, её аналог?

Открытия и проблемы

Предыдущие примеры иллюстрировали те или иные технические приёмы. И всё же главный источник новых задач — это любознательность, стремление всякий раз докопаться до существа дела, умение увидеть привычное с неожиданной точки зрения. Вот тогда-то и появляются самые интересные геометрические задачи, задачи-открытия. К этой категории задач, на мой взгляд, относится одна из наиболее симпатичных олимпиадных задач последних лет.

З а д а ч а 21. Можно ли из деревянного единичного куба выпилить три правильных тетраэдра с единичным ребром?

Задача эта предлагалась на Всероссийской олимпиаде в 1989 году. Здесь интересно то, что во многих олимпиадных сборниках обсуждалась задача о выпиливании из единичного куба двух тетраэдров. А оказывается, можно выпилить целых три! (Возьмём три попарно скрещивающиеся рёбра куба. Каждое из них будет ребром одного тетраэдра. Середины противоположных рёбер каждого тетраэдра совпадают с центром куба. Докажите теперь, что эти тетраэдры более не имеют общих точек.)

Конечно, вовсе не обязательно красивый факт, обнаруженный лично вами, окажется открытием и для всего человечества. Это не так уж и страшно, тем более что многие старые геометрические теоремы являются откровением для признанных геометрических экспертов. Многое, слишком многое из тысячелетней геометрической культуры утеряно.

Одним из своих любимых геометрических открытий я считаю следующую задачу.

З а д а ч а 22. Какое наибольшее число прямых можно провести через какую-то точку в пространстве так, чтобы все попарные углы между ними были бы равны?

О т в е т: 6. При этом я прекрасно понимаю, что наверняка этот факт был известен в глубокой древности, например, Архимеду. То, что таких прямых не может быть более шести, несложно доказать. В самом деле, пусть l_1 и l_2 — две прямые нашего семейства, проходящие через точку O.

Тогда все оставшиеся прямые должны принадлежать пересечению двух конических поверхностей: осью одной из них является прямая l_1, а прямая l_2 является одной из образующих; для второй — наоборот, l_2 — ось, l_1 — образующая. Такие две конические поверхности пересекаются не более чем по четырём прямым.

Примером шестёрки прямых, обладающих нужным свойством, могут служить диагонали икосаэдра — правильного двадцатигранника (двенадцативершинника). Если вы плохо представляете себе икосаэдр, то можете построить нужный пример следующим образом. Возьмём шесть векторов: $(a, \pm b, 0)$; $(\pm b, 0, a)$; $(0, a, \pm b)$ в качестве направляющих векторов наших прямых. Поскольку все вектора имеют одну и ту же длину, то должны быть равными абсолютные величины всех попарных скалярных произведений. Считая, что $a \geqslant b \geqslant 0$, приходим к равенству $a^2 - ab - b^2 = 0$. Можно взять

$$b = 1, \quad a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

В геометрии, как наверное ни в одном предмете, короток путь от учебной задачи к нерешённой проблеме. В конце концов, не так уж сильно разнятся по постановке задачи: «найти наименьшее значение площади треугольника, содержащего единичную окружность» и «найти фигуру наименьшей площади, которой можно покрыть любую плоскую фигуру диаметра 1». Но если первая — простая школьная задача, то вторая — до сих пор не решённая проблема Лебега о минимальной «покрышке». Но для того, чтобы сформулировать подобную содержательную проблему, надо обладать хорошей математической культурой и вкусом. Не следует забывать пословицу, утверждающую, что один дурак может задать столько вопросов, что и сотня мудрецов не ответит.

В отличие от других математических дисциплин в геометрии возможен эксперимент в прямом, физическом смысле этого слова. Многие геометрические открытия древности явились следствием наблюдений и эксперимента. Очень возможно, что известный современный геометр Коннели, построивший деформирующийся многогранник (многогранник, который может деформироваться так, что каждая из его граней остаётся неизменной), в процессе своей работы много экспериментировал — склеивал или как-то иначе создавал пространственные модели. Многогранник Коннели разрешил одну из старейших математических проблем, а то обстоятельство, что решение этой проблемы оказалось вполне элементарным и полностью было опубликовано в журнале «Квант» (№ 9, 1978), учитывая уровень развития современной математики, кажется фантастическим. Такое возможно только в геометрии, и то крайне редко.

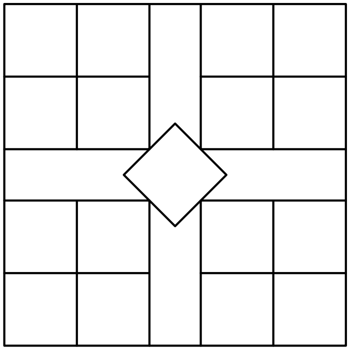


Рис. 13

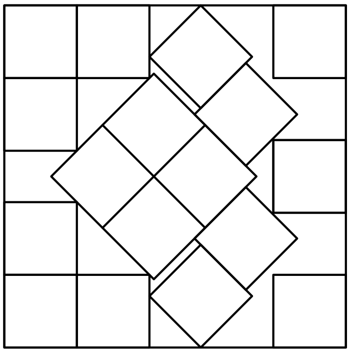


Рис. 14

Здесь я хочу привести пример другого «маленького» открытия, сделанного экспериментальным путём. В элементарной геометрии есть следующая проблема: какое наибольшее число единичных квадратов можно вырезать из квадрата со стороной $4 + \alpha$ где $0 < \alpha < 1$? Этой проблемой занимались многие крупные геометры, в частности, известный венгерский геометр Эрдёш. Она послужила поводом дать в журнале «Математика в школе» ради эксперимента, хотя и в ином смысле, следующую задачу.

Известно, что из квадрата со стороной $4 + \alpha$ *можно вырезать* 17 *единичных квадратов. Указать как можно меньшее* α, *при котором это можно сделать.*

Возможно, эта задача выглядит не очень красиво, но всё же некоторый смысл в ней есть. Понятно, что никто не рассчитывал на то, что читатели найдут наименьшее такое α. Большинство читателей прислали расположение, изображённое на рис. 13, для которого $\alpha = \sqrt{2}/2$.

Неожиданностью оказалось письмо от участников математической секции «Горизонт» при школе № 51 города Киева (руководитель Б. Н. Школьник). В письме было сказано, что, проделав соответствующий эксперимент (!), члены секции пришли к заключению, что наименьшее α достигается для расположения, указанного на рис. 14. (Проверьте самостоятельно, что для такого расположения α на несколько сотых меньше, чем для рис. 13).

Не зная описания эксперимента, трудно судить о справедливости этого утверждения. Кроме того, математическое воспитание не позволяет с полным удовлетворением воспринять подобное «доказательство». (А собственно, почему?) Очень возможно, что указанное расположение и в самом деле является оптимальным для нашего частного случая. Но самое главное, эта задача показывает, что геометрические открытия доступны буквально любому школьнику, а не только начинающим математическим гениям. Дерзайте! Да сопутствует вам успех!

Л. Н. Ерганжиева

Геометр

Мне посчастливилось в конце восьмидесятых годов быть одной из первых аспиранток И. Ф. Шарыгина, и знакомство с этим выдающимся учёным коренным образом изменило моё отношение и к геометрии, и к преподаванию этого учебного предмета в школе.

В то время Игоря Фёдоровича заинтересовало сообщение об открытии американскими неврологами функциональной асимметрии головного мозга. Считая, что вся система образования строится с опорой на работу левого полушария и апеллирует к словесно-логической составляющей мышления, тогда как геометрическая интуиция наиболее развита у так называемых правополушарных людей, он предложил мне подумать над введением в школьную программу особого курса образной, наглядной геометрии. Этот курс должен был основываться на предметной деятельности учащихся, опираться на их жизненный опыт и пространственные представления, полученные из ближайшей природной и социальной среды, вовлекать в работу преимущественно наглядно-образное мышление, развивая и обогащая его.

Работа оказалась настолько увлекательной, что полностью меня захватила, и «ощущение потока» не покидало меня все три аспирантских года. Вникая в проблему, мне пришлось изучать не только и не столько педагогическую литературу, сколько работы по психологии и физиологии, и я благодарна своему научному руководителю за то, что он не ограничивал мои поиски рамками методики. Будучи человеком широкой эрудиции, полным всевозможных идей, он с интересом относился к моим наработкам, а выслушав, продолжал: «Я вот тут интересную задачку придумал...» И эти моменты общения с Геометром находятся в копилке драгоценностей моей жизни.

«Наглядная геометрия» — появившееся в результате нашей работы учебное пособие для учащихся 5–6 классов — получила широкое одобрение учителей математики. После экспериментального преподавания какие-то регионы ввели изучение наглядной геометрии в региональный учебный компонент, а в других на основе этой книги строится кружковая работа. Но в какой бы форме ни происходило это изучение, учителя отмечают улучшение восприятия не только систематического курса геометрии, но и курса алгебры, особенно теми детьми, которые, будучи так называемыми правополушарными детьми, испытывали трудности в обучении. По отзывам многих учителей, работа по этой книге позволяет сформировать, а затем поддерживать и развивать интерес к математике. Любопытно отметить, что и многие учителя стали иначе относиться к преподаванию геометрии: теперь для них она живой и увлекательный предмет, а интересные геометрические задачи передаются из уст в уста как интеллектуальный фольклор.

Игорь Фёдорович мне часто говорил, что не знает, что такое педагогика и методика преподавания математики, что ничего в этом не смыслит. Он был неправ. Его статьи, книги, сборники задач, учебники говорят обратное: он был не только Геометром первой величины, но и гениальным Методистом.

