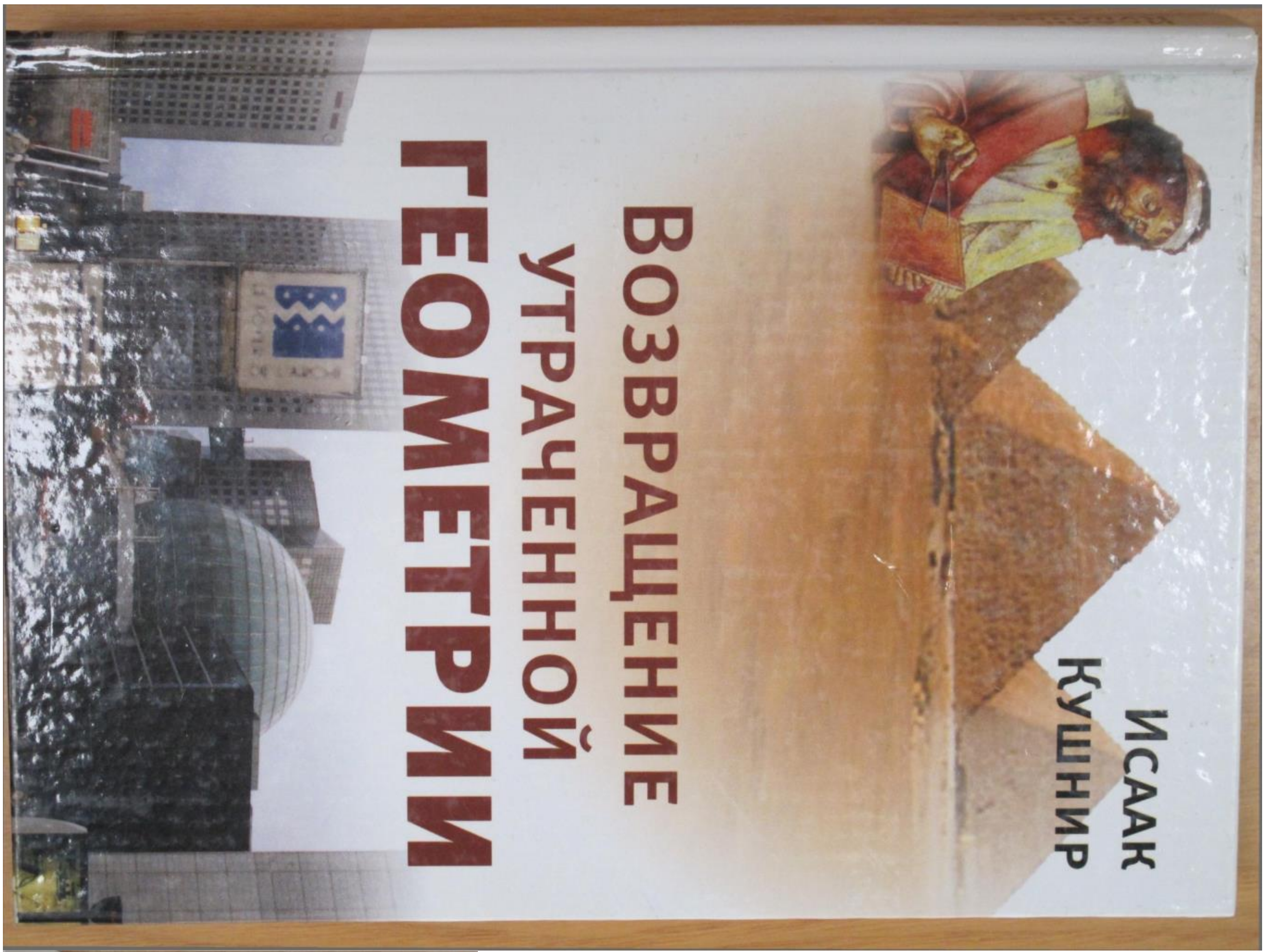

Исаак Кушнир

ВОЗВРАЩЕНИЕ УТРАЧЕННОЙ ГЕОМЕТРИИ

ФАКТ
ВИДАВНИЦТВО
Киев • 2004

Предисловие

Геометрия — одна из немногих наук, которой можно восхищаться всю жизнь, даже если вы не математик и не учитель математики. Благодаря логичности и ясности геометрии термин «эстетичность» чрезвычайно ей идет. По достаточно грустным причинам, которые описаны в первом разделе книги, геометрия Эвклида—Киселева начала исчезать из школьных учебников, несмотря на попытки считанных энтузиастов удержать ее от падения в пропасть. Утраты от этого едва ли не тотального исчезновения геометрии заметны уже сегодня, об этом говорят и пишут на разных уровнях. К сожалению, мольбы о помощи звучат слишком тихо среди шума и ритма сегодняшнего дня, и нет времени, чтобы «остановиться, оглянуться». Но сделать это можно и нужно. И тогда читатель не только вернет себе геометрию, но и себя геометрии.

С каждым маленьким и большим сюжетом книги, в котором переплетаются геометрия и жизнь, геометрия и эстетика, геометрия и красота, наконец, геометрия и любовь — это возвращение становится более реальным. Но произойдет оно только в том случае, если читать эту книгу, вооружившись карандашом, с вниманием и напряжением, которых достойна высокая математика.

Красота не терпит поспешности. Мы надеемся, что Вы сможете преодолеть неясности и достигнете взаимности с геометрией. По крайней мере, для этого и написана книга.

Исаак Кушнир

Геометрия на баррикадах

Геометрию, элементы которой всегда изучали в школе, уважительно называют *классической*. Ей более чем две тысячи лет. До середины XX столетия пиетет к ней был безграничным. Геометрию уважали светочи человечества, простые ценители, преподаватели и ученики. Вот «документы» (в хронологическом порядке):

Не знающий геометрию да не войдет в дверь Академии.

Платон, IV ст. до н. э.

Геометрия является могущественнейшим способом для использования наших мыслительных способностей и дает нам возможность правильно мыслить и рассуждать.

Галилео Галилей, XVII ст.

Среди равных разумом — при прочих равных условиях — преимущество у знающего геометрию.

Блез Паскаль, XVII ст.

Из всех известных нам наук только арифметика и геометрия не загрязнены ложным или недостоверным.

Рене Декарт, XVII ст.

Геометрия — правительница всех мысленных изысканий.

М. В. Ломоносов, XVIII ст.

Ни одна из наук, которая существует для того, чтобы облегчить или украсить жизнь человека, без помощи геометрии не могла бы не только развиваться и совершенствоваться, но даже и возникнуть. Для занятий философией не подходит разум, который не освещен ярким блеском геометрических знаний.

Феофан Прокопович, XVIII ст.

С Эвклидом меня познакомил ...учитель, и я прекрасно помню то чувство глубокого удовлетворения от настоящих геометрических доказательств.

Чарльз Дарвин, XIX ст.

Конкурировать с Эвклидом, создать новые начала геометрии в течение многих веков никто не решался; но критика его общих положений и частных рассуждений всегда присутствовала.

Ф. Коган, XX ст.

Работа Эвклида будет жить еще долго после того, как все сегодняшние учебники будут отменены и забыты.

Т. Хизе, XX ст.

...теоремы Эвклида и Пифагора значительно повлияли на характер мышления не только математиков.

Г. Харди, XX ст.

Мы почитаем Древнюю Грецию как колыбель западной науки. Там впервые было создано чудо мысли — логическая система, теоремы которой следовали одна из другой с такой точностью, что каждое из доказанных положений было абсолютно безусловным: я имею в виду геометрию Эвклида. Этот триумф мышления дал человеческому интеллекту уверенность в себе, необходимую для будущей деятельности. Если работа Эвклида не сумела зажечь ваши юношеские души, то вы не родились для того, чтобы быть теоретиками.

Альберт Ейнштейн, XX ст.

Поиски «геометрической ведьмы» начались в Европе в начале 60-х годов XX столетия. Апогей наступил в августе 1967 года. Именно тогда в Москве был проведен очередной Международный математический конгресс (ICM — International Congress of Mathematicians). На конгрессе присутствовали 4500 математиков из многих стран мира. Среди работавших пятнадцати секций нас интересует именно пятнадцатая: *Секция истории математики и вопросов преподавания математики*. Все докладчики здесь были единомышленниками: *математическое образование требует кардинального пересмотра, должны измениться методы изучения математики.*

Бельгийский профессор математики *Жорж Паппи* предложил радикально трансформировать самую «традиционную» из школьных математических наук — геометрию.

Для этого, считал ученый, *следует отменить преподавание системы Эвклида и для двенадцатилетних (!) школьников ввести понятие вектора любого количества измерений*. Более умеренную точку зрения высказал академик *А. Н. Колмогоров*. Но и он не удержался и процитировал в своем докладе мнение ученицы «колмогоровской» школы о том, что *высшая математика привлекательнее элементарной*.

Начиная именно с этого Международного математического конгресса, в шестидесятые годы прошлого столетия возникло движение, называемое «современным аспектом математики», а последователи этого движения называли себя «модернистами».

Советская педагогическая школа старалась не отстать от идей *Жоржа Паппи* и группы французских математиков *Дьедонне, Анри Картана, Мандельброта*, которые публиковались под общим псевдонимом *Бурбаки*. *«Сегодня, кажется, уже почти все согласны с тем, что традиционная система Эвклида, в русской учебной литературе наиболее последовательно проведенная в созданных еще в прошлом столетии учебниках Киселева, не заслуживает сохранения: ведь ни в науке, ни в практической жизни выпускнику средней школы далее не придется иметь дело со многими теоремами сложившегося курса геометрии и с типичными для этого курса методами рассуждений»*, — писал *И. Яглом* в предисловии к книге *Г. Шоке* «Геометрия». Ну а сам *Г. Шоке* высказался еще жестче: «*Конечно, треугольник всегда сохранит достойное место, полагающееся ему в силу того, что это простейший плоский многоугольник. (...) Но нужно решительно сдерживать развитие извращенного вкуса к изучению замечательных точек треугольника и подчас элегантных, но совершенно бесполезных его метрических свойств. Мы должны отдать предпочтение методам, основанным на... понятиях... множества*»[1].

[1] Шоке Г. Геометрия. — Москва: Мир, 1970. — С. 13.

В Советском Союзе стало крамолой преподавать геометрию *Эвклида—Киселева*. В школе появились теоретико-множественные структуры, а большой арсенал геометрических задач, выдержавших аппробацию в течение многих десятилетий, был откровенно заброшен. Геометрия гибла и, как казалось, навсегда. Как всегда и бывает, когда все же спохватились... было поздно — уже не только ученики, но и учителя не были знакомы с *замечательными точками треугольника*, результатами *Леонарда Эйлера*, *геометрией треугольника* вообще. Педагогическая общественность Советского Союза не обратила внимания на статью *Рене Тома*[1], напечатанную в журнале «Математика в школе» (№ 1 за 1973 год). А напрасно! Рене Том писал: «*Модернисты... были приведены своими философскими предпосылками к тому, чтобы, с одной стороны, покинуть такую идеальную почву для обучения поискам, такой неисчерпаемый кладезь упражнений, который дается эвклидовой геометрией, а с другой стороны, заменить его общими вопросами множественных логических структур, то есть материалом самым бедным, самым пустым, самым разочаровывающим по отношению к любой интуиции, какой только существует*». Анализируя причины возникновения модернизма, Рене Том подытоживает: «Настало время отбросить лживые обещания».

Время торжествует... В 1984 году в городе Аделаида (Австралия) прошел V Международный конгресс математического образования (ICME). Вот некоторые выводы конгресса, сделанные по результатам дискуссии (цитируется по протоколу): «Участники конгресса подчеркнули значение геометрии для формирования развития творческого мышления учеников... Эвклидову геометрию следует вернуть в школьные программы,

[1] Рене Том — один из самых известных французских математиков современности, в 1970 году ему была присуждена премия Филдса.

отведя ей то место, которое она имела до модернизации. Активизировать также внимание к роли этого предмета в привлечении школьников к математической теории».

Мне бы хотелось закончить этот рассказ цитатой из *Г. Фордера*, приведенной в книге *Г. С. М. Коксетера* и *С. Л. Грейтцера* «Новые встречи с геометрией»:

> «Тот, кто ни во что не ставит эвклидову геометрию, подобен человеку, который, вернувшись из чужих краев, поносит свой дом».

Стефан Банах и школьная геометрия

— Существуют ли в школьной геометрии открытия? — с таким вопросом обратился лектор к группе слушателей-учителей и получил отрицательный ответ: «Перестаньте, какие могут быть открытия в древней геометрии, да еще и в школе».

Но лектор не согласился:

— По-моему, открытия существуют, и я попробую вас в этом убедить.

Рассмотрим три формулы:

$$r = \frac{S}{p} \quad (1); \qquad R = \frac{S}{p_H} \quad (2); \qquad r_{\text{в. с.}} = \frac{3V}{S_{\text{п.}}} \quad (3).$$

Здесь r — радиус окружности, вписанной в треугольник;

S — площадь треугольника;

p — полупериметр треугольника;

R — радиус окружности, описанной вокруг треугольника;

p_H — полупериметр ортоцентрического треугольника, то есть треугольника, вершины которого — основания высот данного остроугольного треугольника;

$r_{\text{в. с.}}$ — радиус сферы, вписанной в многогранник;

V — объем многогранника;

$S_{\text{п.}}$ — площадь полной поверхности многогранника.

Сравним формулы (1) и (3). Аналогия их бесспорна: и «внешняя» (сравните: $r - r_{\text{в.с.}}$; $S - V$; $p - \frac{1}{3}S_{\text{п.}}$), и «внутренняя» — обе формулы доказываются при помощи разбиения треугольника (многогранника) на треугольники (тетраэдры) и подсчета сумм площадей (объемов) этих фигур.

Обратим внимание на формулу (2). Как ни странно, не только внешним видом, но и способом доказательства она аналогична формулам (1) и (3).

Действительно, пусть в остроугольном треугольнике ABC точки H_1, H_2, H_3 — основания высот (рис. 1). Докажем, что

$$OA \perp H_2H_3,$$

где O — центр окружности, описанной вокруг треугольника ABC.

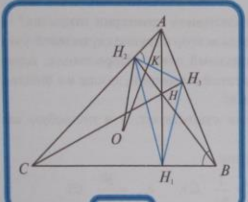

Рис. 1

Обозначим точку пересечения OA и H_2H_3 через K. Поскольку

$$\angle AH_2H_3 = \angle B,$$

то

$$\angle AKH_3 = \angle AH_2K + \angle H_2AK = \angle B + (90^\circ - \angle B) = 90^\circ.$$

Следовательно, площадь S_1 четырехугольника AH_2OH_3 будет равна

$$S_1 = \frac{1}{2} OA \cdot H_2H_3.$$

Аналогично, площади S_2 и S_3 четырехугольников BH_3OH_1 и CH_1OH_2 будут соответственно равны:

$$S_2 = \frac{1}{2} OB \cdot H_1H_3, \quad S_3 = \frac{1}{2} OC \cdot H_1H_2.$$

Таким образом, имеем:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = \frac{1}{2} R(H_2H_3 + H_1H_3 + H_1H_2) = R \cdot p_H.$$

— Следовательно, как мы видим, — продолжал лектор, — формула (2) и «внутренне» аналогична формулам (1) и (3).

— Какое же это открытие?! — возразил один из слушателей. — Не более чем **аналогия**! Неужели это так важно?!