В. Ю. Протасов

Несколько слов об Игоре Фёдоровиче Шарыгине[1]

Один мудрец сказал: «Высшее проявление духа — это разум. Высшее проявление разума — это геометрия. Клетка геометрии — треугольник. Он так же неисчерпаем, как и вселенная. Окружность — душа геометрии. Познайте окружность, и вы не только познаёте душу геометрии, но и возвысите свою душу». Этими словами Игорь Фёдорович Шарыгин начал свой курс элементарной геометрии для школы, последний до конца завершённый крупный проект в своей жизни. Потом по секрету говорил, смеясь: «Долго искал эпиграф, и не нашёл ничего подходящего. Пришлось записывать себя в мудрецы». Самоирония, за которой на самом деле скрывалось понимание своей роли и своего истинного масштаба. Через несколько лет жизнь всё расставила по местам. Теперь слова «один мудрец сказал» можно писать без кавычек. Увы...

Иногда казалось, что он пришёл в нашу жизнь даже не из XIX века, а из времён европейского Ренессанса, из итальянского Кватроченто, из прекрасного времени энциклопедистов и учёных-универсалов. Казалось, что вот сейчас он разговаривает с тобой, а минуту назад так же запросто обсуждал какую-нибудь проблему со Спинозой или с Дезаргом. Геометрию он воспринимал не иначе, как составную часть мировой культуры, как главный стержень и фундамент древней и современной науки. «Дима Арнольд говорит, что математика — это часть физики. А я дополняю: физика — часть геометрии!» Это его идеям о связи геометрии и человеческой культуры аплодировал недавно копенгагенский конгресс по математическому образованию: «Геометрия — неотъемлемая часть мировой сокровищницы человеческой мысли. Некоторые теоремы геометрии старше, чем Библия. Если человек не слышал о Моне Лизе или не знает,

[1] Впервые опубликовано в журнале «Математическое просвещение» № 9, 2005.

где находится Парфенон, может ли он считаться культурным человеком? А если он не знает теоремы Пифагора или проблемы квадратуры круга?»

Свои книжки и статьи о таком «сухом» и академичном школьном предмете как геометрия, Игорь Фёдорович неизменно наполнял мыслями великих философов прошлого, цитатами из высокой поэзии, репродукциями картин итальянских и голландских живописцев. И это, поверьте, не было ни саморекламой, ни выпячиванием своей эрудиции, в чём его многие обвиняли. (За глаза, естественно. Рабочая тетрадь по геометрии для 6 класса. При чём тут стихи Северянина, Бродского и картины Карамболя?!) Он просто был убеждён, что именно так нужно писать о геометрии, и по-другому нельзя. Потому что она — те же стихи и картины, только выраженные средствами чертежей и логических рассуждений.

Свой текст я честно переписывал трижды. И всё равно получается сумбур, набор отрывочных воспоминаний. Наверное, это неизбежно. Если бы Вас попросили на одной странице изложить свои воспоминания о большой и самобытной стране, где Вы провели многие годы, то, видимо, тоже получился бы «сумбур вместо музыки». Поэтому я заранее прошу прощения у читателя и начну вспоминать.

1997 год. Дискуссия среди учителей и методистов об учебниках геометрии. Вопрос — как определять геометрическую фигуру. Шарыгин: «Есть вещи, которые лучше не определять вообще. Потому что, как ни определишь, всё равно получится не то. Если фигура — это часть плоскости, ограниченная замкнутой несамопересекающейся кривой, то что такое кривая, и почему она ограничивает только одну часть плоскости, а не две? Всё это уведёт слишком далеко в науку о жордановых кривых. А если фигура — это множество точек, то получается, что канторово множество — это тоже фигура? И ковёр Серпиньского? Предлагаю лучше такое определение: фигура — это то, что имеет фигуру!»

1996 год, конец мая. Мы стоим на балконе его квартиры, обсуждаем какую-то геометрическую задачку. Пятнадцатый этаж, под нами бушует раннее лето. Игорь Фёдорович просит меня съездить в издательство, посмотреть гранки книги. Работа займёт целый день. Пытаюсь отказаться, сославшись на то, что «неожиданно» началась сессия, и у меня послезавтра экзамен. «Да, — сказал Игорь Фёдорович печально, — всё в нашей жизни приходит неожиданно. Сессия... Лето... Старость, пенсия, болезни...» От этих слов у меня мороз по коже.

1996 год. Подготовка вариантов Соросовской олимпиады. Шарыгин — главный координатор и ответственный за составление варианта. Нужны задачи. Отбор у Игоря Фёдоровича был жесточайший. Предлагаешь 10 задач, он берёт из них в лучшем случае 2–3. Требования: задача должна быть интересна математически, литературно оформлена, а самое главное — должна быть на новую свежую идею, которая до этого ни в каких олимпиадах не встречалась.

Задачи, решаемые стандартными олимпиадными приёмами, отметались сразу. «Ты же учёный! Поройся в своей науке! Лучшие задачи всегда приходят из науки, а не придумываются искусственно». Порылся, нашёл. Несу. «По кругу растут 199 деревьев, все разного возраста. Можно ли выяснить возраст 12 деревьев так, чтобы наверняка найти дерево, старшее обоих своих соседей (слева и справа)». Шарыгин долго изучал задачу и решение. Идея оказалась новой и свежей. «Замечательно! Но литературная подача никуда не годится! Надо бы придумать текст поинтереснее».

После целого дня мучений у нас родилась версия про короля, живущего в одном слаборазвитом царстве-государстве, который начал борьбу с коррупцией и для этого вздумал наказать одного из своих 199 министров. Главного коррупционера решили искать так: усадить всех министров за круглый стол и выяснить, у кого сколько денег на счетах в банке. Того, кто богаче обоих своих соседей по столу, объявляют главным взяточником-«оборотнем». Намёки на известных политиков были настолько прозрачны, что Игорь Фёдорович шутил, дескать, посадят — не посадят. Но это, кажется, только его раззадоривало. Потом он рассказывал, как в день олимпиады ему звонили из провинции, кто с восхищением (Молодцы! Смелые люди, так держать!), кто с негодованием (Вы что там в Москве, с ума посходили? Других тем для задач не было? Если губернатор узнает, нам олимпиаду ликвидируют на фиг!).

Надо сказать, это было не первое «хулиганство» Шарыгина на олимпиадах. За год до того я принёс ему задачу о мальчике, поступающем в институт. Игорь Фёдорович предложил: «Давай сделаем поинтереснее. Назовём мальчика Игорь, дадим фамилию, скажем, Иванов. И пусть он поступает в Дипломатическую академию». Задача так и начиналась «Выпускник школы Игорь Иванов мечтал стать дипломатом...» Дети от души смеялись, причины этого были мне не вполне ясны. Только потом до меня дошло, что Игорь Иванов — министр иностранных дел РФ. В следующем туре Игорь Фёдорович придумывает задачу о выборах в дворовый парламент, где было 4 фракции: «Наш дом», «Наша улица», «Наш двор» и «Наш подъезд».

Всегда восхищала способность Шарыгина сделать задачу из любой жизненной ситуации. Как тут не вспомнить его задачи про радиоактивные шары, про три шкатулки в программе «Поле чудес» или про миллионера Тараса Артёмова, который при обмене денег принёс в сберкассу 1991 купюру. По его задачам можно изучать новейшую историю России.

2000 год. Частная беседа. «Знаешь, в чём главное отличие планиметрии от стереометрии? Не в методах и не в объектах исследования. А в духе! Дух планиметрии — эстетический. Главное в ней — искусство и красота. А дух стереометрии — инженерный. В ней главное — конструкция!»

2001 год. Частная беседа. «Хороший учитель — это не тот, кто всё знает, а тот, кто не стесняется своего незнания. Поэтому у хороших учителей ученики их перерастают».

2001 год. Частная беседа. «Я понимаю, что ты хочешь заниматься серьёзной наукой, и эта школьная ерунда тебе неинтересна. Но ведь наука — вещь опасная и жестокая, можно всю жизнь прожить зря. Поэтому надо заниматься ещё чем-то, про запас. Чтобы после тебя что-то осталось, если не великие теоремы, то хоть книжки для школьников».

В. М. Тихомиров

Об И. Ф. Шарыгине (осколки воспоминаний)

...Мы познакомились примерно полвека тому назад, в конце пятидесятых годов, но сам момент первого знакомства не сохранился в моей памяти.

Наши контакты начальной поры были посвящены общим научным интересам. В ту пору работал на мехмате знаменитый семинар «трёх Коль» — Николая Сергеевича Бахвалова, Николая Михайловича Коробова и Николая Николаевича Ченцова. Темы семинара были связаны с математическими основаниями вычислительной математики. Николай Михайлович пришёл в эту проблематику из теории чисел, Николай Николаевич, отправляясь от производственных задач Отделения прикладной математики (ныне Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша), где он работал, Николай Сергеевич оказался в ту пору под воздействием идей Андрея Николаевича Колмогорова об ε-энтропии и поперечниках. Я тогда также размышлял над этим. На почве осмысления колмогоровских подходов к вычислительной математике и проходили тогда наши с Игорем научные беседы.

Закончив университет, Шарыгин поступил в аспирантуру к Н. С. Бахвалову по кафедре вычислительной математики.

> В связи с этим периодом вспоминается забавный эпизод. В ту пору, в начале шестидесятых, разрасталась кампания по борьбе с тунеядством. Естественно, это привело в возбуждение многих доносчиков-любителей, и как-то раз в милицию поступил донос на некоего молодого человека, который целый день напролёт во дворе дома гоняет с мальчишками в футбол. Милиция провела расследование и выяснила, что этот молодой человек по фамилии Шарыгин является аспирантом механико-математического факультета МГУ. На факультет была послана «телега» с просьбой разобраться с этим молодым человеком. Но Игоря в обиду не дали: в милицию был отослан

ответ факультета, в котором объяснялось, что успешная научная деятельность совместима с каждодневной игрой в футбол с дворовыми мальчишками.

Игорь успешно завершил своё пребывание в аспирантуре, защитив диссертацию, в которой содержались яркие математические результаты по теории приближений и вычислительной математике. Мне особенно запомнился обнаруженный им (геометрический по сути дела) факт, где очень остроумно обобщалась одна моя теорема.

После аспирантуры Шарыгин был оставлен в качестве ассистента на факультете. У него появились первые ученики, которых Игорь направлял на развитие тематики, интересовавшей нас обоих, и потому наши научные контакты в ту пору были постоянными и плодотворными.

Но вспоминается не только это. Летом 1967 года большая советская научно-туристическая группа оказалась на берегу Чёрного моря в Варне, где проходил Болгарский математический конгресс. В этой группе было много моих добрых знакомых. Среди них и Игорь Шарыгин. Эту первую свою поездку за рубеж я вспоминаю с особым удовольствием. Чуть ли не каждый вечер разными группами мы бродили вдоль берега моря и посещали приморские ресторанчики, где проводили время очень шумно и весело. Там зародилось наше с Игорем дружеское расположение друг к другу. Игорь открылся мне как человек широких гуманитарных интересов, остроумный, с особенной сатирической наблюдательностью, глубоко мыслящий, доискивающийся до сути вещей. Тогда мы начали спорить друг с другом. Мы не были единомышленниками, но уважали в спорах позиции и убеждения друг друга. Об этом придётся ещё сказать.

Тогда же, в Болгарии, когда после опустошения нескольких бокалов (чаще кроваво-красного, чем «золотого терпкого») болгарского вина, языкам свойственно раскрепощаться, я почувствовал, что Игорь находится на перепутье и не может ещё выбрать свою жизненную тропу. Мне показалось, что это был для него период тяжёлых переживаний.

Тот период закончился драматически, отношения с руководством кафедры у него не сложились и Игорь шагнул в пустоту. Он вынужден был оставить университет, и оказался перед необходимостью искать себе работу. Когда мы встречались, речь о математике уже не заходила.

Интересы Игоря менялись, и не раз я оказывался свидетелем его новых увлечений. Одним из них было увлечение книгами. Библиофильство — одна из самых благородных страстей человеческих. Игорь был всецело охвачен этой страстью. Ни до, ни после мне не доводилось находить равного Игорю собеседника по разнообразным сюжетам, связанным с книгами (мои контакты с одним из величайших библиофилов своего времени — Алексеем Ивановичем Маркушевичем — были слишком краткими). Игорь владел не только полной информацией о коммерческой проблематике книжного дела и возможностях книжного рынка (попросту говоря, знал, что можно «достать», а что нет), но он сам (что не всегда случается с библиофилами) был преисполнен любви к чтению, к родному языку, к осмыслению прочитанного. Его интересовали поэзия, проза, философская мысль, естествознание, изобразительное искусство — словом, всё. Я очень много черпал из общения с Игорем в ту пору.

А потом наступил новый период в его жизни: Игорь стал заниматься репетиторством.

Где-то в шестидесятые годы дали первые всходы уродливые ростки, засорившие пространство российского образования. Вдруг стала осознаваться неизбежность и необходимость репетиторства как средства поступления в отдельные элитарные высшие учебные заведения.

> Моё поколение не знало этого явления. Среди моих сокурсников и друзей, поступавших в университет и различные институты в сороковые и пятидесятые годы, мне не известен ни один человек, кто перед поступлением в вуз занимался бы с репетиторами. А в шестидесятые годы занятия с репетиторами стали всеобщим явлением. Историография этого явления и раскрытие социологических его причин необходимы, если вдруг всерьёз встанет вопрос о ликвидации этого монстра.

Игорь Фёдорович Шарыгин стоял у истоков феномена репетиторства. Очень быстро выделилась небольшая группа репетиторов экстра-класса. Игорь Фёдорович сразу стал принадлежать этой группе, он был, так сказать, «равный среди первых» репетиторов по математике своего времени, и когда речь заходила о том, кому бы направить ребёнка, среди немногих всегда называлась фамилия Шарыгина.

Он подошёл к этому своему (как мы теперь скажем) бизнесу как исследователь, тщательно изучая и классифицируя все «извращения», которые стали культивироваться на вступительных экзаменах. Я часто обращался к Шарыгину по инициативе своих приятелей с просьбой взять в свою группу подготовки их детей, нацеливавшихся на преодоление математического барьера на пути поступления в вуз. По этим поводам мы нередко общались, и Игорь иногда делился со мной своими исполненными сатиры и сарказма наблюдениями о том, что происходило на экзаменах по математике в различных учебных заведениях. Он мог бы многое поведать о том, что тогда происходило, но, увы, он ушёл из жизни слишком рано. По-видимому, именно в ту пору Игорь Фёдорович осознал свой несравненный дар геометрического композиторства (шарыгинским геометрическим шедеврам посвящена наша с В. Ю. Протасовым статья, помещаемая в этом сборнике).

Репетиторством Шарыгин занимался до той поры, пока окончательно не осознал истинное назначение своей жизни — быть борцом за развитие математического образования не только в нашей стране, но и во всём мире. И где-то в конце восьмидесятых начался фантастический по затраченным усилиям и плодотворности период его жизни.

> Этот период сложным образом оказался в его сознании связан с «перестройкой». Перестройка открыла перед И. Ф. Шарыгиным небывалые дотоле возможности: вещать и быть услышанным, писать и публиковаться, бороздить необъятные просторы нашей страны и всюду ощущать поддержку своего труда и своих усилий. Весь мир раскрыл перед ним свои двери. В моей библиотеке десятки книг, учебников, статей Шарыгина, созданных за эти годы; он разбрасывал семена просвещения на своих семинарах в десятках городов; он занимал ответственные международные посты, организовывал плодотворнейшие семинары и школы.
>
> Но мне никогда не доводилось слышать от Шарыгина слова одобрения новым переменам, переменам, которые сделали возможной реализацию его замыслов. Чувство удовлетворения от происшедших перемен гасилось трагическим ощущением того, что власть не заинтересована в том, чтобы «сеять разумное, доброе и вечное», не заинтересована в том, чтобы люди в их странах были способны думать и адекватно оценивать происходящее. (Он убеждался в том, что это происходит не только у нас, но и во многих других странах мира, например, в США, и Игорь Фёдорович очень огорчался, узнавая, какие безумные средства тратятся на постановку нашей системы образования на американские рельсы.)
>
> Игорь Фёдорович убедил себя в том, что всякая власть враждебна просвещению (впрочем, он считал, что некоторым исключением является Япония, и возлагал определённые некоторые надежды на Китай). Он всеми силами стремился противостоять политике по образованию, проводимой в нашей стране — губительной, по его мнению, для математического образования.

У меня хранятся копии его страстных обращений к коллегам, парламентариям, президентам о необходимости сберечь наше национальное достояние — математическое образование, созданное на протяжении полутораста лет усилиями русской интеллигенции.

И. Ф. Шарыгин втягивал меня в круг своих интересов по борьбе за усовершенствование математического образования. Я выступал на его семинаре в Независимом московском университете и по материалам этого выступления опубликовал статью «Геометрия в школе» (Школьная энциклопедия. Математика. М.: Большая Российская энциклопедия, 1996. С. 474–479), вообще немало писал о математическом просвещении. Многое в этих моих писаниях было навеяно моими контактами с Шарыгиным.

Игорю Фёдоровичу принадлежала идея организации широкой Всероссийской конференции, посвящённой математическому образованию. Он был истинным мотором этой конференции, разработчиком планов, добытчиком средств, собирателем заинтересованных и влиятельных участников. Я старался по мере сил помогать ему.

Конференция состоялась в сентябре 2000 года в Дубне. Мне не довелось по состоянию здоровья принять участие в этой конференции, но я слышал множество восторженных отзывов о ней. О том, какие радостные эмоции испытывал Игорь Фёдорович, когда реализовалась его идея о проведении дубнинской конференции «Математика и общество. Математическое образование на рубеже веков», можно судить по принадлежащей ему первой фразе обращения, принятого на конференции: «Мы, участники Всероссийской конференции по математическому образованию, с удовлетворением отмечаем в качестве одного из важнейших достижений нашей конференции сам факт её проведения».

Игорь Фёдорович предпринял большие усилия, чтобы нашей стране дали возможность на Международном конгрессе по образованию в Копенгагене в 2004 году организовать выставку о математическом образовании с серией сопровождающих её многочисленных докладов. На этом конгрессе предполагался его доклад о значении геометрии в математическом образовании. Смерть не дала ему возможность принять участие в конференции, и доклад был прочитан его учеником и соавтором В. Ю. Протасовым.

Общаясь друг с другом мы много спорили, ибо не спорить с ним было невозможно. Геометрия была для Игоря Фёдоровича предметом его безграничной и ревнивой любви, что нередко приводило к выражению этой страсти в самых крайних формах.