— Считаю необходимым в ответ процитировать великого математика *Стефана Банаха*:

> «Математик — это тот, кто умеет находить аналогии между утверждениями;
> более сильным является тот математик, который устанавливает аналогии между доказательствами;
> сильнейшим является тот математик, который замечает аналогии теорий;
> но можно представить себе и такого, кто между аналогиями видит аналогии».

И, в заключение, лектор сказал:

— Увидеть новую, ранее никем не замеченную аналогию (во всяком случае — не напечатанную) — это открытие, с которым можно идти на урок. Что может быть более ценным?!

«Разве это не сумасшествие?!»
(Рассказ молодого учителя)

Эмоция на уроке... Никто этому не учит, и нигде об этом не прочитаешь. Соображай сам, дорогой друг! Соображай! Кажется, что может быть легче: **теорема косинусов**. Но доказательство формулы скучное... Как убедить детей в важности этой теоремы, придумать не получалось. Точнее сказать, я не находил таких эмоциональных аргументов, которые бы «зажгли огонь». Мне помог экспромт на уроке, который теперь будет зафиксирован, потому что результат превзошел все ожидания. Итак, вместо блеклого «объяснения нового материала» — прямой формулировки теоремы и ее доказательства, я предложил ученикам... самостоятельную работу, причем не акцентируя на ней особого внимания — просто как обычное тривиальное задание:

В треугольнике ABC даны стороны a, b, c. Найти углы A, B и C этого треугольника.

В классе, в котором была довольно большая группа сильных учеников, возникла какая-то недобрая тишина. Но вот... девочка, эксцентричность которой была известна всем, пронзительно запротестовала: «Разве это не сумасшествие?! Разве

это возможно — имея только стороны, искать углы?! Это же разные единицы измерения!» Девочка едва сдержалась, чтобы не покрутить пальцем у виска — не позволило уважение к учителю.

— *Задача захватила, задача взволновала! Вот оно — мгновение истины*, — подумал я. Можно начинать...

— *Запишите тему урока*:

ТЕОРЕМА КОСИНУСОВ.

В ОТЛИЧИЕ ОТ УЧЕБНИКА

Вспомни школьные годы, дорогой читатель! Если ты не был равнодушен к математике, а хотел учиться, то тебе непременно знакомо «хулиганское» желание решить хотя бы одну задачу или пример лучше, чем предлагает уважаемый школьный учебник. А еще лучше — доказать теорему способом, отличным от предложенного авторами этого учебника. Ну что же — хорошее желание! Попробуем тебе в этом помочь и рассмотрим несколько известных теорем, доказательства которых отличаются от обычных доказательств, предложенных в действующих школьных учебниках. При этом предлагаемые доказательства ни в коей мере не претендуют на то, чтобы называться наилучшими, самыми легкими или самыми короткими. Привлекательность их состоит именно **в отличии от предложенных в учебнике**.

Теорема об угле с вершиной внутри круга

Хорды AB и CD пересекаются в точке K (рис. 2). Доказать, что

$$\angle AKD = \frac{1}{2}(\cup AD + \cup CB).$$

Доказательство.

Проведем хорду CE, которая будет параллельна хорде AB. Тогда

$$\angle AKD = \angle ECD,$$

но

$$\angle ECD = \frac{1}{2} \cup EAD = \frac{1}{2}(\cup EA + \cup AD).$$

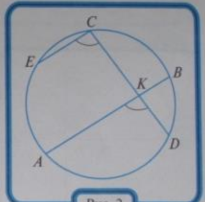

Рис. 2

Поскольку хорды EC и AB параллельны, то

$$\cup EA = \cup CB,$$

следовательно,

$$\angle AKD = \frac{1}{2}(\cup AD + \cup CB),$$

что и требовалось доказать.

Теорема о высоте прямоугольного треугольника

В прямоугольном треугольнике ACB ($\angle ACB = 90°$) имеет место формула:

$$CH_3 = \sqrt{BH_3 \cdot H_3A},$$

где H_3 — основание высоты треугольника, проведенной к гипотенузе.

Доказательство.

Опишем вокруг данного прямоугольного треугольника ACB окружность (рис. 3). Поскольку вершина C является *ортоцентром* (точкой пересечения высот) прямоугольного треугольника, то

по теореме о точке, симметричной ортоцентру относительно одной из сторон треугольника,[1]

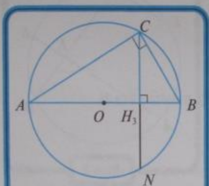

Рис. 3

$CH_3 = H_3N$, где N — точка пересечения продолжения высоты с описанной вокруг треугольника окружностью.

По теореме о произведении отрезков хорд имеем:

$$CH_3 \cdot H_3N = AH_3 \cdot H_3B,$$

или

$$CH_3^2 = AH_3 \cdot H_3B,$$

следовательно,

$$CH_3 = \sqrt{BH_3 \cdot H_3A},$$

что и требовалось доказать.

Теорема о точке пересечения высот треугольника

Докажем, что высоты AH_1, BH_2, CH_3 треугольника ABC пересекаются в одной точке.

Первый способ. Поскольку высоты треугольника ABC являются биссектрисами **ортоцентрического треугольника**, а последние пересекаются в одной точке, то теорема доказана.

[1] Обратите внимание на эту теорему. Здесь и далее доказательства теорем и формул, а также понятия и факты, выделенные цветом, можно найти в книгах:
Кушнир И. А. Треугольник и тетраэдр в задачах. — Киев: Факт, 2004.
Кушнир И., Финкельштейн Л. Геометрия 7—9. Школа боевого искусства. — Киев: Факт, 1999.
Кушнір І. А. Методи розв'язання задач з геометрії. Книжка для вчителя. — Київ: Абрис, 1994.

Второй способ. Рассмотрим три окружности $\gamma_a, \gamma_b, \gamma_c$, симметричные окружности, описанной вокруг треугольника ABC, относительно его сторон BC, AC и AB, соответственно (рис. 4).

Докажем сперва, что эти три окружности пересекаются в одной точке.

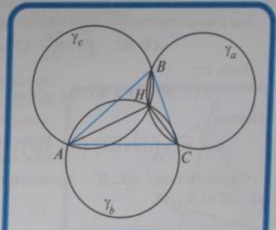

Рис. 4

Пусть H — точка пересечения окружностей γ_a и γ_b.

Вершины углов BAC и BHC лежат на симметричных относительно BC окружностях, причем они находятся по одну сторону от отрезка BC. Поэтому

$$\angle BHC = 180° - \angle BAC.$$

Аналогично, $\angle AHC = 180° - \angle ABC$.

Следовательно,

$$\angle AHB = 360° - \angle BHC - \angle AHC = \angle BAC + \angle ABC = 180° - \angle ACB,$$

то есть точка H принадлежит также и окружности γ_c.

Поскольку радиусы окружностей $\gamma_a, \gamma_b, \gamma_c$ равны, то

$$\angle ABH = \angle ACH, \quad \angle BAH = \angle BCH, \quad \angle CAH = \angle CBH.$$

Сумма всех этих углов равна сумме углов треугольника ABC, поэтому

$$\angle BAH + \angle ABH + \angle CBH = 90°,$$

то есть $AH \perp BC$.

Аналогично доказывается, что $BH \perp AC$ и $CH \perp AB$.

Третий способ. Рассмотрим вектор $\overline{OX}=\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}$, где O — центр описанной вокруг треугольника ABC окружности, X — произвольная точка плоскости. Докажем, что точка X — точка пересечения высот треугольника ABC.

Для доказательства этого достаточно проверить, что

$$AX\perp BC,\quad BX\perp AC,\quad CX\perp AB.$$

Ясно, что

$$\overline{AX}=\overline{AO}+\overline{OX}=\overline{AO}+\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}=\overline{OB}+\overline{OC}.$$

Поэтому

$$\overline{AX}\cdot\overline{BC}=\left(\overline{OB}+\overline{OC}\right)\cdot\left(\overline{OC}-\overline{OB}\right)=\overline{OC}^2-\overline{OB}^2=0.$$

Следовательно, $AX\perp BC$. Аналогично доказывается, что $BX\perp AC$ и $CX\perp AB$.

Теорема о биссектрисе внутреннего угла треугольника

Биссектриса внутреннего угла треугольника делит противоположную сторону треугольника на части, пропорциональные двум другим сторонам этого треугольника.

Первый способ. Пусть AL — биссектриса угла BAC треугольника ABC (рис. 5). Обозначим площади треугольников ALC и ALB соответственно S_1 и S_2. Поскольку AH_1 — высота обоих вышеупомянутых треугольников, то

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{CL}{LB}. \qquad (1)$$

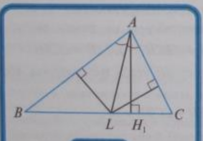

Рис. 5

Высоты треугольников ALC и ALB, опущенные на стороны AC и AB из точки L, равны между собой.

Следовательно,

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{AC}{AB}. \qquad (2)$$

Сравнивая равенства (1) и (2), получаем:

$$\frac{AC}{AB}=\frac{CL}{LB},$$

что и требовалось доказать.

Второй способ. Из вершин B и C опустим перпендикуляры BM и CN на прямую AL (рис. 6). Треугольники AMB и ANC — подобны:

$$\frac{AC}{AB}=\frac{CN}{BM}. \qquad (1)$$

Треугольники LMB и LNC — также подобны:

$$\frac{CL}{LB}=\frac{CN}{BM}. \qquad (2)$$

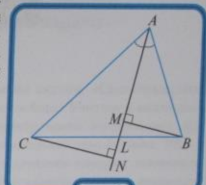

Рис. 6

Сравнивая равенства (1) и (2), имеем: $\frac{AC}{AB}=\frac{CL}{LB}$.

Третий способ. Вокруг треугольника ABC опишем окружность и продлим биссектрису AL угла A до пересечения с этой окружностью в точке W (рис. 7).

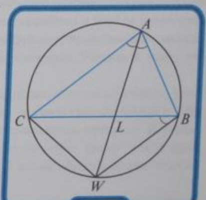

Рис. 7

Из подобия треугольников ACL и BWL имеем:

$$\frac{AC}{WB}=\frac{CL}{WL}.$$

Аналогично, из подобия треугольников ALB и CLW:

$$\frac{AB}{WC}=\frac{LB}{WL}.$$

Учитывая, что

$$WB=WC,$$

имеем:

$$\frac{AC}{AB}=\frac{CL}{LB}.$$

Театр одной задачи

Урок начинался непривычно скучно. «Самостоятельная работа», — бледным голосом сообщил Учитель и начал диктовать условие задачи: *В прямоугольном треугольнике АСВ проведена высота СН. В прямоугольные треугольники ВНС и АНС вписаны эллипсы, радиусы кривизны которых соответственно равны* ρ_1 *и* ρ_2. *Найти радиус кривизны эллипса, вписанного в треугольник АСВ.*

Класс недоуменно примолк. Выражение лица Учителя было непроницаемым. Создавалось впечатление, что ему снилось что-то далекое от самостоятельной работы и вообще геометрии. Но если бы ученики были внимательнее, то непременно заметили бы, как напряженно прислушивается Учитель к тому, что происходит в классе.

Ученики растерянно спрашивают: «Что такое эллипс, Учитель?» Учитель «просыпается» и раздраженно бросает: «Не знаю!» Класс заполняется ошеломленным шепотом. И снова, но уже более решительно, вопрос: «Что такое радиус кривизны, мы этого не учили?» И снова обидно-медлительное: «Не знаю...»

В классе учился ОН — «вундер», победитель всевозможных олимпиад, ученик с блестящей реакцией на задачи. И именно в этот момент у НЕГО «срабатывают» навыки поведения в критических ситуациях. ОН принимает удар на себя — звонким голосом объявляет на весь класс: «Если он не знает, то нам этого и не нужно!» — и... **решает задачу**.

— Поскольку треугольники *ACB*, *BHC* и *AHC* подобны (рис. 8), то их площади относятся как квадраты соответствующих **линейных элементов** (e, e_1, e_2):

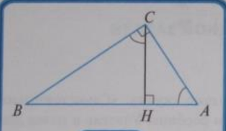

Рис. 8

$$\frac{e_1^2}{e^2} = \frac{S_1}{S}, \qquad (1)$$

$$\frac{e_2^2}{e^2} = \frac{S_2}{S}, \qquad (2)$$

где S, S_1 и S_2 — площади треугольников *ACB*, *BHC* и *AHC* соответственно.

Сложим равенства (1) и (2):

$$\frac{e_1^2 + e_2^2}{e^2} = \frac{S_1 + S_2}{S}.$$

Поскольку $S_1 + S_2 = S$, то

$$e_1^2 + e_2^2 = e^2.$$

Вместо e, e_1, e_2 можно подставить любые линейные элементы, даже «радиусы кривизны».

Ученики не помнят себя от радости, но некоторые из них уже успели заметить, что **именно так можно доказать и теорему Пифагора**.

«Конечно», — говорит довольный Учитель.

У него есть повод быть довольным. Ведь театральное действие удалось — эмоциональный успех урока и его эффективность сомнений не вызывали.

Что такое идейная задача

В течение длительного времени интеллектуальный рынок заполняли идейные произведения искусства, то есть произведения, прославляющие идеи руководящей партии. Идейность овладела даже... школьными математическими задачами. Именно их во времена советской власти называли *идейными задачами*.

Сегодня уже можно вслух называть идейной задачей такую, в которой **иллюстрируется или пропагандируется желательно не одна, а несколько плодотворных *математических идей***. Эта задача **с коротким условием** должна быть источником для **рождения** других, желательно также **идейных**, задач. И, наконец, она может быть просто **красивой, демонстрировать эстетику геометрии, восхищать, влюблять в себя, запоминаться.**

Таких задач не так уже и много. Их необходимо «отлавливать», как жемчужинки, и обрабатывать, как алмазы. А еще лучше создавать новые — свои... если удастся!

Многолетний опыт борьбы за идейную задачу позволяет мне классифицировать поиски таких задач.

1. Пропаганда какого-то свойства фигуры как демонстрация значимости факта

Задача. Пусть произвольная точка X находится внутри нетупоугольного треугольника ABC. Точки X_1, X_2, X_3 — проекции точки X на стороны BC, AC и AB соответственно. Доказать, что если точка X совпадает с ортоцентром треугольника $X_1X_2X_3$, то она является центром окружности, описанной вокруг треугольника ABC.

Доказательство.

Продолжим отрезки XX_1, XX_2, XX_3 до пересечения со сторонами треугольника $X_1X_2X_3$ (рис. 9). Поскольку точка X — ортоцентр треугольника $X_1X_2X_3$, то стороны этого треугольника параллельны соответствующим сторонам треугольника ABC, а фигуры $AX_2X_1X_3$, $BX_1X_2X_3$, $CX_2X_3X_1$ — параллелограммы, и отрезки XX_1, XX_2, XX_3 лежат на серединных перпендикулярах к сторонам BC, AC, AB. Следовательно, точка X — центр окружности, описанной вокруг треугольника ABC.

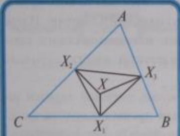

Рис. 9

2. Убедительное применение в неявной ситуации свойств, которые ошибочно считаются несостоятельными

Задача. В треугольнике ABC медианы AM_1 и BM_2 взаимно перпендикулярны. Доказать, что

$$\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B \geq \frac{2}{3}.$$

Доказательство.