Приведу в качестве примера цитату из статьи И. Ф. Шарыгина и В. Ю. Протасова «Нужно ли изучать геометрию в XXI веке?» (она опубликована в сборнике «Очерки по математическому образованию в России» (М.: МЦНМО, 2004); этот сборник готовился к Международному конгрессу по математическому образованию в Копенгагене). Вот что в этой статье написано о Декарте: «Созданный им метод координат позволяет, как писал его создатель, среднему или даже посредственному человеку достичь высот, доступных лишь особо одарённым. Кто-то из последующих классиков сказал, что Декарт „покрыл Геометрию паршой алгебраических формул“». Услышав или прочитав подобные яркие и горячие высказывания друга, я старался (обычно в лёгкой и шутливой форме) несколько ослабить их огонь. Отголоски наших споров можно найти и во многих моих публикациях. Например, в упоминавшейся выше моей энциклопедической статье о геометрии в школе есть такой пассаж: «В наше время большинство крупных учёных считают математику единой и рассматривают геометрию как её часть. Но при этом необходимо сказать, что единство математики проявляется, в частности, и в том, что самая что ни на есть „вообразительная“ геометрия допускает „поверку алгеброй“, иначе говоря, обычно существуют два решения содержательной геометрической задачи — геометрическое, базирующееся на воображении, чертеже и тому подобном, и чисто выкладочное, алгебраическое».

И нередко, когда мне хотелось представить читателю шедевры геометрического композиторского творчества Игоря Фёдоровича, его блистательные чисто геометрические доказательства я поверял «паршой алгебраических формул». И выходило тоже красиво. «А где же истина?» — спросите вы. Пусть она останется «между нами».

Я долго уговаривал Игоря Фёдоровича написать статью для альманаха «Математическое просвещение», а он всё отказывался, ссылаясь на неимоверную занятость. И всё же он написал её (для восьмого номера альманаха, вышедшего в 2004 году). Со многими слишком крайними воззрениями этой статьи трудно было безоговорочно согласиться, но, выпуская номер, мы решили ничего в тексте не менять. Я думал: после поспорим! И как-то в марте 2004 года, оказавшись на даче под Москвой и держа перед собой номер «Математического просвещения» со статьей Шарыгина, я стал писать ему письмо в защиту Декарта, на которого Игорь, по обычаю, горячо нападал. Мне хотелось при этом как-то развеселить Игоря, который в последнее время был мрачен и угрюм. Я писал, что мир перенасыщен *двойственностью* — воззрений, подходов и реалий. Скажем, люди делятся на мужчин и женщин, или: в его любимой геометрии задачи можно решать и алгебраически. И как ни относиться к женщинам, писал я, их приходится терпеть, так уж и ты терпи Декарта с его алгебраическими формулами.

Дописать письмо я не успел и возвратился в Москву. Прошло несколько дней, и вдруг поздно вечером раздался звонок. Звонил Игорь. Голос его был беспокойный. Он сказал мне, что был у врачей, и они порекомендовали ему операцию на сердце. А он раздумывает: операция недешева, и полной уверенности в успехе нет. Я посоветовал Игорю решиться на операцию. Я привёл ему пример человека, который был приговорён к скорой смерти, если не решится сделать операцию на сердце. Операция была сделана, и человек вернулся к активной жизни. Потом разговор перешёл на математическое образование. Обсудив некоторые текущие дела, мы пожелали друг другу спокойной ночи.

На следующий день, 12 марта, мне нужно было ненадолго куда-то выйти. Когда я вернулся, жена сказала мне: кто-то позвонил и сообщил, что Игорь скончался.

> ...Игорь как-то процитировал мне Бродского: «Религия — послание без обратного адреса». Когда я вновь оказался на своей даче, на столе лежало недописанное письмо Игорю. Оно оказалось посланием «без обратного адреса».

В своей последней статье Игорь Фёдорович Шарыгин обращается к каждому человеку, и всё человечество выступает в нём как действующее лицо. Он пишет: «История человечества пишется в трёх книгах. Это История вражды — история войн, революций, мятежей и бунтов... Это История любви. Её пишет Искусство. И это История мысли человеческой. История геометрии не только отражает историю развития человеческой мысли. Геометрия сама является одним из моторов, двигающих эту мысль».

Если заменить «Историю вражды» на «Историю борьбы», присоединив к войнам, революциям, мятежам и бунтам борьбу правды с неправдой и добра со злом, то станет возможным назвать Игоря Фёдоровича тем человеком, который вписал страницы в каждую из книг, в которых прослеживается «История человечества».

Он был страстным Борцом на стороне Правды, Рыцарем, стоявшим на страже Просвещения. В «Историю любви» вписаны его поразительные книги, где главной героиней, предметом восхищения и восторга является Геометрия. В «Историю мысли человеческой» надо включить его композиторское и педагогическое творчество.

Он любил цитировать слова Бродского: «Не в том суть жизни, что в ней есть, но в вере в то, что в ней должно быть». Этой верой была наполнена жизнь Игоря Фёдоровича Шарыгина.

И. Б. Чернышёва

Воспоминания об И. Ф. Шарыгине

С Игорем Шарыгиным мы учились в одной группе. Практические занятия по математическому анализу у нас вёл Леонид Иванович Камынин. Он начинал занятия с традиционного вопроса: «Есть задача, которую не удалось решить?» После дружного ответа большинства студентов, что такая задача среди заданных на дом есть, Леонид Иванович произносил: «Шарыгин — к доске». И Шарыгин учил группу решать «нерешабельную» задачу. На третьем курсе общая подготовка закончилась. Студенты выбрали себе будущую специальность (кафедру), и состав групп поменяли. Мы с Игорем оказались в разных группах, и наши пути разошлись. После окончания университета я, как многие выпускники мехмата, начала работать программистом. И моей профессией стало системное программирование. Игорь работал в МГУ, до меня доходили слухи, что он собирает книги и что он очень хороший репетитор.

В последнее время я работаю в Институте системного анализа (ИСА РАН). Круг проблем, решением которых озабочены сотрудники этого института, очень широк. Предметом исследования может быть любая «большая система». Так в стенах этого института я оказалась вместе с моим дядей, известным генетиком А. А. Малиновским. Профессор В. Н. Садовский (философ) привлёк его в свою лабораторию как специалиста по проблемам тектологии и системных исследований (тектология философа А. А. Богданова — первая попытка построения теории систем). Уже после смерти Малиновского я начала активно сотрудничать с В. Н. Садовским. Меня он привлек к работе по составлению электронного тематического каталога журнала «Вопросы философии». То, что Малиновский был моим дядей, в истории моего сотрудничества с лабораторией Садовского — только чудесное совпадение. Хотя, может быть, и не такое уж чудесное — дядя оказал на формирование моих интересов огромное влияние.

А вот ещё одно чудесное совпадение. У дверей института я столкнулась с Игорем Шарыгиным. В Институте системного анализа пересеклись пути системного программиста И. Б. Чернышёвой и преподавателя-методиста И. Ф. Шарыгина. Правда, системный программист И. Б. Чернышёва стала по совместительству преподавателем (о зарплатах старших научных сотрудников в Академии наук после перестройки говорить не буду).

Не являясь профессиональным преподавателем высшей школы, последние пять лет я преподаю математику будущим бакалаврам в частном (или коммерческом) Институте реставрации. Плана курса математики (утверждённого каким-нибудь министерством) к моему не только удивлению, но и радости, не существовало, мне было предложено самой определиться с тем, что я буду преподавать. То, что план моего курса должна была определить я сама, — стиль работы ректора Института О. И. Пруцына. Это был (к сожалению, он недавно скончался), как говорили хорошо знавшие его люди, «человек-глыба» — огромная эрудиция, широта взглядов, глубина. Он собрал коллектив специалистов, которым предоставил возможность самим выбирать, чему и как они будут учить студентов. Именно благодаря этому стилю в институте преподают энтузиасты своего дела, заражающие своим энтузиазмом студентов (вся русская школа реставрации держится в основном на энтузиазме).

Абитуриенты приносят свои рисунки, как во всех коммерческих вузах, проходят собеседование и приступают к учёбе. Половина студентов отсеивается, остаются только те, кто действительно хочет учиться — таков стиль Института реставрации, введённый ректором. Студенты института умеют рисовать и не умеют думать (у них, наверно, правое полушарие мозга хорошо развито за счёт левого). За 50 часов научить их думать невозможно. И я остановилась на том, что сосредоточусь на изучении задач, решения которых используются в архитектуре.

Проценты даются в объёме, необходимом для того, чтобы оценивать точность. Например, разность длин сторон основания пирамиды Хеопса (230 м) и длин диагоналей подкупольного квадрата Киевской Софии (11 м) — 20–25 см. Я предлагаю студентам сравнить древнеегипетскую и древнерусскую строительную точность (выраженную в процентах). Арифметическую и геометрическую прогрессию студенты не только вычисляют, но и «рисуют» в виде системы концентрических окружностей. Это, вместе с алгоритмами деления окружности на части, используется при построении в круге узоров из дуг спиралей (архимедовой и логарифмической).

Для освоения принципов симметрии и квантования плоскости рассматриваются алгоритмы построения пчелиных сот, наиболее плотной укладки окружностей (и соответствующей оконной решётки), решётки из крестов, даётся правило искривления сторон клеток паркета. В разделе «пропорции» даются «метод квадрата и диагонали» и, конечно, золотое сечение. Не буду перечислять дальше. Готовя курс, я была удивлена тем, что для любого раздела математики так легко подобрать прекрасные иллюстрации из книг по архитектуре. Кстати, для тех, кто занимается изучением истории развития строительной практики и математики, это выливается в очень большую проблему, аналогичную проблеме курицы и яйца — трудно понять «что раньше?».

Удивившись слабой математической подготовке студентов, я решила уточнить для себя, что входит в современный школьный курс. В магазине учебников я обнаружила, что учителю, в отличие от наших дней, теперь предоставляют на выбор несколько учебников. В разделе «Геометрия» для 6–9 классов я нашла учебники, которые выбрала бы я, потому что освоить их необходимо и полезно моим студентам, и потому, что они мне понравились. Это были: «Наглядная геометрия» И. Ф. Шарыгина и Л. Н. Ерганжиевой (учебник для 5–6 класса), «Курс наглядной геометрии» Е. С. Смирновой (методическая разработка для учителей) и «Геометрия» И. Ф. Шарыгина (учебник для 7–9 классов). Я приношу их на занятия, чтобы показать студентам иллюстрации (и чтобы напомнить, что такие-то сведения они изучали ещё в школе в таком-то классе). Студенты рассматривают их с большим интересом.

Когда я представила мой план курса математики ректору, он его одобрил и прибавил: «А вы не читали книгу К. Н. Афанасьева „Построение архитектурной формы древнерусскими зодчими“? Почитайте её». Я понятия не имела, кто такой К. Н. Афанасьев, но книгу купила и прочитала. Оказалось, что Афанасьев — известный специалист по древней архитектуре и 40 лет назад он составил описание храмов (или их фундаментов, если ничего более не сохранилось), построенных на Руси в домонгольский период. Так О. И. Пруцын помог рождению ещё одного энтузиаста реставрации. Три года назад изучение древней архитектуры и реконструкция вычислительных методов древних строителей стали моим любимым делом. Я пополнила ряды тех, кто пытается понять, как древние архитекторы проектировали сооружения, пропорции которых (среди них видное место занимает золотое сечение) в наши дни описывают, привлекая отнюдь не древний вычислительный аппарат.

Я очень обрадовалась встрече с Шарыгиным и высказала ему похвалу в адрес приобретённых мною учебников. Мы стали встречаться в институте. Я ему рассказала, как строю своё преподавание на наглядности, что обнаружила очень много прекрасных иллюстраций для задач по элементарной математике. Естественно, мы обсуждали, что для преподавания гуманитариям нужны такие учебники, которые они способны усвоить, что в этом должны быть заинтересованы органы образования и т. д. Шарыгин мне рассказал, что автор «Курса наглядной геометрии» Е. С. Смирнова — его бывшая аспирантка, что уже очень давно он занимается разработкой и внедрением метода наглядного преподавания математики, и что в Институт системного анализа он пришёл, чтобы руководить процессом создания программного комплекса для обучения геометрии по разработанной им методике с помощью компьютера. Когда я рассказывала Игорю о том, чем занимаюсь, он сказал фразу, в которой были слова «чудесные свойства $\sqrt{5}$». Игорь очень точно определил то главное, на чём стоит теория и практика золотых пропорций. Конечно, мы договорились о сотрудничестве. Имея большой опыт в издании книг и учебников, он взялся быть редактором моих лекций (я давно имею компьютерный вариант своего курса). Мне казалось, что такая книжка может не только оказаться полезной всем, кто причастен к искусству, но и поможет изменить их отношение к математике. Но этим планам уже не суждено было сбыться. Игорь умер.

В.В. Яблонская

Яблоки пахнут жизнью

Игоря Шарыгина я всегда воспринимала как незаурядную личность, как философа. И началось это ещё на первом курсе. Он часто заходил к моим соседкам по блоку 1533 и однажды, когда Лида Шкитина и Света Ефременко были в читалке, Игорь зашёл ко мне — узнать «куда все?». А я в тот момент пыталась открыть посылку от мамы из Винниц. Я попросила Игоря помочь мне. Он быстро справился с крышкой, и в комнате ароматно запахло украинскими яблоками. Игорь сел, как-то загадочно заулыбался и протянул напевая «эх, яблочко... Вот твоё настоящее имя». Я возразила, что я Вита, а он продолжал: «яблоки и жизнь очень совместные две вещи». Мы съели с ним несколько яблок, и он ушёл. А потом во все наши очень редкие и случайные встречи то на лекции, то в читалке говорил мне, что рядом со мной он всегда чувствует вкус и аромат украинских яблок.

После окончания мы виделись всё реже. И совершенно неожиданно 12 марта 2004 года он позвонил мне впервые за 50 лет и, очень волнуясь, сбивчиво говорил о Диме Ботине, который скоропостижно умер четыре дня назад 8 марта 2004 года. Я старалась его успокоить, хотя и сама была в шоке, и все эти дни не отходила от Диминой мамы — моей сокурсницы Мальвины, за которую мы все боялись, не представляя себе, как перенести такое горе. Игорь явно был в шоке от смерти Димы, говорил, что все мы виноваты, что не уберегли, допустили, не сумели уберечь... Я соглашалась и чувствовала, что мы оба плачем. Я тихо сказала Игорю: «Вспомни, как пахнут яблоки». Он вдруг сказал напевно: «Да-а... Яблоки пахнут жизнью». Попросил передать Мальвине... и не договорил. «Сама знаешь, что.» Я ответила, что всё передам и спросила, как его сердце. Игорь сказал, что собирается делать операцию на сердце... Мы простились.

Оказалось — навсегда.

В. Ю. Протасов, В. М. Тихомиров

Геометрические шедевры И. Ф. Шарыгина[1]

Творческая жизнь Игоря Фёдоровича Шарыгина складывалась не вполне обычным образом. Он проявил себя очень одарённым студентом. Закончив университет в 1959 году, он поступил в аспирантуру и успешно завершил её, защитив диссертацию, где им были получены яркие математические результаты по теории функций и теории приближений. Но вскоре после аспирантуры он оставил «высокую науку» и целиком посвятил себя школьной математике — исследованиям по элементарной геометрии и развитию математического просвещения. Он оставил множество замечательных книг и статей, но, пожалуй, в наибольшей мере его талант отразился в его геометрическом композиторстве, т. е. в создании геометрических шедевров. Этой стороне его творчества посвящена наша статья. Она написана двумя авторами. Первый из них причисляет себя к ученикам И. Ф. Шарыгина, второй был связан с Игорем Фёдоровичем почти пятьюдесятью годами дружбы и творческого взаимодействия.

Как отобрать из огромного геометрического наследия Игоря Фёдоровича несколько задач для небольшой журнальной статьи? Признаться, для авторов это было большой проблемой, во многом так и не разрешённой. Мы решили поступить просто: написать про те задачи и теоремы Шарыгина, которые в наибольшей мере понравились и запомнились нам. Это будет, конечно, весьма субъективный взгляд. Хотя, как сказал один замечательный писатель: «все мнения всегда субъективны, а объективного мнения не существует вовсе!»

Начнём с такой красивой шарыгинской миниатюры.

Задача 1. *В треугольнике ABC, с углом $\angle B = 120^\circ$ проведены биссектрисы AA', BB' и CC'. Чему равен $\angle A'B'C'$?*

---

[1] Впервые опубликовано в журнале «Квант» № 1, 2006.

Задача уникальна тем, что рассчитана на учеников 7 класса средней школы[1], однако вызывает трудности у всех, кто видит её впервые, включая абитуриентов математических факультетов, победителей олимпиад и профессиональных математиков. Причина проста: эта задача чрезвычайно трудно «считается». Желающие могут попробовать решить её с помощью теорем синусов, косинусов и формул тригонометрии. Это возможно, но совсем не просто. Подобные «крепкие орешки» сам Игорь Фёдорович очень ценил. Называя тригонометрию «киллером» геометрии, которая часто позволяет найти короткое счётное решение и, тем самым, лишить красивую задачу всякой геометрической идеи, он стремился создавать такие задачи, в которых тригонометрия была бы бессильна или слаба. Задача 1 является одним из таких «антикиллеров». Вот авторское решение задачи, которое мы разбиваем на отдельные пункты, выделяя «логические ходы».

1. Рассмотрим треугольник ABB' (!).

2. Угол B равен $120°$, следовательно $\angle B'BC$ равен $60°$, ибо BB' — биссектриса.

3. Продолжим сторону AB и обозначим через BD луч, продолжающий AB. Тогда $\angle CBD$ тоже равен $60°$, ибо он дополняет $\angle B$ до развёрнутого угла.

4. Следовательно, BC — это биссектриса внешнего (по отношению к треугольнику ABB') угла $B'BD$.

5. Воспользуемся известной теоремой: *биссектрисы двух внешних и третьего внутреннего углов треугольника пересекаются в одной точке*. Из этой теоремы следует, что

6. $B'A'$ биссектриса (тоже внешнего по отношению к треугольнику ABB') угла $BB'C$ (!).

7. Совершенно аналогично доказывается, что $B'C'$ — биссектриса угла $BB'A$ и значит,

8. Угол $A'B'C'$ равен половине развёрнутого угла $AB'C$, т. е. он равен $90°$.

Задача 1 может быть сформулирована и в сферической геометрии.

Поясним, что это значит. Если вы возьмёте модель сферы — резиновый мячик, на котором можете рисовать — и нарисуете три больших круга, у вас получатся два центрально-симметричных сферических треугольника. Рассмотрим один из них. Обозначим его вершины снова A, B и C. В этом треугольнике величины углов определяются как величины углов между ка-

[1] Она была включена в рабочие тетради для седьмого класса (см.: Протасов В. Ю., Шарыгин И. Ф. Геометрия. Рабочая тетрадь. 7 класс. М.: Дрофа, 1997). Дело в том, что решение задачи не использует ничего, кроме свойства точек биссектрисы находиться на равном расстоянии от сторон угла.

сательными к сфере, проведёнными в соответствующей вершине. Поэтому можно понять, что значит «угол B равен ста двадцати градусам». Определение биссектрисы такое же, как на плоскости — это дуга большого круга, проходящая через вершину угла и делящая его пополам. Сохраняется и свойство точек биссектрисы быть равноудалёнными от сторон угла. А потому и формулировка задачи 1, и её решение, и ответ сохраняются, если ставить задачу на сфере!

А те, кто знают, что такое геометрия Лобачевского, сразу поймут, что и формулировка задачи 1, и её решение, и ответ сохраняются, если ставить задачу на плоскости Лобачевского. Все три утверждения вместе объединяет фраза: задача 1 является фактом абсолютной геометрии (т. е. не зависит от аксиомы о параллельных).