Проведем высоту $CH_3 = h_c$ и медиану $CM_3 = m_c$. Покажем, что

$$\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B = \frac{AB}{h_c}.$$

Действительно (рис. 10),

$$\operatorname{ctg} A = \frac{AH_3}{h_c},$$

$$\operatorname{ctg} B = \frac{BH_3}{h_c},$$

$$\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B = \frac{AH_3 + BH_3}{h_c} = \frac{AB}{h_c}.$$

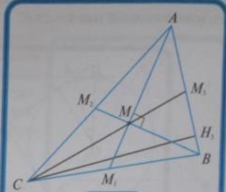

Рис. 10

Ясно, что $h_c \leq m_c$, а

$$m_c = 3MM_3 = 3 \cdot \frac{AB}{2} = \frac{3}{2} AB$$

(M — точка пересечения медиан треугольника ABC).

Следовательно, $\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B \geq \frac{2}{3}$.

3. Иллюстрация метода решений

Для примера возьмем *метод вспомогательного элемента*, где вспомогательным элементом будем считать **угол**.

Задача. Радиусы двух непересекающихся окружностей равны R и r. Общие внутренние касательные этих окружностей взаимно перпендикулярны. Найти площадь треугольника, ограниченного этими касательными и общей внешней касательной к окружностям.

Решение.

Пусть S_x — искомая площадь треугольника ABC (рис. 11), D, E, F, K — точки касания, O_1, O_2 — центры данных окружностей. Введем **вспомогательный угол** $\alpha = \angle BAC$.

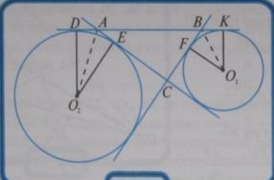

Рис. 11

Тогда

$$\angle FO_1K = 180° - \angle FBK = \angle ABC = 90° - \alpha.$$

Следовательно,

$$S_x = \frac{1}{2} AC \cdot CB = \frac{1}{2}(AE + EC)(CF + FB) =$$

$$= \frac{1}{2}(AE + R)(r + BF) = \frac{1}{2}(R\,\mathrm{ctg}\,\angle O_2AE + R)(r + r\,\mathrm{tg}\,\angle FO_1B) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(R\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2} + R\right)\left(r + r\,\mathrm{tg}\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2} Rr\left(\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2} + 1\right)\frac{2}{1 + \mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}} = Rr.$$

Ответ: Rr.

4. Задачи, в которых четко поставлена цель — тренаж алгебраических или тригонометрических преобразований

Задача. В равностороннем треугольнике найти зависимость между его стороной и отрезками m, n, p, которые являются расстояниями от произвольной точки Q, расположенной в этом треугольнике, до его вершин.

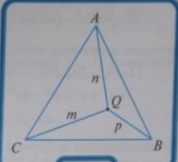

Рис. 12

Решение.

Пусть сторона равностороннего треугольника ABC равна x и $\angle QAC = \alpha$ (рис. 12). Из треугольника ACQ:

$$\cos\alpha = \frac{n^2 + x^2 - m^2}{2nx}. \qquad (1)$$

Из треугольника QAB:

$$p^2 = n^2 + x^2 - 2nx\cos(60° - \alpha). \qquad (2)$$

Поскольку

$$\cos(60° - \alpha) = \frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha$$

и

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \frac{\sqrt{4n^2x^2 - (n^2 + x^2 - m^2)^2}}{2nx},$$

то

$$\cos(60° - \alpha) = \frac{1}{2}\cdot\frac{n^2 + x^2 - m^2}{2nx} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{4n^2x^2 - (n^2 + x^2 - m^2)^2}}{2nx}.$$

Тогда из (2) имеем:

$$p^2 = n^2 + x^2 - \frac{1}{2}(n^2 + x^2 - m^2) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{4n^2x^2 - (n^2 + x^2 - m^2)^2},$$

откуда

$$\sqrt{3}\cdot\sqrt{4n^2x^2 - (n^2 + x^2 - m^2)^2} = n^2 + x^2 + m^2 - 2p^2.$$

Возведем полученное равенство в квадрат, имеем:

$$12n^2x^2 - 3n^4 - 3x^4 - 3m^4 - 6n^2x^2 + 6m^2x^2 + 6m^2n^2 =$$

$$= n^4 + x^4 + m^4 + 4p^4 + 2n^2x^2 + 2n^2m^2 + 2x^2m^2 -$$

$$- 4n^2p^2 - 4x^2p^2 - 4m^2p^2$$

Отсюда получим требуемую зависимость:

$$x^4 - x^2(n^2 + m^2 + p^2) + n^4 + m^4 + p^4 = m^2n^2 + n^2p^2 + m^2p^2.$$

5. Эстетичность очевидности, которую сложно доказать

Задача. Доказать, что если в трапеции $ABCD$ (AD и BC — основания, $AD > BC$) $AB + BD = AC + CD$, то трапеция равнобедренная.

Доказательство.

Пусть $BD = d_1$, $AC = d_2$, $AD = b$, $AB = a_1$, $DC = a_2$, $BC = a$ (рис. 13). Учитывая условие, можно утверждать, что периметры треугольников ABD и ACD равны между собой. Обозначим их $2p$. Поскольку $S_{ABD} = S_{ACD}$, то

$$p(p - a_1)(p - d_1)(p - b) = p(p - a_2)(p - d_2)(p - b),$$

следовательно,

$$p^2 - (a_1 + d_1)p + a_1d_1 = p^2 - (a_2 + d_2)p + a_2d_2,$$

откуда $a_1d_1 = a_2d_2$.

По условию,

$$a_1 + d_1 = a_2 + d_2. \qquad (1)$$

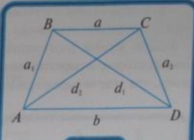

Рис. 13

Поэтому

$$\frac{a_2d_2}{d_1} + d_1 = a_2 + d_2,$$

откуда

$$\frac{a_2}{d_1}(d_2 - d_1) = d_2 - d_1.$$

Поскольку $a_2 \neq d_1$, то $d_1 = d_2$. Тогда из (1) имеем: $a_1 = a_2$ — что и требовалось доказать.

6. Использование известных и поиски новых стандартных ситуаций

Задача. В треугольнике ABC проведена высота CH и биссектриса CK, точка N — проекция точки K на сторону BC, $\angle ABC = \alpha$, отрезки HN и AC — параллельны. Найти углы BAC и ACB.

Решение.

Опишем окружность вокруг четырехугольника $CHKN$ (рис. 14). Имеем:

$$\angle ACB = 2\angle KCB =$$

$$= 2\angle KHN = 2\angle KAC =$$

$$= 2\angle BAC.$$

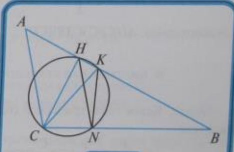

Рис. 14

Отсюда находим требуемые углы:

$$\angle BAC = \frac{180° - \alpha}{3},$$

$$\angle ACB = \frac{2(180° - \alpha)}{3}.$$

7. Связь геометрических и алгебраических идей

Задача. Сумма расстояний между серединами противоположных сторон четырехугольника равна его полупериметру. Доказать, что этот четырехугольник — параллелограмм.

Доказательство.

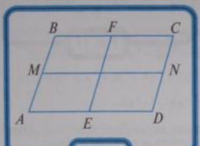

Рис. 15

Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник, точки M, N, E, F — середины сторон AB, CD, AD и BC, соответственно (рис. 15). Тогда

$$MN \le \frac{AD+BC}{2}, \qquad (1)$$

$$EF \le \frac{AB+CD}{2}. \qquad (2)$$

Сложим равенства (1) и (2). Имеем

$$MN+EF \le \frac{AB+BC+CD+DA}{2} = p$$

(p — полупериметр четырехугольника $ABCD$), причем знак равенства возможен только тогда, когда

$$MN = \frac{AD+BC}{2} \text{ и } EF = \frac{AB+CD}{2}.$$

Следовательно, $AD \parallel BC$ и $AB \parallel CD$.

8. Виртуальная реальность формулы

Задача. Какое геометрическое содержание можно придать формуле

$$\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$$

$(A+B+C=\pi)$?

Решение.

Докажем, что эта формула «является» формулой Герона. Как известно,

$$p-a=r\operatorname{ctg}\frac{A}{2}.$$

Отсюда

$$\operatorname{ctg}\frac{A}{2}=\frac{p-a}{r}.$$

Аналогично,

$$\operatorname{ctg}\frac{B}{2}=\frac{p-b}{r}, \quad \operatorname{ctg}\frac{C}{2}=\frac{p-c}{r}.$$

Следовательно, данная в условии формула будет иметь вид:

$$\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{r^3}=\frac{p-a}{r}+\frac{p-b}{r}+\frac{p-c}{r},$$

или

$$\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{r^3}=\frac{3p-a-b-c}{r}=\frac{3p-2p}{r}=\frac{p}{r}.$$

Отсюда

$$(p-a)(p-b)(p-c)=pr^2, \quad p(p-a)(p-b)(p-c)=p^2r^2.$$

Учитывая, что $S=pr$, имеем

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

9. Провоцирующая скромность простоты условия задачи

Задача. Доказать, что треугольник ABC равен треугольнику $A_1B_1C_1$, если $BC=B_1C_1$, $\angle BAC=\angle B_1A_1C_1$ и высота AH_1 равна высоте A_1H_1'.

3 — 4-1664

Доказательство.

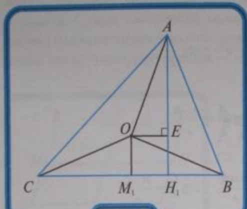

Рис. 16

Пусть O — центр окружности, описанной вокруг треугольника ABC (рис. 16), точка M_1 — середина BC.

Поскольку

$$\angle M_1OB=\angle A$$

(соответственно

$$\angle M_1'O_1B_1=\angle A_1$$

в треугольнике $A_1B_1C_1$), то

$$\Delta M_1OB=\Delta M_1'O_1B_1,$$

следовательно,

$$OM_1=O_1M_1' \text{ и } OB=O_1B_1.$$

Пусть точка E — проекция точки O на высоту AH_1 (точка E_1 определяется аналогично). Тогда прямоугольные треугольники AEO и $A_1E_1O_1$ равны. Действительно,

$$AO=BO=B_1O_1=A_1O_1,$$

$$AE=AH_1-EH_1=AH_1-OM_1=A_1H_1'-O_1M_1'=$$
$$=A_1H_1'-E_1H_1'=A_1E_1.$$

Следовательно, $OE=O_1E_1$. Но

$$OE=M_1H_1 \text{ и } H_1B=M_1B-M_1H_1,$$

откуда

$$H_1B=H_1'B_1 \text{ и } \Delta AH_1B=\Delta A_1H_1'B_1,$$

а поэтому $\angle B=\angle B_1$. Отсюда, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

Еще две замечательные точки

Замечательными точками треугольника принято считать точки: O — центр окружности, описанной вокруг треугольника; I — инцентр, центр окружности, вписанной в треугольник, H — ортоцентр, точка пересечения высот (иногда говорят — прямых, которым принадлежат высоты), M — центр тяжести, центроид, точка пересечения медиан треугольника.

Замечательные точки треугольника встречаются в огромном числе задач. Кроме своих непосредственных свойств, эти точки имеют другие чудесные свойства, с которыми мы часто будем встречаться в этой книге[1], но о которых нечасто говорят — это точки-*«труженики»*. **Если к ним обратиться за помощью, они помогут решить задачу.** Еще одно интересное свойство замечательных точек — это «скромность», ведь **мы используем замечательные точки часто интуитивно, считая это очевидным**. Например, можно вспомнить, как доказывается формула $S=r\cdot p$ — площадь треугольника равна произведению радиуса вписанной в треугольник окружности и полупериметра. Пока не используешь инцентр

[1] Для более детального знакомства с замечательными точками желательно иметь книги, приведенные в примечании на с. 18.

3*

Рис. 17

и не разобьешь треугольник на три треугольника с вершиной в точке I, формулу не докажешь.

Вот почему один из главных приемов решения задач — это метод, названный мною «Методом замечательных точек».

Но сила замечательных точек будет еще большей, если к **обычным четырем мы добавим еще две:**

1) точку пересечения биссектрисы внутреннего угла треугольника с окружностью, описанной вокруг этого треугольника; это три аналогичные точки: W_1, W_2, W_3 (рис. 17);

2) центр вневписанной окружности (это также три аналогичные точки I_a, I_b, I_c — рис. 18).

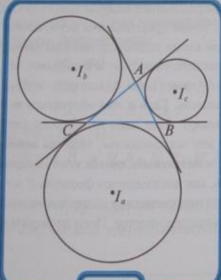

Рис. 18

О точках I_a, I_b, I_c

Центр вневписанной окружности — это точка пересечения биссектрис внутреннего и внешнего углов треугольника, или точка пересечения биссектрис двух его внешних углов.

Задача 1. В треугольнике ABC проведены биссектрисы BL и AK. Отрезок KL лежит на биссектрисе угла AKC. Найти угол A.

Решение.

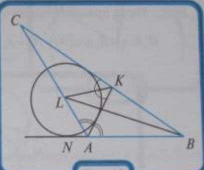

Рис. 19

В треугольнике ABC проведем биссектрисы BL и AK (рис. 19). Рассмотрим треугольник AKB. Поскольку, по условию, KL — биссектриса угла AKC, то точка L — центр вневписанной окружности треугольника AKB, которая касается стороны AK.

Следовательно,

$$\angle KAB = \angle KAC = \angle CAN$$

(N — точка касания вневписанной окружности с продолжением стороны BA треугольника ABC).

Поскольку угол NAB — развернутый, то

$$\angle KAB = \angle KAC = \angle CAN = 60^\circ,$$

а тогда $\angle BAC = 120^\circ$.

Ответ: 120°.

Задача 2. При помощи вневписанной окружности доказать, что $S = R \cdot p_H$, где S — площадь остроугольного треугольника ABC, R — радиус описанной окружности, p_H — полупериметр ортоцентрического треугольника $H_1H_2H_3$ (см. с. 11–12).

Доказательство.

Несложно показать, что вершина A треугольника ABC является центром вневписанной окружности треугольника $H_1H_2H_3$ (рис. 20).

Действительно, высота BH_2 является биссектрисой угла $H_3H_2H_1$, кроме того, $AH_2 \perp BH_2$, и, как известно, биссектрисы внешнего и внутреннего углов треугольника перпендикулярны. Пусть эта окружность касается прямой H_1H_2 в точке K. Тогда длина отрезка H_1K равна полупериметру треугольника $H_1H_2H_3$. Но из прямоугольного треугольника AKH_1:

$$H_1K = AH_1\cos(90^\circ - A) = h_a \sin A = \frac{2S}{a}\sin A = \frac{S}{R}.$$

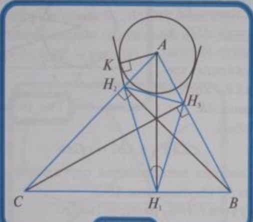

Рис. 20

Задача 3. Доказать, что точка касания вневписанной в треугольник окружности со стороной, инцентр и середина высоты, проведенной к этой же стороне, лежат на одной прямой.

Доказательство.

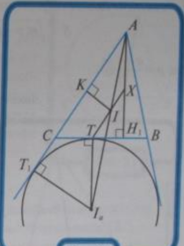

Рис. 21

Пусть вневписанная в треугольник ABC окружность с центром I_a касается стороны BC в точке T, а продолжения стороны AC — в точке T_1 (рис. 21). Пусть I — инцентр треугольника ABC и прямая TI пересекает высоту AH_1 в точке X. Докажем, что

$$AX = XH_1.$$

Очевидно, что треугольники I_aTI и AXI подобны, следовательно,

$$\frac{AX}{I_aT} = \frac{AI}{II_a}.$$

Проведем радиус IK вписанной окружности ($K \in AC$). Тогда

$$\frac{AI}{II_a} = \frac{AK}{KT_1}.$$

Но ведь

$$AK = p - a,\ KT_1 = AT_1 - AK = p - (p - a) = a$$

(p — полупериметр треугольника ABC, $a = BC$). Далее,

$$I_aT = \frac{S}{p-a},$$

потому что I_aT — радиус вневписанной окружности (S — площадь треугольника ABC).

Следовательно,

$$AX = I_aT \cdot \frac{AK}{KT_1} = \frac{S}{p-a} \cdot \frac{p-a}{a} = \frac{S}{a} = \frac{1}{2}h_a.$$

Поэтому, точка X — середина высоты AH_1.

Задача 4. Доказать формулу Герона:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где $p=\dfrac{a+b+c}{2}$.

Доказательство.

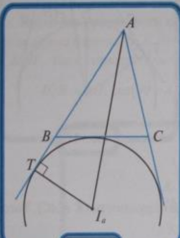

Рис. 22

Пусть I_a — центр вневписанной окружности, которая касается стороны BC треугольника ABC (рис. 22), T — точка касания этой окружности с прямой AB, r_a — радиус этой окружности, r — радиус вписанной в треугольник ABC окружности. Из треугольника I_aTB имеем:

$$r_a=(p-c)\operatorname{ctg}\frac{B}{2},$$

а поскольку

$$r=(p-b)\operatorname{tg}\frac{B}{2},$$

то $rr_a=(p-b)(p-c)$. Учитывая формулу

$$r_a=\frac{S}{p-a},$$

получим

$$\frac{S}{p}\cdot\frac{S}{p-a}=(p-b)(p-c),$$

откуда

$$S^2=p(p-a)(p-b)(p-c),\quad S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

что и требовалось доказать.

Точка W_i $(i=1,2,3)$

Рис. 23

Итак (см. определение на с. 36), точки W_i $(i=1,2,3)$ — это середины дуг BC, AC, AB, соответственно. Для удобства точку W_i иногда будем записывать просто: W (если других таких точек в задаче нет). Обратим внимание (рис. 23, точка I — инцентр треугольника ABC), что

через точку W_i проходит серединный перпендикуляр к соответствующей стороне треугольника ABC; справедлива «теорема трилистника»:

$$W_1B=W_1C=W_1I.$$

Задача 1. Доказать, что если $AW_1=BW_2=CW_3$, то треугольник ABC — равносторонний.

Доказательство.

Как известно, угол между биссектрисой AL_1 и высотой AH_1 находится по формуле:

$$\angle H_1AL_1=\frac{|\angle B-\angle C|}{2}.$$

Рис. 24

Обозначим: D_i $(i=1,2,3)$ — точка, диаметрально противоположная точке W_i (рис. 24). Пусть (для определенности)

$$\angle A\ge\angle B\ge\angle C.$$

Поскольку $W_1D_1\parallel AH_1$, то

$$\angle D_1W_1A=\angle W_1AH_1=\frac{\angle B-\angle C}{2}.$$

Аналогично,

$$\angle D_2W_2B=\frac{\angle A-\angle C}{2},\quad \angle D_3W_3C=\frac{\angle A-\angle B}{2}.$$

С другой стороны, прямоугольные треугольники W_1AD_1, W_2BD_2, W_3CD_3 равны (поскольку $W_1D_1=W_2D_2=W_3D_3=2R$ — диаметр описанной вокруг треугольника ABC окружности, а $AW_1=BW_2=CW_3$ — по условию). Следовательно,

$$\frac{\angle B-\angle C}{2}=\frac{\angle A-\angle C}{2}=\frac{\angle A-\angle B}{2},$$

откуда $\angle A=\angle B=\angle C$, что и требовалось доказать.

Задача 2. Доказать, что биссектриса AL_1 угла BAC делит угол OAH_1 пополам.

Доказательство.

Действительно (см. рис. 24),

$$\angle W_1AO=\angle OW_1A=\angle W_1AH_1.$$

Задача 3. (Австралийская олимпиада, 1982). Доказать, что $AW_1+BW_2+CW_3>2p$ (p — полупериметр треугольника).

Доказательство.

Рис. 25

Из треугольника AIB (рис. 25) имеем:

$$AI+IB>AB$$

(I — инцентр треугольника ABC). Аналогично,

$$BI+IC>BC,$$

$$CI+IA>AC.$$

Отсюда

$$AI+BI+CI>p. \qquad (1)$$

Из треугольника BW_1C имеем: $BW_1+CW_1>BC$, или, по «теореме трилистника», $2IW_1>BC$. Аналогично, $2IW_2>AC$ и $2IW_3>AB$. Следовательно,

$$IW_1+IW_2+IW_3>p. \qquad (2)$$

Из неравенств (1) и (2) получим требуемое неравенство.

Задача 4. Найти угол C неравнобедренного треугольника ABC, если центр окружности, описанной вокруг треугольника $M_1M_2M_3$, принадлежит биссектрисе этого угла (точки M_1, M_2, M_3 — середины сторон BC, AC, AB, соответственно).

Решение.

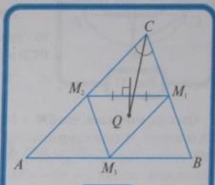

Рис. 26

Пусть Q — центр окружности, описанной вокруг треугольника $M_1M_2M_3$ (рис. 26). Поскольку точка Q принадлежит серединному перпендикуляру отрезка M_1M_2 и, по условию, биссектрисе угла ACB, то эта точка является «точкой W» треугольника CM_1M_2. Поэтому она лежит на окружности, описанной вокруг этого треугольника. Итак, четырехугольник CM_1QM_2 является вписанным в окружность, откуда

$$\angle M_1CM_2+\angle M_1QM_2=180^\circ.$$

Но $\angle M_1QM_2$ — центральный угол окружности, описанной вокруг треугольника $M_1M_2M_3$. Отсюда

$$\angle M_1QM_2=2\angle M_1M_3M_2=2\angle M_1CM_2.$$

Окончательно имеем:

$$3\angle M_1CM_2=180^\circ,\text{ или }\angle C=60^\circ.$$

Ответ: 60°.

Задача 5. Доказать, что в треугольнике ABC

$$AI \cdot IW = 2Rr$$

(R и r — радиусы описанной и вписанной окружностей, точка I — инцентр треугольника).

Рис. 27

Доказательство.

Пусть K — это точка касания вписанной в треугольник ABC окружности со стороной AB (рис. 27), DW — диаметр описанной окружности. Поскольку

$$\angle WAB = \angle WAC = \angle WDC,$$

то прямоугольные треугольники WCD и IKA подобны, откуда

$$\frac{CW}{IK} = \frac{DW}{AI}.$$

Отсюда, учитывая, что $CW = IW$, имеем

$$\frac{IW}{r} = \frac{2R}{AI}, \text{ или } AI \cdot IW = 2Rr.$$

Задача 6. Доказать (в обозначениях предыдущей задачи), что

$$\frac{IW_1 \cdot IW_3}{IB} = R.$$

Доказательство.

Имеем (рис. 28):

$$IW_1 = BW_1 = 2R\sin\frac{A}{2}$$

(из треугольника ABW_1 по следствию из теоремы синусов). Аналогично,

$$IW_3 = 2R\sin\frac{C}{2}.$$

Из прямоугольного треугольника IKB имеем:

$$BI = \frac{r}{\sin\frac{B}{2}}.$$

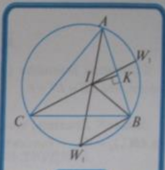

Рис. 28

Следовательно,

$$\frac{IW_1 \cdot IW_3}{IB} = \frac{4R^2 \sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}\sin\frac{B}{2}}{r}.$$

Учитывая, что

$$r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}\sin\frac{B}{2},$$

имеем

$$\frac{IW_1 \cdot IW_3}{IB} = \frac{Rr}{r} = R.$$

Задача 7. В треугольнике ABC через середину M_1 стороны BC и инцентр I проведена прямая, которая пересекает высоту AH_1 в точке E. Доказать, что $AE = r$ (r — радиус вписанной окружности).

Доказательство.

Треугольники IAE и IWM_1 (рис. 29) подобны, откуда

$$\frac{AE}{M_1W} = \frac{AI}{IW}. \qquad (1)$$

Рис. 29

Пусть N — точка касания вписанной окружности со стороной AC. Тогда прямоугольные треугольники ANI и CM_1W подобны, поскольку

$$\angle WCM_1 = \angle WAB = \angle WAN.$$

Следовательно,

$$\frac{IN}{M_1W} = \frac{AI}{CW}. \qquad (2)$$

Сравнивая равенства (1) и (2) и учитывая, что $IW = CW$, имеем, что $AE = IN = r$.

Задача 8. Доказать, что если $h_a = AH_1$ — высота треугольника ABC, $l_a = AL_1$ — биссектриса этого треугольника, то

$$\frac{h_a}{l_a} \geq \sqrt{\frac{2r}{R}}.$$

Доказательство.

Рис. 30

Пусть DW — диаметр описанной вокруг треугольника ABC окружности (рис. 30). Поскольку $\angle DWA = \angle WAH_1$, то

$$\frac{h_a}{l_a} = \cos\angle L_1AH_1 =$$

$$= \cos\angle DWA = \frac{AW}{2R} =$$

$$= \frac{AI + IW}{2R} \geq \frac{2\sqrt{AI \cdot IW}}{2R} =$$

$$= \frac{\sqrt{2Rr}}{R} = \sqrt{\frac{2r}{R}}.$$

Страдания юного эрудита

На I Украинской республиканской математической олимпиаде (Киев, 1961) была предложена задача:

Вычислить углы равнобедренного треугольника, в котором центры вписанной и описанной окружностей взаимно симметричны относительно основания треугольника.

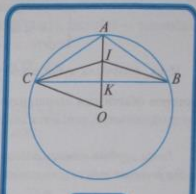

Рис. 31

Приступая к решению этой задачи, юноша (будем называть его «Эрудитом») начал наиболее естественно (с его точки зрения):

Пусть I — инцентр равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$) (рис. 31), O — центр описанной окружности.

Обозначим

$$\angle ICK = \angle KCO = x$$

(K — середина отрезка IO).

Тогда

$$\sin x=\frac{r}{R}=\frac{4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{R}=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

(r — радиус вписанной окружности, R — радиус описанной окружности). Учитывая, что

$$\sin x=\sin\frac{C}{2},\quad \frac{A}{2}=90^\circ-C,$$

имеем:

$$\frac{1}{4}=\cos B\cdot\sin\frac{C}{2},$$

$$\frac{1}{4}=\left(1-2\sin^2\frac{C}{2}\right)\sin\frac{C}{2}.$$

Итак, получили кубическое уравнение относительно $\sin\frac{C}{2}$, которое обычными школьными приемами не решается (или, по крайней мере, решается очень непросто).

Тогда Эрудит «увеличил мощность» фактического материала и для решение задачи использовал формулу Эйлера:

$$OI^2=R^2-2Rr\ ^{[1]}.$$

Имеем

$$r=\frac{1}{2}OI,$$

откуда

$$4r^2=R^2-2Rr,\quad 4r^2+2Rr-R^2=0,$$

[1] Об этой формуле мы еще будем говорить на следующих страницах книги.

$$r=\frac{-R\pm\sqrt{R^2+4R^2}}{4},\quad r=\frac{\sqrt{5}-1}{4}R\ (\text{так как } r>0).$$

Следовательно,

$$\sin x=\frac{r}{R}=\frac{\sqrt{5}-1}{4},$$

откуда $x=18^\circ$, поэтому

$$\angle B=\angle C=36^\circ,\ \angle A=108^\circ.$$

Ответ: 108°, 36°, 36°.

Эрудиция помогла! И все же юноша не успокоился. Он намерен решить задачу «полностью геометрически».

Второй способ. Треугольник ICO (см. рис. 31) — равнобедренный, следовательно, $\angle KCO=x$, откуда

$$\angle CAO=\angle ACO=3x.$$

Кроме этого,

$$\angle AOC=2\angle ABC=4x,$$

следовательно, из треугольника AOC:

$$2\cdot 3x+4x=180^\circ,\quad x=18^\circ,\quad \angle A=108^\circ.$$

Ответ: 108°, 36°, 36°.

Следующий способ решения задачи родился просто автоматически.

Третий способ. В ромбе (!) $COBI$ (см. рис. 31):

$$\angle ICO+\angle CIB=180^\circ,$$

но ведь

$$\angle CIB=2\angle CIO=2\angle COI=8x,$$

следовательно,

$$2x+8x=180^\circ,\quad x=18^\circ.$$

Ответ: 108°, 36°, 36°.

И последняя точка:

Четвертый способ. Поскольку

$$\angle BIC=90^\circ+\frac{A}{2}$$

и $\angle COB=360^\circ-2A$, то

$$90^\circ+\frac{A}{2}=360^\circ-2A,\quad A=108^\circ.$$

Ответ: 108°, 36°, 36°.

Методы в геометрии? Методы в геометрии!

У человека с высшим образованием понятие «метод» не вызывает удивления: слово это обычное, особенно для тех, кто изучал высшую математику. Школьная же математика не может похвастаться методами решения задач. И все же — в геометрии можно и нужно находить методы решения, избавляя учеников от ужаса перед хаотичностью выбора подхода к задаче, от неуверенности дополнительных построений наконец.

Учителя-практики всегда хотели прийти к обобщению при решении задач, но какая-то внутренняя скованность, может, даже ужас перед «чистыми» математиками (то есть не математиками-учителями, а математиками-учеными), не позволяли им громко заявить: «Это метод! Он не только помогает решать задачи, он обобщает подходы и имеет свое название, что оправдывает его суть и целенаправленность».

Остановимся на **«методе базисных треугольников»**. Педагогическое влияние этого метода на учеников велико. Предлагая ученикам решить задачу на построение, что всегда вызывает священный ужас, посмотрите на их лицо после применения «базисов». Ей-богу, стоит искать методы!

Наверное, самым сложным были поиски «определения» базисного треугольника.

Годы (!) пошли на то, чтобы непринужденно произнести: «базисный треугольник — это тот, который легко построить!». И все сразу стало на свои места!

Следовательно, в задаче на построение треугольника (и не только треугольника!) рекомендуется построить сначала базисный треугольник, который чаще всего является частью искомой фигуры. Это дает возможность найти элементы треугольника, которые не заданы в условии задачи. Таким образом собираются все элементы, необходимые для окончательного построения.

Иллюстрация

Задача 1. Построить треугольник ABC по углу при вершине и двум высотами, проведенными из двух других вершин (например, $\angle BAC$, BH_2, CH_3).

Решение.

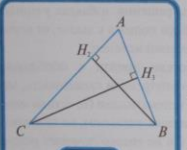

Рис. 32

Анализ задачи показывает (рис. 32), что базисными будут прямоугольные треугольники AH_2B и AH_3C. Их легко построить по катету и острому углу. Они «дадут» две стороны треугольника ABC: AB и AC, соответственно. Тогда можно построить треугольник ABC по двум сторонам и углу между ними.