Обсудим вопрос: а насколько трудна решённая нами задача 1?

Давайте на её примере пофилософствуем о том, как оценивать трудность математической проблемы и можно ли вообще это делать.

В принципе трудность конкретного *решения* задачи можно оценивать числом *логических ходов*, но можно эти логические ходы распределять по трём категориям и описывать сложность решения тремя натуральными числами (или нулями), характеризующими *высоту*, *ширину и глубину* этого решения.

Высота — это число «простых импликаций» в решении. Выше мы выделили восемь логических ходов. Некоторые из них — это *простые логические связки*. Таков, например, п. 2: $\angle B = 120°$, BB' — биссектриса $\Rightarrow \angle B'BC = 60°$.

Иные же логические ходы — это *отсылки на известные теоремы*. Таков пункт 5. (При этом, разумеется, список «известных теорем» необходимо как-то заранее фиксировать). Число отсылок составляет «ширину» приводимого решения.

И наконец, два хода отмечены восклицательными знаками. Такова символика комментирования шахматной партии: восклицательными знаками выделяются наиболее замечательные ходы, не вытекающие из поверхностного взгляда на позицию, свидетельствующие об особой изощрённости игрока в данный момент. Так и здесь, ниоткуда не следует, что разумно рассматривать именно треугольник ABB', но оказывается, что именно в этом рассмотрении ключ к решению задачи. А второй восклицательный знак поставлен логическому ходу, где обнаруживается, что $B'A'$ — биссектриса внешнего угла. Тоже напрямую ниоткуда не следует, что именно в этом суть дела.

Подведём итог: в нашем решении высота равна четырём, ширина единице, а глубина двум. Отметим сразу, что подавляющее большинство геометрических задач Шарыгина обладает нетривиальной глубиной, в частности, и в только что определённом значении этого слова.

Но прервём пока наши философские обсуждения, чтобы потом к ним не раз ещё возвращаться.

Задача 2. *Про четырёхугольник $ABCD$ известно, что он вписан в окружность и что существует окружность с центром на стороне AD, касающаяся трёх других сторон. Доказать, что AD (длина AD) равняется $AB + CD$.*

Эта задача была придумана Шарыгиным для «Задачника Кванта», сразу стала популярной и известной. А через несколько лет она была включена в вариант Международной математической олимпиады, причём, не от России (тогда СССР), а от другой страны, и, конечно же, без ссылки на автора. Один из близких друзей Игоря Фёдоровича заметил как-то, что Шарыгина постоянно обкрадывали.

Снова попробуем оценить сложность приводимого далее решения.

1. Проведём окружность через B, C и O, где $O \in AD$ — центр окружности, касающейся AB, BC и CD (!).

2. Пусть M — точка (может быть, совпадающая с O), в которой окружность п. 1 пересекает прямую AD, $\angle AMB$ обозначим через α (!).

3. Четырёхугольник $MBCO$ — вписанный, и потому $\angle BCO = \alpha$.

4. Стороны CB и CD касаются (по условию задачи) окружности с центром O, и потому CO — биссектриса.

5. Из п. 4 и 3 следует, что $\angle BCD = 2\alpha$.

6. Четырёхугольник $ABCD$ вписанный (по условию), следовательно, из п. 5 вытекает, что $\angle BAD = 180° - 2\alpha$.

7. В треугольнике ABO известны два угла A и O, следовательно, $\angle ABO$ равен

$$180° - (180° - 2\alpha + \alpha) = \alpha.$$

8. Из п. 7 следует, что треугольник ABO равнобедренный, т. е. $AB = AO$.

9. Аналогично доказывается, что $CD = DM$, откуда и следует утверждение задачи.

Мы видим, что здесь 9 логических ходов, два восклицательных знака (то, что через три точки B, C и O надо проводить окружность — это изобретение, это акт наития или творческой силы, потому и стоит первый восклицательный знак, но то, что важнейшую роль сыграет M — тоже очень нестандартно). И широта приведённого решения весьма значительная: п. 3 — теорема о равенстве углов, опирающихся на одну и ту же дугу; п. 4 — теорема о биссектрисе; п. 6 — теорема о сумме противоположных углов вписанного четырёхугольника; п. 7 — теорема о сумме углов треугольника; наконец, п. 9 — теорема о равенстве углов равнобедренного треугольника.

Итак, высота приведённого решения равна двум, ширина — пяти и глубина тоже двум.

В 1993 году старшему из авторов этой статьи было поручено возглавить жюри очередной (пятьдесят шестой) Московской математической олимпиады. Естественно было обратиться к И. Ф. Шарыгину с просьбой придумать задачи к ней. Вот его задача для 9 класса. Она шла под шестым номером как самая трудная.

Задача 3. *Дан четырёхугольник $ABCD$. Известно, что*

$$\angle BAC = 30^\circ, \quad a \quad \angle D = 150^\circ$$

и, кроме того, $AB = BD$. Требуется доказать, что AC — биссектриса угла C.

Вот авторское решение.

1. Пусть B' — точка симметричная B относительно AC.
2. В силу симметрии $AB = AB'$ и $\angle BAC = \angle B'AC$.
3. Из п. 2 и условия, что $\angle BAC = 30^\circ$ следует, что треугольник ABB' равносторонний.
4. Из п. 3 и условия $AB = BD$ вытекает, что точки A, B' и D лежат на окружности с центром в B (радиуса AB) (!).
5. Из п. 3 и 4 вытекает, что угол ADB' опирается на дугу в 60°.
6. Из п. 5 следует, что $\angle ADB' = 30^\circ$.
7. Из п. 6 получаем, что точка D лежит на одной прямой с B' и C.
8. Следовательно, прямая CD симметрична CB, т. е. AC — биссектриса $\angle BCD$, что и требовалось.

Но продолжим наше философствование. А как же всё-таки оценивать сложность самой задачи, а не её решения? Можно поступить так, как часто математики поступают: в качестве оценки сложности задачи можно взять минимум сложности по всем имеющимся решениям. Попробуем приложить эту идеологию к задаче 3.

До сих пор было рассказано о геометрических решениях. А сейчас будет представлено аналитическое решение той же задачи.

Очень старый и глубокий вопрос многими математиками ставился так: что лучше — алгебра и анализ или геометрия? Как вы уже, наверняка, поняли, И. Ф. Шарыгин был сторонником именно геометрии, и первый автор этой статьи такое мнение всегда разделял. Второй автор посвятил обсуждению этого вопроса несколько статей (в частности, в «Кванте»), стараясь защитить концепцию, что не следует упорядочивать несравнимое, не нужно отдавать предпочтение чему-то одному, неразумно явным образом становиться на одну из двух сторон. Мир наполнен двойственностью, вещами, которые неразрывно связаны друг с другом, но дают возможность посмотреть на мир с двух разных сторон. И вот такими двумя разными сторонами являются геометрия и алгебра.

Переходим теперь к описанию аналитического решения.

1. Обозначим $\angle BCA$ через φ, а $\angle DCA$ через ψ, сторону AB обозначим через a, а BC через b.

2. Из в треугольника ABC по теореме синусов получаем:

$$\frac{a}{\sin\varphi} = \frac{b}{\sin 30^\circ} = 2b. \tag{1}$$

3. Обозначим $\angle CAD$ через χ; из условия ($\angle ADC = 150^\circ$), п. 1 и теоремы о сумме углов треугольника вытекает равенство:

$$\chi = 180^\circ - 150^\circ - \psi = 30^\circ - \psi.$$

4. Из условий задачи ($\angle BAC = 30^\circ$ и $AB = BC$) и п. 3 следует, что $\angle A = 60^\circ - \psi = \angle BDA$.

5. Из п. 4 следует, что $\angle BDC = 90^\circ + \psi$.

6. По теореме синусов из треугольника CBD следует соотношение:

$$\frac{a}{\sin(\varphi+\psi)} = \frac{b}{\sin(90^\circ+\psi)}. \tag{2}$$

7. Из (1) и (2) получаем:

$$\sin(\varphi+\psi) = 2\sin\varphi\cos\psi.$$

8. Раскрывая синус суммы, приходим к равенству:

$$\sin\varphi\cos\psi = \cos\varphi\sin\psi.$$

9. Из п. 8 следует, что $\varphi = \psi$. Задача решена.

Как сравнить приведённые решения? Импликаций в аналитическом решении чуть больше, но восклицательных знаков там совсем нет: задачу можно признать *стандартной*. Возможны различные предпочтения: опытные геометры проголосуют за первое, неопытные, но владеющие тригонометрией — за второе решение.

На олимпиаде эту задачу решило 5–6 человек, и был лишь один плюс-минус за аналитическое решение. Когда одному из сильных школьников было рассказано об аналитическом решении, он воскликнул: «Где это видано, чтобы на Олимпиаде применялась теорема синусов!»

И ещё один, в каком-то смысле драматический, момент в жизни второго автора связан с И. Ф. Шарыгиным. Это случилось летом 1984 года.

Шла подготовка к очередной Международной математической олимпиаде. Происходила эта подготовка под Москвой в доме отдыха. Туда привезли команду, и разные математики приезжали её тренировать. Тогда попросили принять в этом участие второго из авторов этой статьи. А он как раз тогда писал свою книжку «Рассказы о максимумах и минимумах» и пропагандировал мысль, что большинство задач плоской геометрии на максимум и минимум можно решить так: надо их формализовать разумным образом, а потом применять либо теорему Ферма о том, что в точках максимума и минимума производная равняется нулю, либо правило множителей Лагранжа. И будущим олимпийцам крайне неосторожно было предложено давать лектору геометрические задачи на максимум и минимум, а он будет их немедленно решать по своей методе (которая в лекции была уже изложена). А потом олимпийцам предлагалось рассказывать свои решения и сравнивать, кто кого. Это предложение вызвало бурное веселье: олимпийцы были уверены в том, что победа будет за ними, тем более что незадолго до того их учил геометрии сам Игорь Фёдорович Шарыгин. Вот одна из тех задач, автором которой был, конечно, Игорь Фёдорович; она фигурировала на московской олимпиаде в 1980-м году.