Задача 2. Построить ромб $ABCD$, если заданы диагональ BD и высота BH.

Решение.

Анализ показывает, что базисным будет треугольник DHB (рис. 33).

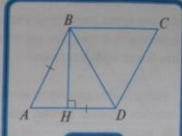

Рис. 33

Далее строим равнобедренный треугольник BAD, а потом и ромб $ABCD$.

Задача 3. Через общую точку K двух окружностей провести секущую MN так, чтобы ее отрезок, ограниченный этими окружностями, был заданной длины.

Решение.

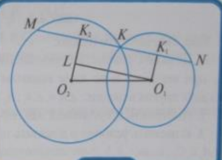

Рис. 34

Пусть O_1 и O_2 — центры заданных окружностей. Секущая, проходящая через точку K, пересекает окружности в точках M и N (рис. 34).

Из точек O_1 и O_2 на прямую MN опустим перпендикуляры O_1K_1 и O_2K_2. Проведем через точку O_1 прямую, параллельную MN, которая пересечет O_2K_2 в точке L. Полученный треугольник O_1LO_2 будет базисным, поскольку его можно построить по прямому углу O_1LO_2, гипотенузе O_1O_2, катету

$$LO_1 = \frac{1}{2}MN.$$

Следовательно, для построения секущей строим треугольник O_1LO_2 и через точку K проводим прямую, параллельную отрезку LO_1.

Метод базисных треугольников — универсальный. Если в начале курса геометрии ученик владеет этим методом, растет уверенность в том, что он может решить задачу. А что может быть более эффективным?

Рассмотрим еще один метод — **«метод цепочки»**. Этот метод я открыл гораздо позже, чем метод базисных треугольников, хотя метод цепочки — органичное продолжение последнего. Ценность метода цепочки состоит в том, что он используется не столько для непосредственного решения задач, сколько для всесторонней подготовки, тренировки их решений.

Опишем этот метод: перед вами (для примера) — запись:

$$A, h_b, h_c.$$

Она означает, что нужно:

1. Доказать равенство треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ по углу при вершине и по двум высотам, опущенным на стороны из двух других вершин: $\angle A = \angle A_1$, $h_b = h_{b_1}$, $h_c = h_{c_1}$.
2. Построить треугольник ABC по этим данным.
3. Изменить условие и доказать подобие треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, если

$$\angle A = \angle A_1, \quad \frac{h_b}{h_{b_1}} = \frac{h_c}{h_{c_1}}.$$

4. «Решить» треугольник ABC, если заданы A, h_b, h_c (найти его углы, стороны, площадь и т. д.).

Докажем, например, третье «колечко цепочки».

Пусть BH_2 и CH_3 — высоты треугольника ABC (рис. 35), B_1H_2' и C_1H_3' — соответственные высоты треугольника $A_1B_1C_1$. Треугольники AH_2B и $A_1H_2'B_1$ подобны по двум углами:

$$\frac{h_b}{h_{b_1}} = \frac{AB}{A_1B_1}.$$

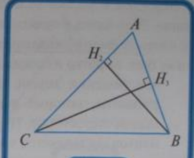

Рис. 35

Аналогично, треугольники AH_3C и $A_1H_3'C_1$ подобны и, следовательно,

$$\frac{h_c}{h_{c_1}} = \frac{AC}{A_1C_1}.$$

Поскольку

$$\frac{h_b}{h_{b_1}} = \frac{h_c}{h_{c_1}},$$

то

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1},$$

и треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны по равному углу и пропорциональным сторонам, которые образуют этот угол (II признак).

При создании «метода цепочки» я нарушил традиционность решения задачи:

«построить треугольник по a, A, h_a».

Эта задача известна из учебников геометрии или лекций по методам решения задач на построение, как илюстрация использования **сегмента, вмещающего данный угол**.

«Цепочка» помогла найти новое построение, которое раньше не встречалось, а кроме того возник вопрос, который также ранее не возникал в математической литературе: как доказать равенство треугольников по a, A, h_a.

Благодаря доказательству (см. с. 33) понятно, как построить этот треугольник, не используя сегмент, вмещающий данный угол.

Перейдем к рассмотрению **«метода вспомогательного элемента»**. Этот метод в практике решения задач известен давно. Но у него не было обобщающего названия, и как метод он описан не был. Коротко изложим его суть:

> при решении задачи вводятся вспомогательные элементы, которые непосредственно в условии задачи отсутствуют. При помощи введенных элементов составляется уравнение, в котором неизвестным будет искомый по условию элемент, или элемент, необходимый для нахождения искомого. Иногда при помощи вспомогательного элемента конструируется не уравнение, а соотношение, обусловленное требованиями задачи. Вспомогательным элементом может быть отрезок, периметр, площадь, угол, а в стереометрии — объем.

Вспомогательный элемент — отрезок (или отношение длин отрезков).

Отрезок (или отношение длин отрезков) удобно ввести, если фигуры подобны. Тогда, при помощи пропорций или геометрических построений, составляется уравнение, в котором этот элемент как член уравнения сокращается, а найти искомый элемент будет уже не сложно.

Иллюстрация

Задача. Основания AD и BC трапеции $ABCD$ равны соответственно a и b $(a > b)$. Прямая, проходящая через точку O пересечения диагоналей параллельно основаниям, пересекает боковые стороны в точках M и N. Найти длину отрезка MN.

Решение.

Введем как вспомогательные элементы h_1, h_2, h — высоты треугольников MBO, AMO, BCA, соответственно (рис. 36).

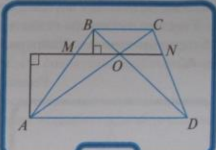

Рис. 36

Пусть длина отрезка MO равна x. Треугольники MBO и ABD подобны, откуда

$$\frac{x}{a}=\frac{h_1}{h}.$$

Из подобия треугольников AMO и ABC имеем:

$$\frac{x}{b}=\frac{h_2}{h}.$$

Поэтому

$$\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=\frac{h_1+h_2}{h}=\frac{h}{h}=1,$$

откуда $x=\dfrac{ab}{a+b}$.

Следовательно, $MO=\dfrac{ab}{a+b}$. Аналогично, $NO=\dfrac{ab}{a+b}$. Тогда

$$MN=MO+ON=\frac{2ab}{a+b}.$$

Ответ: $\dfrac{2ab}{a+b}$.

Вспомогательный элемент — угол.

Использование угла как вспомогательного элемента связано с тригонометрией. Теоремы синусов, косинусов, решения треугольников позволяют свести задачу к доказательству тригонометрического тождества, или тригонометрического неравенства, или к решению тригонометрических уравнений и неравенств.

Иллюстрация

Задача. Окружность касается боковых сторон AB и AC равнобедренного треугольника ABC в вершинах B и C. На дуге этой

окружности, лежащей внутри треугольника, расположена точка K так, что расстояния от нее до сторон AB и AC равны 24 см и 6 см, соответственно. Найти расстояние от точки K до стороны BC.

Решение.

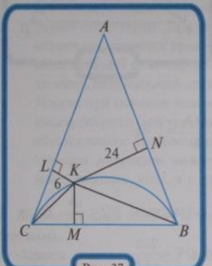

Рис. 37

Пусть

$$\angle ABK=\alpha,\quad \angle KBC=\beta$$

(рис. 37). Тогда

$$\angle KCB=\alpha,\quad \angle KCA=\beta$$

(как углы между касательными и хордами). Из треугольников KNB и KMB:

$$KN=BK\sin\alpha,$$
$$KM=BK\sin\beta.$$

Отсюда

$$KM=KN\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}.$$

Аналогично, из треугольников KLC и KMC имеем:

$$KM=KL\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

Перемножая два последних равенства, имеем:

$$KM^2=KN\cdot KL.$$

По данным задачи: $KM=\sqrt{6\cdot 24}=12$ (см).

Ответ: 12 см.

Еще один метод, который хотелось бы продемонстрировать, — это **«метод вспомогательных точек»**. Этот метод связан со вспомогательными построениями. Решающий задачу пользуется свойствами точек, о которых в условии ничего

не сообщается. Именно эти точки мы и будем называть *вспомогательными*. Изучение их свойств обогащает опыт решения задач, помогает правильно и рационально наметить схему решения, а главное — сделать сознательными вспомогательные построения.

Иллюстрация

Рассмотрим задачу, где в роли вспомогательной точки выступает центр окружности.

Задача. Пусть K — одна из точек пересечения двух окружностей, центры которых — O_1 и O_2, а радиусы — R_1 и R_2. Прямая касается этих окружностей в точках M и N, соответственно. Найти радиус окружности, описанной вокруг треугольника KMN.

Решение.

Пусть O — центр окружности, описанной вокруг треугольника KMN (рис. 38). Докажем, что треугольники MOK и NO_2K подобны. Положим: $\angle KNO_2=\alpha$, $\angle KMO=\beta$. Тогда

$$\alpha=90^\circ-\angle MNK=90^\circ-\frac{1}{2}\angle MOK=90^\circ-\frac{1}{2}\left(180^\circ-2\beta\right)=\beta.$$

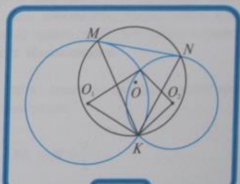

Рис. 38

Итак, $\alpha=\beta$, и, следовательно, равнобедренные треугольники MOK и NO_2K подобны.

Тогда

$$\frac{R_x}{R_2}=\frac{KM}{KN}$$

(где R_x — искомый радиус).

Аналогично, из подобия треугольников KON и KO_1M, имеем:

$$\frac{R_x}{R_1} = \frac{KN}{KM}.$$

Перемножим полученные равенства:

$$R_x^2 = R_1 \cdot R_2, \quad R_x = \sqrt{R_1 \cdot R_2}.$$

Ответ: $\sqrt{R_1 \cdot R_2}$.

О некоторых методах мы еще поговорим далее. Вообще, методам можно посвящать целые книги. Считаю, что поиски методов решения задач только-только начинаются.

Не интуицией, а эрудицией...

Нет, нет! Не бойтесь. Интуицию в геометрии, и вообще — в науке, искючить невозможно. Но нельзя допустить, чтобы пропала возможность использовать «домашние заготовки», как это, кстати, делают шахматисты. Ведь невозможно даже представить настоящего специалиста-шахматиста, который не знает всех дебютов (начал) шахматной партии. Недаром можно прочитать в комментариях к партии, например, такое: «Эта позиция возникла еще у Стейница в 1892 году...»

Конечно, мы не можем сравнивать геометрические задачи с чемпионатом мира, но... собственно, почему бы и нет?!

Во всяком случае, такие задачи нужно тщательно собирать и, при случае, любоваться. **Иллюстрируем.**

Задача 1. Доказать, что из инцентра каждую сторону треугольника видно под тупым углом.

Известно, что

$$\angle BIC = 90° + \frac{A}{2}.$$

Утверждение доказано.

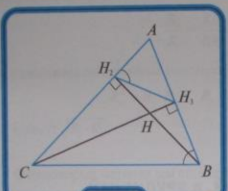

Рис. 39

Задача 2 (Киевская городская олимпиада, 1955). Доказать, что прямая, соединяющая основания двух высот остроугольного треугольника, отсекает от него подобный треугольник.

Действительно (рис. 39),

$$\angle AH_2H_3 = \angle B.$$

Задача 3 (Киевская городская олимпиада, 1954). Доказать, что высоты остроугольного треугольника являются биссектрисами треугольника, вершинами которого являются основания этих высот.

Действительно, это **основное свойство ортоцентрического треугольника**.

Задача 4 (Украинская математическая олимпиада, 1961). Дан треугольник ABC. Найти точку, симметричный образ которой относительно любой стороны треугольника лежит на описанной вокруг этого треугольника окружности.

Этой точкой будет ортоцентр треугольника ABC.

Задача 5 (Украинская математическая олимпиада, 1962). Построить треугольник, если известны одна из его вершин, середина противоположной стороны и точка пересечения высот.

Задача решается просто, если учесть, что

$$OM_1 = \frac{1}{2} AH,$$

где O — центр описанной окружности, H — ортоцентр, M_1 — известная середина стороны.

Задача 6 (Украинская математическая олимпиада, 1963). Даны два отрезки AB и CD, которые не пересекаются. Построить точку M так, чтобы треугольники AMB и CMD были подобными, причем $\angle AMB = \angle CMD$.

Задачу легко решить, если знать **окружность Аполония** — геометрическое место точек, отношение расстояний от которых до двух данных точек задано.

Задача 7 (Киевская городская олимпиада, 1953). Доказать, что в четырехугольнике, вписанном в окружность, сумма произведений противоположных сторон равна произведению диагоналей.

Ясно, что перед нами — **теорема Птолемея.**

Задача 8 (Киевская городская олимпиада, 1953). Доказать, что сумма расстояний от любой точки основания правильной пирамиды до ее боковых граней является постоянной величиной.

Задача является прекрасной иллюстрацией метода вспомогательного объема.

Задача 9 (Киевская городская олимпиада, 1954). Определить углы треугольника, в котором биссектриса, медиана и высота, проведенные из одной вершины, делят угол на четыре равные части.

При решении будет полезна вспомогательная окружность, описанная вокруг данного треугольника.

Задача 10 (Киевская городская олимпиада, 1954). Длины сторон треугольника образуют арифметическую прогрессию. Доказать, что радиус вписанной окружности втрое меньше высоты, которая проведена к средней по длине стороне треугольника.

Так это просто — **разностный треугольник** — да и все.

Задача 11 (Киевская городская олимпиада, 1957). Построить треугольник, если даны три точки, которые являются центрами вневписанных окружностей (I_a, I_b, I_c).

Здесь нужно воспользоватся одним из основных свойств центров вневписанных окружностей:

треугольник ABC является ортоцентрическим для треугольника $I_a I_b I_c$.

Задача 12 (Киевская городская олимпиада, 1962). Заданы окружность, точка A на ней, точка H внутри окружности. Найти на окружности такие точки B и C, чтобы точка H была точкой пересечения высот треугольника ABC.

Задачу можно решать несколькими способами, например, при помощи **прямой Эйлера** или теоремы о точке, симметричной ортоцентру треугольника относительно его стороны.

Задача 13 (Украинская математическая олимпиада, 1971). Пусть ABC — остроугольный треугольник, D — точка пересечения его высот. Доказать, что радиусы окружностей, описанных вокруг треугольников ADC, ABD, DBC, равны между собой.

Но ведь это **задача-теорема, «без которой жизни нет»**

Задача 14. В треугольнике ABC проведена высота AH. Точка O — центр описанной вокруг треугольника окружности. Доказать, что

$$\angle OAH = |\angle ABC - \angle ACB|.$$

Обычное использование **свойств точки W**

Задача 15 (Вторая Международная математическая олимпиада). Постройте треугольник ABC, если известны h_a, h_b, m_a.

Прекрасная иллюстрация метода базисных треугольников.

Задача 16 (Четвертая Международная математическая олимпиада). Дан равнобедренный треугольник ABC, R — радиус описанной окружности, r — радиус вписанной окружности. Доказать, что расстояние d между центрами окружностей равно $\sqrt{R(R-2r)}$.

Комментарии излишни: ни автор этой задачи, ни члены жюри **не знали формулы Эйлера**. Печальное свидетельство упадка геометрии!!!

Задача 17 (Международная математическая олимпиада, из материалов жюри). Построить треугольник, если известны радиусы вневписанных окружностей.

А Вам известно, что

$$r_a = \frac{S}{p-a}?$$

Тогда можно получить формулу

$$a = \frac{r_a(r_b + r_c)}{\sqrt{r_a r_b + r_a r_c + r_b r_c}}.$$

Задача 18 (Олимпиада ГДР, 1970; СФРЮ, 1972). Пусть точка O — центр вписанной в треугольник ABC окружности, а точка D — отличная от A точка пересечения прямой AO с описанной вокруг треугольника ABC окружностью. Доказать, что

$$DB = DC = DO.$$

Но ведь это — **«теорема трилистника»**!

Но вот вдруг!

«Наталкиваюсь» на задачу из материалов жюри Международной олимпиады:

Задача 19 (Болгария). Длины сторон треугольника ABC образуют арифметическую прогрессию. Арифметическую прогрессию образуют и длины соответствующих сторон треугольника $A_1B_1C_1$. Кроме того, один из углов треугольника ABC равен соответствующему углу треугольника $A_1B_1C_1$. Доказать, что треугольники подобны.

Азарт решения для меня был в том, что треугольнику, стороны которого составляют арифметическую прогрессию, я уделил немало внимания в своих книгах (см. с. 18). Этот треугольник изучен «вдоль и поперек», но поиски новых свойств и задач продолжаются (см. с. 282).

Следовательно, появилась интересная возможность — на конкретном испытании показать «не интуицию, а эрудицию».

Создаю стандартную рабочую для разностного треугольника ситуацию — описываю вокруг треугольника окружность и строю точки I (инцентр) и W — середину дуги BC (рис. 40). Авторы задачи не говорят, какая сторона средняя и какой угол треугольника они выбирают.

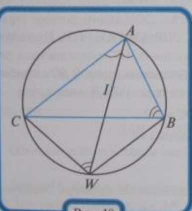

Рис. 40

Ну хорошо, предположим, что $b \geq a \geq c$ (тогда $b_1 \geq a_1 \geq c_1$) и что угол B равен углу B_1 (или же угол C равен углу C_1 — главное, что это угол **при** средней стороне).

Подобие треугольников AWC и $A_1W_1C_1$ — очевидно, если вспомнить, что в разностном треугольнике

$$AW = 2CW.$$

Действительно, используя это равенство, получим:

$$\frac{AW}{A_1W_1} = \frac{2CW}{2C_1W_1} = \frac{CW}{C_1W_1}, \quad \angle AWC = \angle B = \angle B_1 = \angle A_1W_1C_1.$$

Тогда $\angle CAW = \angle C_1A_1W_1$, следовательно, $\angle A = \angle A_1$, и треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны.

Казалось бы, что с углом A будет еще «проще» — это же угол **против** средней стороны (рис. 41), которая связана со многими свойствами разностного треугольника. Но где там! Тут уже нельзя утверждать подобие треугольников AWC и $A_1W_1C_1$, поскольку угол CAW не является углом между CW и WA. Но снова — знание треугольника!

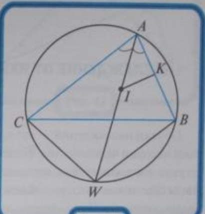

Рис. 41

Итак, пусть $\angle A = \angle A_1$ и вписанная в треугольник ABC окружность касается стороны AB в точке K (точка K_1 определяется аналогично). Как известно, $AK = p - a$ (p — полупериметр), а для разностного треугольника $p - a = \frac{a}{2}$. Тогда, поскольку прямоугольные треугольники AKI и $A_1K_1I_1$ подобны, то $\frac{r}{r_1} = \frac{a}{a_1}$. Но в разностном треугольнике $h_a = 3r$. Следовательно, данная задача свелась к такой: доказать подобие треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, если $\angle A = \angle A_1$ и $\frac{a}{a_1} = \frac{h_a}{h_{a_1}}$, а эта задача решается «методом цепочки» («Методи розв'язання задач з геометрії», с. 57)[1].

[1] См. примечание на с. 18.

Наслаждение от найденной аналогии

Поиски наслаждений — это привычно и сегодня, и в течение всей истории человечества. Поиски наслаждений в математике, да еще и в школьной — явление менее обычное. Как правило, люди ограничиваются решением задачи, и именно это приносит им наслаждение. Здесь спорить трудно: радость победы настолько ощутима, что возникло целое движение — олимпиадное — математические олимпиады!

И все же, по моему мнению, существует наслаждение более высокого уровня — это создание новых задач, новых методов решений, открытие новых закономерностей и, как мы уже говорили раньше[1], поиски аналогий. Возможно ли это в школе? Сейчас вы в этом убедитесь.

Известны разные свойства высот треугольника. Они достаточно лаконичны и интересны. Но, если двигаться от частного к общему, можно задать себе вопрос: почему уделяется внимание углу в 90°? Высоты интересны не только перпендикулярностью сторонам треугольника — в них проявляется еще одно свойство: каждая пара из трех высот треугольника составляет равные углы с соотвующими ей сторонами.

[1] См. с. 11–13.

Например (рис. 42):

$\angle ABH_2 = \angle ACH_3$.

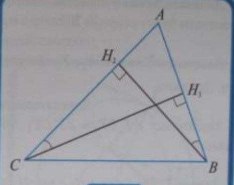

Рис. 42

А если попробовать **по аналогии** с высотами треугольника рассмотреть пары прямых, проходящие через две вершины треугольника и образующие равные углы с соответствующими сторонами?

Например:

$$\angle ABT_2 = \angle ACT_3,$$

где T_2 и T_3 — точки пересечения прямых, проходящих через вершины B и C треугольника ABC, со сторонами AC и AB (рис. 43).

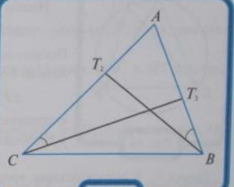

Рис. 43

Такие прямые назовем **равноугольными** *и изучим их свойства* (в виде задач!), как аналога высот треугольника.

Именно поэтому задачи, предложенные ниже, идут парами: первая — о высотах, вторая (по аналогии) — о равноугольных прямых.

Задача 1. В треугольнике ABC точки C, H_2, H_3, B принадлежат одной окружности (H_2, H_3 — основания высот, проведенных из вершин B и C). Доказать.

Доказательство очевидно, поскольку диаметром этой окружности будет сторона BC.

Задача 1°. Точки C, T_2, T_3, B принадлежат одной окружности. Доказать.

Доказательство.

Поскольку $\angle T_2BT_3 = \angle T_2CT_3$, то утверждение задачи доказано.

Задача 2. Доказать, что $\angle AH_2H_3 = \angle ABC$.

Доказательство общеизвестно, а если возникнут проблемы, посмотрите доказательство задачи 2°, оно аналогично.

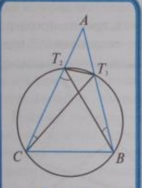

Рис. 44

Задача 2°. Доказать, что

$$\angle AT_2T_3 = \angle ABC.$$

Доказательство.

Имеем (рис. 44):

$$\angle AT_2T_3 = 180° - \angle CT_2T_3.$$

Поскольку четырехугольник BT_3T_2C вписан в окружность, то

$$\angle T_3BC = 180° - \angle CT_2T_3,$$

следовательно, $\angle AT_2T_3 = \angle ABC$, что и требовалось доказать.

Задача 3. В остроугольном треугольнике ABC точка O — центр описанной окружности. Доказать, что радиус OA перпендикулярен отрезку H_2H_3.

Доказательство общеизвестно, а если...[1]

[1] Здесь и далее в разделе при доказательстве первых из попарно расположенных задач (кроме последней пары) будем использовать примечание, приведеное после условия задачи 2.

Задача 3°. Доказать, что в остроугольном треугольнике ABC радиус OA перпендикулярен отрезку T_2T_3.

Доказательство.

В вершине A треугольника ABC, вписанном в окружность с центром в точке O (рис. 45), проведем касательную l. Пусть точка L расположена на этой прямой так, как показано на рисунке. Тогда

$\angle LAB = \angle ACB = \angle AT_3T_2$,

следовательно,

$$l \parallel T_2T_3,$$

а поэтому $T_2T_3 \perp OA$.

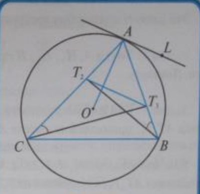

Рис. 45

Задача 4. Доказать, что треугольники AH_2H_3 и ABC подобны.

Задача 4°. Доказать, что треугольники AT_2T_3 и ABC подобны.

Доказательство очевидно.

Задача 5. Доказать, что если $BH_2 = CH_3$, то треугольник ABC равнобедренный.

Задача 5°. Доказать, что если $BT_2 = CT_3$, то треугольник ABC равнобедренный.

Доказательство.

Действительно, $\angle ACT_3 = \angle ABT_2$ и, следовательно, треугольники ACT_3 и ABT_2 равны.

Задача 6. Доказать, что $BH_2 : CH_3 = AB : AC$.

Задача 6°. Доказать, что $BT_2 : CT_3 = AB : AC$.

Доказательство.

Это следует из подобия треугольников ABT_2 и ACT_3.

Задача 7. Точки A, H_2, H_3, H принадлежат одной окружности. Доказать.

Задача 7° (!). Центр окружности, описанной вокруг треугольника AT_2T_3, принадлежит высоте AH_1 треугольника ABC.

Доказательство.

Как мы уже знаем, $T_2T_3 \perp OA$. Следовательно, высота треугольника AT_2T_3, опущенная на T_2T_3, принадлежит отрезку OA.

В треугольнике ABC угол между радиусом OA и высотой AH_1 равен $|B-C|$. Поэтому, поскольку соответствующие углы треугольников ABC и AT_2T_3 равны, то угол между высотой треугольника AT_2T_3 и радиусом, проведенным в вершину A, окружности, описанной вокруг треугольника AT_2T_3, также равен $|B-C|$.

Это означает, что этот радиус (а следовательно, и центр окружности) принадлежит отрезку AH_1.

Задача 8. Высоты BH_2 и CH_3 пересекаются в точке H. Доказать, что $BH \cdot HH_2 = CH \cdot HH_3$.

Задача 8°. Отрезки BT_2 и CT_3 пересекаются в точке T. Доказать, что $BT \cdot TT_2 = CT \cdot TT_3$.

Доказательство.

Поскольку точки B, C, T_2, T_3 принадлежат одной окружности, то утверждение задачи доказано.

Задача 9. Доказать, что в треугольнике ABC:

$$\frac{BH_2}{CH_3} = \frac{AB}{AC}.$$

Задача 9°. Доказать, что в треугольнике ABC:

$$\frac{BT_2}{CT_3} = \frac{AB}{AC}.$$

Доказательство.

Следует из подобия треугольников ABT_2 и ACT_3.

Задача 10. Пусть O_1 — центр окружности, описанной вокруг треугольника BHC (рис. 46). Доказать, что $O_1H \perp H_2H_3$ (H — ортоцентр остроугольного треугольника ABC).

Доказательство.

Известно, что

$$OA \perp H_2H_3,$$

а также, что

$$\angle OAH = |\angle B - \angle C|.$$

Найдем угол $\angle O_1HH_1$:

$$\angle O_1HH_1 = \\ = |\angle HCB - \angle HBC| = \\ = |90° - \angle B - 90° + \angle C| = \\ = |\angle C - \angle B|.$$

Следовательно,

$$O_1H \parallel OA,$$

откуда

$$O_1H \perp H_2H_3.$$

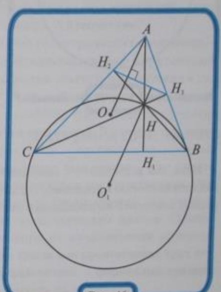

Рис. 46

Задача 10°. Пусть Q — центр окружности, описанной вокруг треугольника BTC (T — точка пересечения отрезков BT_2 и CT_3). Доказать, что $QT \perp T_2T_3$.

Доказательство.

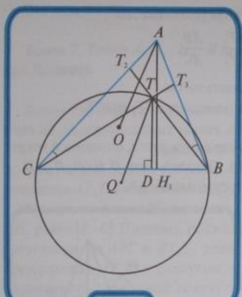

Рис. 47

Доказательство целиком аналогично предыдущему. Проведем в треугольнике BTC высоту TD (рис. 47). Пусть (для определенности)

$$\angle B \geq \angle C.$$

Положим:

$$\angle T_2BT_3 = \alpha.$$

Тогда

$$\angle QTD = \\ = \angle B - \alpha - (\angle C - \alpha) = \\ = \angle B - \angle C.$$

Но поскольку

$$\angle OAH_1 = \angle B - \angle C$$

и $TD \parallel AH_1$, то $QT \parallel OA$ и $QT \perp T_2T_3$.

Итак, мы встретились с аналогией в условиях задач, а также увидели аналогию в решениях. Гарантируем, что встреча с интересной аналогией не последняя в этой книге.

Три отношения в треугольнике

С отношением двух чисел ученик начинает знакомство еще в младшей школе: делит одно число на другое — вот и отношение. Потом рассматривается равенство двух отношений — пропорция. Это арифметика, алгебра. А в геометрии?

Например, отношение двух геометрических компонент — сторон треугольника, куда «прорывается» еще и тригонометрия: $a : b = \sin A : \sin B$. Отношения обычны при изучении подобия фигур. Но и первый, и второй примеры — это та же самая пропорция. И только свойства треугольника приносят творческое вдохновение **трех отношений**. В алгебре три отношения — это эпизод, а в геометрии — некоторые знаменитые теоремы. Теоремы, которые носят имя авторов, или просто внешне лаконичны с очень непростым доказательством. Эти теоремы не должны потеряться среди многих, на первый взгляд, более действенных геометрических фактов. Основной причиной недопустимости их исчезновения является тот несомненный факт, что **сумма или произведение трех отношений в равенствах или неравенствах — фирменный признак треугольника**! Следует не забывать об этом!

Теорема Чевы. Пусть A_1, B_1, C_1 — три точки, лежащие соответственно на сторонах BC, CA, AB треугольника ABC или на их продолжениях, причем на продолжениях сторон лежит четное число точек (0 или 2). Для того, чтобы прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекались в одной точке или были параллельны (рис. 48 и 49, соответственно) необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$$

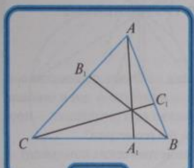

Рис. 48

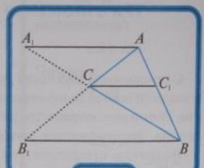

Рис. 49

Теорема Менелая. Пусть A_1, B_1, C_1 — три точки, лежащие соответственно на сторонах BC, CA, AB треугольника ABC или на их продолжениях, причем на продолжениях сторон лежит нечетное

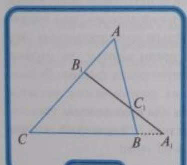

Рис. 50

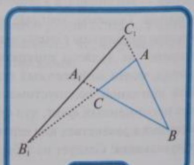

Рис. 51

число точек (1 или 3). Для того, чтобы эти точки принадлежали одной прямой (рис. 50, 51) необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$$

Теорема Ван-Обеля. Пусть A_1, B_1, C_1 — три точки, лежащие соответственно на сторонах BC, CA, AB треугольника ABC, а прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке X. Доказать, что

$$\frac{AX}{XA_1}=\frac{AB_1}{B_1C}+\frac{AC_1}{C_1B}.$$

Доказательство.