Задача 4. *Дан круг с центром в O, AC диаметр круга, и на OC дана точка F. Спрашивается, как провести хорду BD через точку F так, чтобы площадь четырёхугольника $ABCD$ была максимальной?*

Очень красивая задача. И Игорь Фёдорович именно эту задачу совсем недавно обсуждал с олимпийцами. Вот его решение.

1. Рассмотрим треугольники ABC и OBF.

2. У этих треугольников высота одинаковая, следовательно, площади относятся так же, как OF относится к AC.

3. Аналогично получаем:

$$\frac{S_{OBF}}{S_{ABC}} = \frac{OF}{AC} = \frac{S_{ODF}}{S_{ADC}}.$$

4. Следовательно, суммируя, получаем, что

$$\frac{S_{OBD}}{S_{ABCD}} = \frac{OF}{AC}.$$

5. Значит, вместо того, чтобы максимизировать площадь четырехугольника, возможно максимизировать площадь треугольника OBD.

6. Или, что то же самое, максимизировать $\sin\angle BOD$. В этом месте возникает красивая неожиданность — «смена режима».

7. Обозначим $\angle BOD$ через φ. Наилучший угол обозначим $\tilde{\varphi}$. Очевидно, что $\varphi_0 \leqslant \pi$, где φ_0 соответствует случаю перпендикулярности AC

и BD, и потому, если $\varphi_0 \leqslant \pi/2$, то максимальная площадь соответствует значению $\tilde{\varphi} = \pi/2$; если же $\varphi_0 > \pi/2$, то $\tilde{\varphi} = \varphi_0$. (Здесь мы просто переписали текст задачника И. Ф. Шарыгина, читателю предоставляется возможность найти число логических ходов в этом рассуждении.)

Так вот, школьники-олимпийцы предложили лектору решить эту задачу с помощью производных. Вот каким оказалось решение.

1. Сначала надо формализовать задачу. Пусть $AC = 1$, $OF = a$, а $\angle BFC$ обозначим φ.

2. Олимпийцы подсказали, что площадь четырёхугольника, вписанного в окружность, равна полупроизведению диагоналей на синус угла между ними.

3. Длина второй диагонали BD равна $2\sqrt{1 - a^2 \sin^2 \varphi}$.

4. Из п. 2 и 3 следует, что надо найти максимум функции

$$g(\varphi) = \sqrt{1 - a^2 \sin^2 \varphi}\, \sin\varphi$$

при условии, что $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$.

5. Делаем замену $(a \sin\varphi)^2 = z$ и приходим к задаче о нахождении максимума функции $f(z) = (1 - z)z$ при условии, что $0 \leqslant z \leqslant a^2$.

Это — простая задача, и можно ограничиться лишь выписыванием о т в е т а: если $a \leqslant 1/\sqrt{2}$, то $\tilde{z} = a^2$, т. е. $\tilde{\varphi} = \pi/2$, если же $1/\sqrt{2} < a \leqslant 1$, то $\tilde{z} = 1/2$, т. е. $\sin\varphi = 1/(a\sqrt{2})$.

Теперь судите сами, какое решение проще — геометрическое или аналитическое.

С этой задачей лектор справился достаточно успешно, и тогда рассерженные олимпийцы дали ему ещё одну шарыгинскую задачу, про которую уже твёрдо были уверены, что лектору её не осилить. И действительно, с ходу у него ничего не получилось, и он вынужден был взять тайм-аут, сказав: «Пойдите-ка попейте чайку́!». А за время тайм-аута кое-как всё же справился. Вот эта задача.

Дан угол A и в нём внутри две точки M и N. Как провести прямую BC через точку M так, чтобы площадь четырёхугольника $ABNC$ была минимальной?

Читателю предлагается самостоятельно её решить, а о том, как она решается с помощью анализа, он может прочитать в книге «Рассказы о максимумах и минимумах» (М.: МЦНМО, 2 изд., испр. 2006). Возможность аналитического решения не может бросить тень на эти задачи: в обеих скрыто истинное изящество.

А вот ещё один шедевр И. Ф. Шарыгина. Правда, Игорю Фёдоровичу он принадлежит лишь отчасти, сама задача довольно старая. Но всё по порядку.

Задача 5 (обобщённая теорема о бабочке). *На окружности дана хорда AB, на ней — точки M и N, причём $AM = BN$. Через точки M и N проведены хорды PQ и RS соответственно. Прямые QS и RP пересекают AB в точках K и L. Доказать, что $AK = BL$.*

История этой задачи довольно запутана. Дело в том, что ей предшествовала не обобщённая, а классическая теорема о бабочке. Классическая теорема о бабочке соответствует случаю $M = N$. То есть всё то же самое, но изначально берется только одна точка M — середина хорды AB, через неё проводятся две произвольные хорды PQ и RS, и утверждается, что $AK = BL$, где K и L — точки пересечения прямой AB с прямыми QS и RP соответственно. Классическая теорема о бабочке была очень известна и популярна. А появилась она довольно давно: в 1815 году в английском журнале Gentleman's Dairy (тогда не предполагалось, что женщины могут заниматься математикой, поэтому математические задачи были в мужских журналах). И на протяжении всех последующих лет «бабочка» доставляла истинное удовольствие каждому, кому доводилось с ней познакомиться. Интересно, что были постоянные публикации, посвящённые этой задаче на протяжении всего этого времени, число этих публикаций перевалило за несколько сотен. Существует огромное количество разных решений этой задачи, например в известной книжке Шклярского, Ченцова и Яглома, в задачнике В. В. Прасолова, в знаменитой книге «Новые встречи с геометрией» Кокстера и Грейтцера и, естественно, в задачнике Шарыгина.

А как же родилась обобщённая теорема о бабочке? Будучи убеждён, что красивая геометрическая теорема должна иметь чисто геометрическое доказательство, Игорь Фёдорович придумал такое доказательство для классической теоремы о бабочке. А потом просто заметил, что ничего

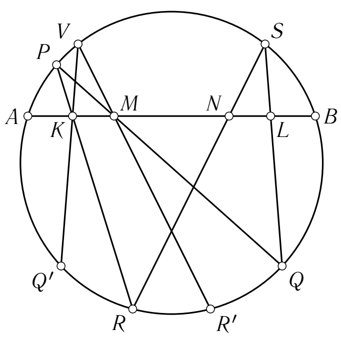


Рис. 15

не изменится в доказательстве если «раздвоить» точку M на пару симметричных точек M и N. Так спустя более чем полтора столетия родилось естественное обобщение теоремы о бабочке! Это ещё раз подтверждает совершенно особое положение теоремы элементарной геометрии. Геометрические теоремы всегда свежи и не устаревают!

Рассмотрим подробнее то самое геометрическое решение, единое для классической и для обобщённой теорем о бабочке.

Решение. Сделаем симметрию относительно серединного перпендикуляра к хорде AB. Окружность при этом перейдёт в себя, точки N, Q, R — в точки M, Q', R' соответственно. Докажем, что прямые $Q'K$ и $R'M$ пересекаются на окружности, из этого будет следовать, что симметрия перевела точку L в точку K, что и требовалось. Для этого обозначим через V вторую точку пересечения исходной окружности с окружностью PMK. Так как четырёхугольники $PMKV$ и $PQQ'V$ — вписанные, то

$$\angle QPV = 180^\circ - \angle MKV = 180^\circ - \angle QQ'V,$$

следовательно $\angle MKV = \angle QQ'V$. С учётом того, что прямые QQ' и MK параллельны, это влечёт, что точки V, K, Q' лежат на одной прямой. Итак, прямая $Q'K$ проходит через точку V. Точно так же доказывается, что прямая $R'M$ проходит через V. Таким образом, $Q'K$ и $R'M$ пересекаются на исходной окружности, что и требовалось доказать.

Следующая задача Шарыгина предлагалась на одной из Всесоюзных олимпиад по математике.

Задача 6. *В пространстве дана сфера и две точки A и B такие, что прямая AB не пересекает сферу. Рассматриваются всевозможные тетраэдры $ABMN$, для которых данная сфера является вписанной. Докажите, что сумма углов пространственного четырёхугольника $AMBN$ (т. е. сумма углов $\angle AMB$, $\angle MBN$, $\angle BNA$ и $\angle NAM$) не зависит от выбора точек M и N.*

Эта замечательная задача также являет собой пример «антикиллера». Она очень трудно считается, а геометрически решается наглядно и естественно, фактически — в один приём.

Решение. Обозначим через Q, S, P и R точки касания вписанной сферы с гранями AMB, ANB, BMN и AMN соответственно. Поскольку $BQ = BS$ как расстояния от точки B до точек касания прямых BQ и BS со сферой и, аналогично, $AQ = AS$, треугольники AQB и ASB равны по трём сторонам. Далее остаётся лишь аккуратный подсчёт углов. Во-первых, $\angle ABQ = \angle ABS$ и $\angle BAQ = \angle BAS$. Так же доказываем, что $\angle MBP = \angle MBQ$ и $\angle NBP = \angle NBS$. Сложив два последние равенства, получаем

$$\angle ABM + \angle ABN - \angle MBN = \angle ABQ + \angle ABS = 2\angle ABQ.$$

Аналогично,

$$\angle BAM + \angle BAN - \angle NAM = 2\angle BAQ.$$

Таким образом,

$$\angle ABM + \angle BAM + \angle ABN + \angle BAN - \angle MBN - \angle NAM = \\ = 2\angle ABQ + 2\angle BAQ.$$

Заметим, что сумма первых двух слагаемых равна $180° - \angle AMB$, сумма третьего и четвёртого равна $180° - \angle BNA$, а правая часть равна $360° - 2\angle AQB$. Следовательно, сумма $\angle AMB + \angle MBN + \angle BNA + \angle NAM$ равна $2\angle AQB$, а значит, не зависит от выбора точек M и N.