Через вершину A проведем прямую l, параллельную стороне BC (рис. 52). Пусть прямая CC_1 пересекает прямую l в точке M, а прямая BB_1 — в точке N. Из подобия треугольников MAC_1 и CBC_1 имеем:

$$\frac{MA}{BC}=\frac{AC_1}{C_1B}.$$

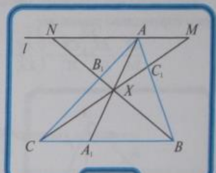

Рис. 52

Из подобия треугольников NAB_1 и BCB_1: $\frac{NA}{BC}=\frac{AB_1}{B_1C}$.

Следовательно,

$$\frac{AC_1}{C_1B}+\frac{AB_1}{B_1C}=\frac{MA}{BC}+\frac{NA}{BC}=\frac{MN}{BC}.$$

Но ведь

$$\frac{MN}{BC}=\frac{NX}{XB}=\frac{AX}{XA_1}$$

(первое равенство следует из подобия треугольников MNX и CXB, второе — из подобия треугольников NAX и BA_1X). Окончательно,

$$\frac{AX}{XA_1}=\frac{AB_1}{B_1C}+\frac{AC_1}{C_1B}.$$

Теорема доказана.

При помощи этой теоремы можно доказать, что медиана делится точкой пересечения медиан в отношении 2:1, считая от вершины. И, конечно, не только это!

Теорема Эйлера. Доказать, что в условиях предыдущей теоремы справедливо равенство:

$$\frac{AX}{XA_1}\cdot\frac{BX}{XB_1}\cdot\frac{CX}{XC_1}-\left(\frac{AX}{XA_1}+\frac{BX}{XB_1}+\frac{CX}{XC_1}\right)=2.$$

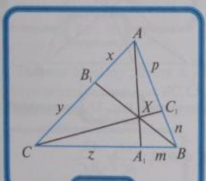

Рис. 53

Доказательство.

Обозначим отрезки так, как показано на рис. 53. По теореме Ван-Обеля

$$\frac{AX}{XA_1}=\frac{x}{y}+\frac{p}{n},\quad \frac{CX}{XC_1}=\frac{y}{x}+\frac{z}{m},$$

$$\frac{BX}{XB_1}=\frac{m}{z}+\frac{n}{p}.$$

Тогда левая часть равенства из условия задачи имеет вид:

$$\left(\frac{x}{y}+\frac{p}{n}\right)\left(\frac{y}{x}+\frac{z}{m}\right)\left(\frac{m}{z}+\frac{n}{p}\right)-\left(\frac{x}{y}+\frac{p}{n}+\frac{y}{x}+\frac{z}{m}+\frac{m}{z}+\frac{n}{p}\right)=$$

$$=\frac{pym}{nxz}+\frac{nxz}{pym}.$$

Но, по теореме Чевы, $pym = nxz$. Следовательно, левая часть равенства равна 2.

Теорема Жергона. Доказать, что в условиях теоремы Ван-Обеля справедливы равенства:

$$1)\ \frac{XA_1}{AA_1}+\frac{XB_1}{BB_1}+\frac{XC_1}{CC_1}=1,$$

$$2)\ \frac{AX}{AA_1}+\frac{BX}{BB_1}+\frac{CX}{CC_1}=2.$$

Для доказательства первого равенства разумно использовать метод вспомогательной площади, а второе равенство следует из первого:

$$\frac{AX}{AA_1}=\frac{AA_1-XA_1}{AA_1}=1-\frac{XA_1}{AA_1}$$

и так далее.

А теперь —

три отношения и описанная окружность

Задача 1. Пусть точка O — центр описанной вокруг остроугольного треугольника ABC окружности; A_1, B_1, C_1 — точки пересечения прямых AO, BO, CO с соответствующими сторонами треугольника. Доказать, что

$$\frac{1}{AA_1}+\frac{1}{BB_1}+\frac{1}{CC_1}=\frac{2}{R}$$

(R — радиус описанной окружности).

Доказательство очевидно: это вторая формула Жергона ($X\equiv O$, $AX=BX=CX=R$).

Задача 2. В остроугольном треугольнике ABC точки H_1, H_2, H_3 — основания высот, опущенных из вершин A, B, C, соответственно. Пусть N_1, N_2, N_3 — точки пересечения прямых AH_1, BH_2, CH_3 с описанной вокруг треугольника ABC окружностью. Доказать, что

$$\frac{AN_1}{AH_1}+\frac{BN_2}{BH_2}+\frac{CN_3}{CH_3}=4.$$

Доказательство.

Пусть H — ортоцентр треугольника ABC. Тогда

$$\frac{AN_1}{AH_1}=\frac{AH_1+HH_1}{AH_1}=1+\frac{HH_1}{AH_1}.$$

Аналогично,

$$\frac{BN_2}{BH_2}=1+\frac{HH_2}{BH_2},\quad \frac{CN_3}{CH_3}=1+\frac{HH_3}{CH_3}.$$

Следовательно, из первой формулы теоремы Жергона имеем:

$$\frac{AN_1}{AH_1}+\frac{BN_2}{BH_2}+\frac{CN_3}{CH_3}=3+1=4,$$

что и требовалось доказать.

Украшением суммы трех отношений можно считать **несколько малоизвестных неравенств.**

Задача 1. Доказать, что в треугольнике ABC

$$1)\ \frac{a}{m_a}+\frac{b}{m_b}+\frac{c}{m_c}\ge 2\sqrt{3},$$

$$2)\ \frac{m_a}{a}+\frac{m_b}{b}+\frac{m_c}{c}\ge \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

(a, b, c — стороны, m_a, m_b, m_c — соответствующие медианы).

Доказательство.

1) Перепишем неравенство в виде:

$$\left(\frac{a}{m_a}+\frac{b}{m_b}+\frac{c}{m_c}\right)^2\ge 12.$$

Поскольку

$$(x+y+z)^2\ge 3(xy+yz+zx),$$

то достаточно доказать, что

$$\frac{ab}{m_a m_b}+\frac{bc}{m_b m_c}+\frac{ac}{m_a m_c}\ge 4. \qquad (*)$$

Пусть точка D — середина BC, точка E — середина AB, M — точка пересечения медиан (рис. 54).

Применим к четырехугольнику $BDME$ неравенство Птолемея:

$$BM\cdot DE\le DM\cdot EB+EM\cdot DB,$$

или

$$\frac{2}{3}m_b\cdot\frac{1}{2}b\le$$

$$\le\frac{1}{3}m_a\cdot\frac{1}{2}c+\frac{1}{3}m_c\cdot\frac{1}{2}a.$$

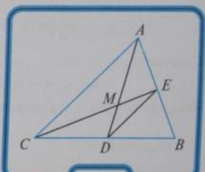

Рис. 54

Отсюда

$$2m_b b\le m_a c+m_c a,$$

и, аналогично,

$$2m_a a\le m_b c+m_c b,$$

$$2m_c c\le m_a b+m_b a.$$

Умножим полученные неравенства на b, a, c, соответственно, и сложим. Получим:

$$m_a a^2+m_b b^2+m_c c^2\le m_a bc+m_b ac+m_c ab. \qquad (1)$$

Применим теперь неравенство Птолемея к четырехугольнику $AEDC$:

$$AD\cdot CE\le AC\cdot DE+AE\cdot CD,$$

$$\text{или } m_a m_c\le\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{4}ac.$$

Аналогично,

$$m_b m_c\le\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{4}bc,\quad m_a m_b\le\frac{1}{2}c^2+\frac{1}{4}ab.$$

Умножим полученные неравенства на m_b, m_a, m_c, соответственно, и сложим. Получим:

$$3m_a m_b m_c\le\frac{1}{2}\left(m_a a^2+m_b b^2+m_c c^2\right)+\frac{1}{4}\left(m_b ac+m_a bc+m_c ab\right)$$

Тогда, учитывая (1), имеем

$$3m_a m_b m_c\le$$

$$\le\frac{1}{2}\left(m_a bc+m_b ac+m_c ab\right)+\frac{1}{4}\left(m_b ac+m_a bc+m_c ab\right)=$$

$$=\frac{3}{4}\left(m_a bc+m_b ac+m_c ab\right)$$

Следовательно,

$$4m_a m_b m_c\le m_a bc+m_b ac+m_c ab.$$

Разделив почленно это неравенство на $m_a m_b m_c$, получим (*).

2) Аналогично.

Задача 2. Доказать, что в треугольнике ABC

$$1)\ \frac{l_a}{b+c}+\frac{l_b}{a+c}+\frac{l_c}{a+b}\le\frac{3\sqrt{3}}{4},$$

$$2)\ \frac{a}{l_b+l_c}+\frac{b}{l_a+l_c}+\frac{c}{l_a+l_b}\ge\sqrt{3}$$

(a, b, c — стороны, l_a, l_b, l_c — соответствующие биссектрисы внутренних углов).

Доказательство.

1) Воспользуемся формулой:

$$l_a=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}.$$

Отсюда и из неравенства между средним гармоническим и средним арифметическим двух чисел имеем:

$$\frac{l_a}{b+c}=\frac{2bc}{b+c}\cdot\frac{\cos\frac{A}{2}}{b+c}\le\frac{b+c}{2}\cdot\frac{\cos\frac{A}{2}}{b+c}=\frac{1}{2}\cos\frac{A}{2}.$$

Аналогично,

$$\frac{l_b}{a+c}\le\frac{1}{2}\cos\frac{B}{2},$$

$$\frac{l_c}{a+b}\le\frac{1}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

Отсюда

$$\frac{l_a}{b+c}+\frac{l_b}{a+c}+\frac{l_c}{a+b}\le\frac{1}{2}\left(\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\right).$$

Учитывая, что

$$\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\le\frac{3\sqrt{3}}{2},$$

получим необходимое неравенство.

2) Вначале докажем, что

$$\frac{l_b+l_c}{a}+\frac{l_a+l_c}{b}+\frac{l_a+l_b}{c}\le 3\sqrt{3}.$$

Действительно, по формуле длины биссектрисы:

$$\frac{l_a}{b}+\frac{l_a}{c}=2\cos\frac{A}{2}.$$

Складывая это равенство с двумя аналогичными, получим:

$$\frac{l_a}{b}+\frac{l_a}{c}+\frac{l_b}{a}+\frac{l_b}{c}+\frac{l_c}{a}+\frac{l_c}{b}=$$

$$=2\cos\frac{A}{2}+2\cos\frac{B}{2}+2\cos\frac{C}{2}\le 3\sqrt{3}.$$

По неравенству Коши, при $x>0$, $y>0$, $z>0$ имеем:

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\ge 9.$$

Следовательно,

$$\frac{a}{l_b+l_c}+\frac{b}{l_a+l_c}+\frac{c}{l_a+l_b}\ge\frac{9}{\frac{l_b+l_c}{a}+\frac{l_a+l_c}{b}+\frac{l_a+l_b}{c}}\ge\frac{9}{3\sqrt{3}}=\sqrt{3},$$

что и требовалось доказать.

ЕЩЕ ОДИН СПОСОБ РЕШЕНИЯ! КТО БОЛЬШЕ?

«Только бы доползти!» — просил судьбу раненный разведчик...
«Только бы решить!» — мечтал преждевременно поседевший абитуриент...
«Боже! Хотя бы одним способом!» — молился юный олимпиадник...

Действительно, зачем два (или даже больше) способов решения задачи? Может, это вовсе не удивительно, что в наше время — время прагматизма, мы не говорим о количестве решений? Ведь в школьных учебниках математики, как «утвержденных» Министерством образования, так и «рекомендуемых», даже намека нет на возможность решения задачи многими способами. Что это — дефицит бумаги или непрофессионализм авторов? Или же, может быть, просто незнание могучего потенциала геометрии? В этом смысле геометрию даже сравнить нельзя с алгеброй. Тем более, если говорить об учениках младшего возраста, для которых все только начинается! Это уже потом будет: «При помощи производной... без производной...».

И все же, для чего два или больше способов решения? *А ни для чего! Ради куража! Чтобы увидеть возможности человеческого разума, фантазии, окрыленной мысли! Разве этого так мало?!*

Куда уж легче задача, чем: «доказать, что диагонали ромба перпендикулярны».

Но какой должна быть острота детского ума, чтобы соединить точку пересечения диагоналей с серединой стороны!

— Минутку! Нельзя ли детальнее?

— Пожалуйста: пусть в ромбе $ABCD$ (рис. 55) точка O — точка пересечения диагоналей, а точка E — середина стороны AD. Поскольку

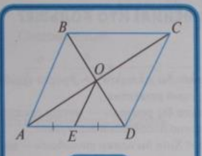

Рис. 55

$$BO=OD \text{ и } AE=ED,$$

то $OE=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}AD$,

следовательно, $\angle AOD=90°$!

Конечно, это доказательство сложнее привычного, но ведь, дорогой читатель, разве Вы не получили удовольствие?

Воспользуемся же возможностью геометрии говорить о классических способах решения задач, о способах решения при помощи векторов, параллельного проектирования, метода координат, метода масс, при помощи физики наконец. А еще не забудем о методах вспомогательных построений, которые приносят наслаждение открытия еще с самого младшего школьного возраста. Следовательно...

ДВАДЦАТЬ ДВА СПОСОБА РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ

Задача. **В треугольнике ABC проведена медиана AM_1. Через вершину C и середину E этой медианы проведена прямая. В каком отношении она делит сторону AB?**

Первый способ решения.

Через вершину A проведем прямую l, параллельную стороне BC (рис. 56). Пусть прямая CE пересекает сторону AB в точке X, а прямую l — в точке T. Треугольники ATX и BCX подобны, поэтому:

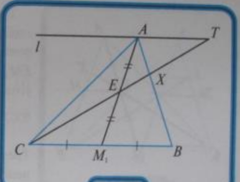

Рис. 56

$$\frac{AX}{XB}=\frac{AT}{BC}. \quad (1)$$

Треугольники AET и M_1EC равны, откуда $AT=CM_1$, а следовательно,

$$\frac{AT}{BC}=\frac{1}{2}.$$

Учитывая равенство (1), имеем $\frac{AX}{XB}=\frac{1}{2}$.

Второй способ решения.

Через точку M_1 проведем отрезок M_1D ($D\in AB$), параллельный отрезку CX (рис. 57). Поскольку

$BM_1=CM_1$, то $BD=DX$.

Поскольку $AE=EM_1$, то $AX=XD$. Следовательно,

$$AX=XD=DB,$$

откуда $\frac{AX}{XB}=\frac{1}{2}$.

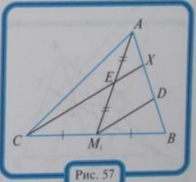

Рис. 57

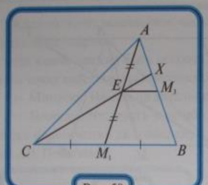

Рис. 58

Третий способ решения.

Пусть M_3 — середина стороны AB (рис. 58). Поскольку EM_3 — средняя линия в треугольнике AM_1B, то

$$EM_3 = \frac{1}{4}BC.$$

Треугольники EXM_3 и CXB подобны, поэтому

$$\frac{XM_3}{XB} = \frac{EM_3}{BC} = \frac{1}{4},$$

следовательно,

$$XM_3 = \frac{1}{4}XB.$$

Но ведь

$$AM_3 = M_3B,$$

откуда

$$AX + XM_3 = XB - XM_3,$$

или

$$AX + \frac{1}{4}XB = XB - \frac{1}{4}XB, \quad AX = \frac{1}{2}XB.$$

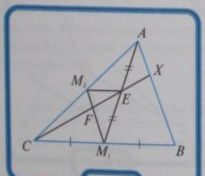

Рис. 59

Четвертый способ решения.