Задача эта была предложена на Всесоюзной олимпиаде последним номером, т. е. как сложная задача. Она и в самом деле сложная, если не знать решения заранее. А ведь в её решении используются только признаки равенства треугольников и теорема о равенстве касательных, проведённых из одной точки к сфере!

В заключение приведём ещё несколько задач и теорем И. Ф. Шарыгина без разбора их доказательств.

Задача 7 (задача Лебега для треугольника). *Найти минимально возможную площадь треугольника, которым можно покрыть любой треугольник со сторонами, не превосходящими единицы.*

История этой задачи также занимательна. Автор её — великий французский математик Анри Леон Лебег (1875–1941). Свою первую работу он написал в 1899 году, это была первая публикация Лебега, а уже к 1902 году он стал классиком математики. Лебег внёс неоценимый вклад не только в ключевые направления математики XX века, но и в развитие российской математики. Так сложилось, что Московская математическая школа начала развиваться вдохновлённая, в основном, идеями Лебега, а затем разрослась в крупнейшую математическую школу не только в России, но и в мире. Классическая формулировка задачи Лебега такова: найти фигуру минимальной площади, покрывающей любую фигуру диаметра 1. Шарыгин переносит эту задачу на треугольник и находит совершенно элементарное решение (см.: Шарыгин И. Ф. Геометрия 9–11. М.: Дрофа, 1996. Задача 677). Мы не будем приводить это решение, приведём лишь совершенно удивительный, на наш взгляд, ответ. Оптимальным является треугольник ABC, у которого $AB = 1$, $\angle A = 60°$, а высота, опущенная на сторону AB, равна $\cos 10°$. Что здесь необычного, спросите Вы ? Дело в том, что мы никогда не встречали ни одной экстремальной задачи (а математическая специальность авторов этой статьи — теория экстремума), у которой в ответе фигурировал бы угол 10°. Бывают «табличные» углы (120°, 90°, 60° и т. д.), на худой конец 72°, 36°... Но чтобы угол в 10° возник в совершенно естественной задаче на минимум — это удивительно!

Игорю Фёдоровичу везло на подобные вещи — либо необычные, нестандартные задачи, либо совершенно удивительные ответы в естественных, казалось бы, задачах. Приведём здесь ещё один подобный пример. Каждый из вас на уроках геометрии имел дело с развёртками многогранников. Развёртка, наряду с сечением, помогает свести стереометрическую задачу к одной или нескольким планиметрическим. А задавали ли Вы себе вопрос: почему развёртка вообще существует? Всегда ли многогранник можно развернуть на плоскость? Вдруг какие-то грани на развёртке пересекутся? Тогда фигуру, получающуюся в развёртке, нельзя будет вырезать из одного плоского листа бумаги. Проблема существования подобных аномальных развёрток долгое время занимала умы геометров. В результате были построены примеры многогранников, чьи развёртки нельзя уложить на плоскость без самопересечений. Примеры были, конечно же, сложные. Но в 1997 году московский математик Алексей Тарасов (в то время он был студентом мехмата МГУ) придумал совершенно элементарный пример: он обнаружил, что существуют правильные треугольные усечённые пирамиды, развёртки которых имеют самопересечения. Узнав о примере Тарасова, Игорь Фёдорович тут же формулирует его в виде задачи и включает в вариант III Соросовской олимпиады. Вот эта задача.

Задача 8. *Пусть $ABCD$ — правильная треугольная пирамида с основанием ABC и плоскими углами при вершине D, равными α. Плоскость, параллельная ABC пересекает AD, BD и CD в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Поверхность многогранника $ABCA_1B_1C_1$ разрезана по пяти рёбрам: A_1B_1, B_1C_1, C_1C, CA и AB. При каких значениях α получившаяся развёртка будет обязательно накрывать сама себя*?

Всё-таки удивительная вещь — геометрия! В какой ещё науке новейшие достижения (а пример Тарасова, несомненно, является таковым) могут быть на следующий день принесены в класс для разбора со школьниками или предложены в качестве задачи на олимпиаде? Интересно, что задачу эту Игорь Фёдорович поставил под номером 2 (из пяти, предлагавшихся в первый день олимпиады), т. е. как лёгкую! Но главным образом интересен и необычен ответ. Ответ такой: при $\alpha \geqslant 100°$. Когда первый автор этой статьи проводил разбор задач после олимпиады, сразу несколько человек в зале воскликнули: «А разве может быть в геометрической задаче такой ответ? Сто градусов — это ведь относится скорее к физике!» (Имелась в виду, видимо, температура кипения воды в нормальных условиях.) И ведь они правы. Каждый, кто серьёзно занимался геометрией, знает, что в нормальной геометрической задаче такого ответа быть не может! И тем не менее...

Задача 9. *Обязательно ли является равнобедренным треугольник, если треугольник с вершинами в основаниях его биссектрис — равнобедренный?*

Решение этой задачи (см.: Шарыгин И. Ф. Геометрия 9–11. М.: Дрофа, 1996. Задача 500) не столь простое, как может показаться на первый взгляд. Это один из немногих случаев, когда И. Ф. Шарыгин не нашёл геометрического решения задачи, и прибег к вычислениям. Скорее всего, чисто геометрического решения здесь не существует, что ясно уже из ответа. А ответ весьма неожиданный: треугольник не обязательно равнобедренный, но только в том случае, когда один из его углов лежит в интервале $\left(\arccos\frac{\sqrt{17}-5}{4},\ \arccos\left(-\frac{1}{4}\right)\right)$, т. е. примерно от 102° до 104°. Если же треугольник не имеет тупых углов, или имеет, но тупой угол не лежит в этом узком интервале, то треугольник — обязательно равнобедренный.

Перед формулировкой следующей задачи Шарыгина напомним, что такое прямая Симсона. Даны треугольник ABC и точка M в плоскости этого треугольника. Три проекции точки M на стороны треугольника ABC лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда M лежит на окружности, описанной около треугольника ABC. Эта прямая называется прямой Симсона точки M относительно треугольника ABC.

Задача 10 (прямая Симсона n-угольника). *Дан четырёхугольник $ABCD$, вписанный в окружность, и произвольная точка M этой окружности. Точка M проецируется на прямые Симсона этой точки относительно четырёх треугольников ABC, ABD, ACD, BCD. Тогда четыре получившиеся проекции лежат на одной прямой (прямой Симсона точки M относительно четырёхугольника $ABCD$).* Далее по индукции определяется прямая Симсона n-угольника.

Пусть дан n-угольник, вписанный в окружность, и произвольная точка M этой окружности. M проецируется на прямые Симсона этой точки относительно всех n $(n-1)$-угольников с вершинами в вершинах данного n-угольника. Тогда n получившихся проекций лежат на одной прямой (прямой Симсона точки M относительно n-угольника).

Решение. Смотри в книге (Шарыгин И. Ф. Геометрия 9–11. М.: Дрофа, 1996. Задача 613).

Задача 11. *В данном треугольнике провели медиану к наибольшей стороне, в каждом из получившихся двух треугольников проделали то же самое, получили четыре треугольника и т. д. Доказать, что все получающиеся таким образом треугольники можно разбить на конечное число классов подобных между собой треугольников.*

Решение. Смотри в книге (Шарыгин И. Ф. Геометрия 9–11. М.: Дрофа, 1996. Задача 676).

Задача 12. *Вокруг окружности радиуса* 1 *описан многоугольник площади* S_1. *Точки касания его сторон с окружностью соединили, получив многоугольник площади* S_2. *Каково наименьшее возможное значение суммы* $S_1 + S_2$?

Ответ в задаче: 6. Достигается на квадрате и только на нём. Ни авторского, ни какого-либо другого решения этой задачи мы, увы, не знаем. Сама задача была сообщена Игорем Фёдоровичем в частной беседе с первым автором этой статьи, было это около 20 лет назад. Шарыгин был немного разочарован «неинтересным» ответом. Говорил, что во время расчётов возлагал надежды на один пятиугольник, в котором число шесть почти достигалось, однако потом выяснилось, что он всё равно хуже квадрата. Насколько нам известно, результата этого он не публиковал, возможно, из-за громоздкости решения. А может и потому, что, как всегда, надеялся найти красивое геометрическое решение. Может быть это удастся Вам, дорогой читатель? Тогда присылайте свои решения нам — авторам статьи, на адрес редакции журнала «Квант». Ждём ваших решений и хотим вас призвать, как всегда призывал Игорь Фёдорович своих читателей и слушателей: «Занимайтесь геометрией! Польза геометрии не в достижении результата, а в самих занятиях! Потому что геометрия — это витамин для мозга!»

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ОЛИМПИАДЫ им. И. Ф. ШАРЫГИНА

Составители
А. А. Заславский, В. Ю. Протасов, Д. И. Шарыгин

Подписано в печать 1.03.2007 г. Формат 60 × 90 1/16. Бумага офсетная № 1.
Печать офсетная. Печ. л. 9,5. Тираж 3000 экз. Заказ № .

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (495)-241-74-83.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ФГУП «Полиграфические ресурсы».