Пусть M_2 — середина стороны AC, F — точка пересечения отрезков M_1M_2 и CE (рис. 59).

Имеем:

$$\frac{AX}{XB} = \frac{M_2F}{FM_1} = \frac{M_2E}{CM_1} = \frac{1}{2}.$$

Пятый способ решения.

Докажем вначале соотношение

$$\frac{XE}{CE} = \frac{1}{3}. \qquad (*)$$

Из треугольника CXB (рис. 60):

$$\frac{XC}{XE} = \frac{BC}{EM_3} = \frac{4EM_3}{EM_3} = 4,$$

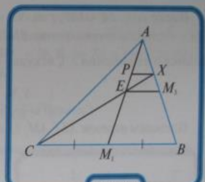

Рис. 60

откуда

$$\frac{CE}{XE} = \frac{CX - XE}{XE} = \frac{CX}{XE} - 1 = 3,$$

что и требовалось доказать.

Проведем теперь отрезок $XP \parallel BC$ ($P \in AM_1$). Тогда

$$\frac{AX}{AB} = \frac{XP}{M_1B} = \frac{XP}{M_1C} = \frac{EX}{CE} = \frac{1}{3}, \text{ следовательно, } \frac{AX}{XB} = \frac{1}{2}.$$

Шестой способ решения.

Проведем через точку B прямую, параллельную отрезку AM_1. Пусть N — точка пересечения ее с прямой CA (рис. 61). Поскольку

$$CM_1 = M_1B,$$

то $CA = AN$.

Пусть K — точка пересечения прямых CX и NB.

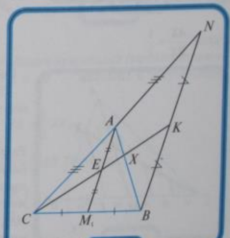

Рис. 61

Поскольку $AE = EM_1$, то $NK = KB$. Следовательно, CK и BA — медианы треугольника BNC. Как известно, они пересекаются в отношении 2:1, откуда $\frac{AX}{XB} = \frac{1}{2}$.

Седьмой способ решения.

Проведем отрезок $XL \parallel AM_1$ ($L \in BC$) (рис. 62). Тогда

$$\frac{AB}{BX} = \frac{AM_1}{XL} = \frac{2EM_1}{XL} = 2\frac{CE}{CX}.$$

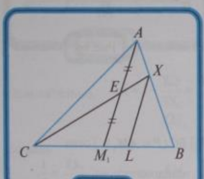

Рис. 62

Используя равенство (*), имеем

$$\frac{CX}{CE} = \frac{CE + EX}{CE} = $$

$$= 1 + \frac{EX}{CE} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3},$$

следовательно,

$$\frac{AX + BX}{BX} = 2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{2},$$

откуда $\frac{AX}{BX} = \frac{1}{2}$.

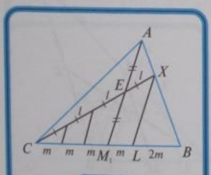

Рис. 63

Восьмой способ решения.

Пусть $EX = l$. Тогда из равенства (*) следует, что

$$CE = 3l.$$

Разделим отрезок CE на три равные части (рис. 63) и проведем через точки деления прямые, параллельные AM_1, до пересечения со стороной BC.

Они разделят отрезок CM_1 на три равные части, длины которых обозначим m. Проведем еще отрезок $XL \parallel AM_1$. Тогда $M_1L = m$, а поскольку $3m = CM_1 = M_1B$, то $BL = 2m$. Следовательно,

$$\frac{AX}{XB} = \frac{M_1L}{LB} = \frac{1}{2}.$$

Девятый способ решения.

Удвоим отрезок CE (рис. 64). Четырехугольник M_1CAT — параллелограмм:

$$CE = ET, AE = EM_1.$$

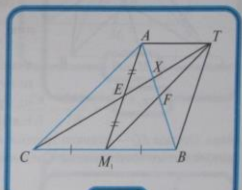

Рис. 64

Далее, четырехугольник M_1ATB — также параллелограмм:

$$AT = CM_1 = M_1B,$$

$$AT \parallel M_1B.$$

Пусть F — точка пересечения диагоналей параллелограмма M_1ATB. Тогда отрезки TE и AF — медианы в треугольнике TM_1A, следовательно,

$$AX = \frac{2}{3}AF.$$

С другой стороны, $AF = FB = \frac{1}{2}AB$. Поэтому

$$AX = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}AB = \frac{1}{3}AB,$$

откуда $BX = \frac{2}{3}AB$, а следовательно, $\frac{AX}{XB} = \frac{1}{2}$.

Десятый способ решения.

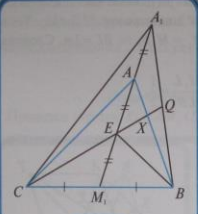

Рис. 65

Пусть A_1 — точка на прямой M_1A и $A_1A = AE = EM_1$ (рис. 65). Соединим точки A_1 и B и продлим отрезок CX до пересечения с A_1B в некоторой точке Q.

Поскольку, по построению, $\frac{EM_1}{A_1E} = \frac{1}{2}$ и A_1M_1 — медиана треугольника A_1BC, то точка E — центроид этого треугольника, следовательно, CQ — также его медиана. Отсюда EQ — медиана треугольника EA_1B, а тогда X — центроид этого треугольника. Следовательно,

$$\frac{AX}{XB} = \frac{1}{2}.$$

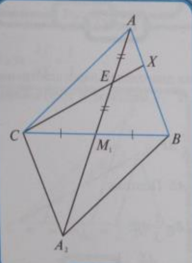

Рис. 66

Одиннадцатый способ решения.

Удвоим медиану AM_1:

$$AM_1 = M_1A_2$$

(рис. 66), получим параллелограмм ABA_2C. Треугольники EA_2C и EAX подобны, откуда

$$\frac{AX}{AB} = \frac{AX}{A_2C} = \frac{AE}{EA_2} = \frac{1}{3},$$

и следовательно, $\frac{AX}{XB} = \frac{1}{2}$.

Двенадцатый способ решения.

Через точку B проведем прямую m, параллельную AM_1 (рис. 67) и продлим прямую CX до пересечения с m в точке T. Поскольку EM_1 — средняя линия в треугольнике CTB, то $TB = 2EM_1$. Треугольники AEX и BTX подобны, следовательно,

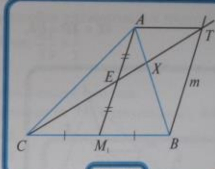

Рис. 67

$$\frac{AX}{BX} = \frac{EA}{TB} = \frac{EM_1}{TB} = \frac{1}{2}.$$

Тринадцатый способ решения.

Удвоим медиану AM_1:

$$AM_1 = M_1A_2$$

получим параллелограмм ABA_2C (рис. 68). Через точку M_1 проведем прямую, параллельную CX. Пусть она пересечет отрезки CA_2 и AB в точках F и D, соответственно.

Поскольку EX — средняя линия в треугольнике AM_1D, а четырехугольник $CXDF$ — параллелограмм, то

$$AX = XD = CF.$$

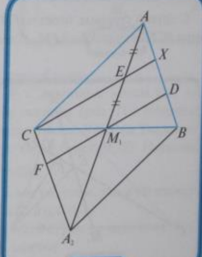

Рис. 68

Но ведь треугольники CM_1F и BM_1D равны, откуда $CF = BD$. Следовательно,

$$AX = XD = DB, \quad \frac{AX}{XB} = \frac{1}{2}.$$

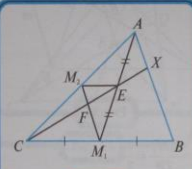

Рис. 69

Четырнадцатый способ решения.

Пусть точка M_2 — середина стороны AC треугольника ABC (рис. 69), F — точка пересечения отрезков M_1M_2 и CX. Поскольку $M_1M_2 \parallel AB$ и $AE = EM_1$, то треугольники AXE и M_1FE равны, а поэтому

$$FM_1 = AX.$$

С другой стороны, отрезок FM_1 — средняя линия треугольника BCX, откуда $XB = 2FM_1$. Следовательно, $XB = 2AX$.

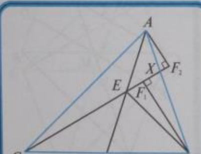

Рис. 70

Пятнадцатый способ решения.

Сравним площади треугольников AEC и BEC (рис. 70). Поскольку CE — медиана треугольника ACM_1, а EM_1 — медиана треугольника BEC, то

$$S_{AEC} = S_{CEM_1} = S_{EBM_1}.$$

Следовательно,

$$S_{BEC} = 2S_{AEC}.$$

Поскольку CE — общая сторона треугольников AEC и BEC, то высота BF_1 треугольника BEC вдвое больше высоты AF_2 треугольника AEC. Тогда из подобия прямоугольных треугольников AF_2X и BF_1X следует, что $\frac{AX}{XB} = \frac{1}{2}$.

Шестнадцатый способ решения.

Применим теорему Менелая (с. 76) к треугольнику AM_1B и секущей CEX (рис. 71):

$$\frac{AE}{EM_1} \cdot \frac{M_1C}{CB} \cdot \frac{BX}{XA} = 1.$$

Поскольку

$$\frac{AE}{EM_1} = 1, \quad \frac{M_1C}{CB} = \frac{1}{2},$$

то

$$\frac{BX}{XA} = 2, \quad \frac{AX}{XB} = \frac{1}{2}.$$

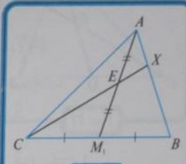

Рис. 71

Семнадцатый способ решения.

Поместим в вершины A, B, C некоторые массы так, чтобы точка E стала центроидом системы (рис. 71). Например, в точки B и C поместим единичные массы: $B(1), C(1)$. Тогда центроидом системы из этих двух точек будет $M_1(2)$. Поскольку

$$AE = EM_1,$$

то поместив в точке A массу 2, мы получим, что $E(4)$ является центроидом такой системы: $\{A(2)\,B(1)\,C(1)\}$.

Заменим теперь систему $\{A(2)\,B(1)\}$ на ее центроид $X_1(3)$, который лежит на стороне AB, причем

$$\frac{AX_1}{X_1B} = \frac{1}{2}.$$

Тогда центроид системы $\{C(1)\,X_1(3)\}$ совпадает с центроидом системы $\{A(2)\,B(1)\,C(1)\}$, то есть с $E(4)$. Следовательно, точка E лежит на отрезке CX_1, а поэтому $X \equiv X_1$ и $\frac{AX}{XB}=\frac{1}{2}$.

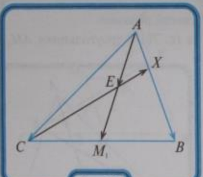

Рис. 72

Восемнадцатый способ решения.

Пусть $\alpha, \beta\ (0<\alpha<1,\ \beta>1)$ — некоторые числа, такие что

$$\overline{AX}=\alpha\overline{AB},\quad \overline{CX}=\beta\overline{CE}$$

(рис. 72). Тогда

$$\alpha\overline{AB}=\overline{AC}+\beta\overline{CE}.$$

Но

$$\overline{CE}=\overline{AE}-\overline{AC}=\frac{1}{2}\overline{AM_1}-\overline{AC}=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\overline{AC}+\overline{AB}\right)-\overline{AC}=\frac{1}{4}\overline{AB}-\frac{3}{4}\overline{AC}.$$

Отсюда,

$$\alpha\overline{AB}=\overline{AC}+\beta\left(\frac{1}{4}\overline{AB}-\frac{3}{4}\overline{AC}\right),\quad \left(\alpha-\frac{\beta}{4}\right)\overline{AB}=\left(1-\frac{3}{4}\beta\right)\overline{AC}.$$

А поскольку векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ не коллинеарны, то равенство возможно только тогда, когда

$$\begin{cases}\alpha-\frac{\beta}{4}=0\\ 1-\frac{3}{4}\beta=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\frac{\beta}{4}\\ \beta=\frac{4}{3}\end{cases}\Rightarrow\alpha=\frac{1}{3}.$$

Следовательно, $\overline{AX}=\frac{1}{3}\overline{AB}$, откуда $\frac{AX}{XB}=\frac{1}{2}$.

Девятнадцатый способ решения.

Положим $AX=x$, $BX=y$ (рис. 72). Тогда

$$\overline{CX}=\frac{y}{x+y}\overline{CA}+\frac{x}{x+y}\overline{CB}. \qquad (1)$$

(векторная формула деления отрезка в данном отношении). Пусть (см. восемнадцатый способ) $\overline{CX}=\beta\overline{CE}\ (\beta>1)$. Тогда

$$\overline{CE}=\frac{1}{2}\left(\overline{CA}+\overline{CM_1}\right),\quad \overline{CX}=\frac{\beta}{2}\left(\overline{CA}+\overline{CM_1}\right),$$

следовательно,

$$\overline{CX}=\frac{\beta}{2}\overline{CA}+\frac{\beta}{4}\overline{CB}. \qquad (2)$$

Сравнивая формулы (1) и (2), получим:

$$\begin{cases}\frac{y}{x+y}=\frac{\beta}{2}\\ \frac{x}{x+y}=\frac{\beta}{4}\end{cases},$$

откуда $\frac{x}{y}=\frac{1}{2}$.

Двадцатый способ решения.

Спроектируем данный треугольник в равносторонний (рис. 73). Тогда медиана AM_1 в нем будет и высотой.

Положим $AX=x$, $BX=y$. Пусть сторона этого равностороннего треугольника равна a, а $\angle XCM_1=\alpha$. Из прямоугольного треугольника EM_1C получим:

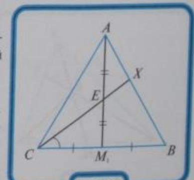

Рис. 73

7 — 4-1664

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{EM_1}{CM_1}=\frac{a\sqrt{3}}{4}:\frac{a}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Из треугольника CXB:

$$\frac{XB}{\sin\angle XCB}=\frac{BC}{\sin\angle BXC},\ \text{или}\ \frac{y}{\sin\alpha}=\frac{a}{\sin\left(120^\circ-\alpha\right)}.$$

Поскольку $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$, то $\sin\alpha=\sqrt{\frac{3}{7}}$, $\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{7}}$, откуда

$$\sin\left(120^\circ-\alpha\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha+\frac{1}{2}\sin\alpha=\frac{1}{2}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}}.$$

Тогда:

$$y=\frac{a\sin\alpha}{\sin\left(120^\circ-\alpha\right)}=\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}:\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}=\frac{2a}{3},\quad x=a-y=\frac{a}{3},\quad \frac{x}{y}=\frac{1}{2}.$$

Двадцать первый способ решения.

Используем формулу радиус-вектора для произвольной точки Y плоскости:

$$\overline{YE}=\frac{p\overline{YC}+q\overline{YA}+\overline{YB}}{p+q+1},$$

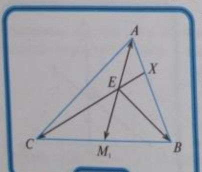

Рис. 74

где (рис. 74)

$$p=BM_1:M_1C=1,$$
$$q=BX:XA.$$

Пусть $Y\equiv E$, тогда

$$\bar{0}=\frac{\overline{EC}+q\overline{EA}+\overline{EB}}{q+2},$$

откуда

$$\bar{0}=\overline{EC}+q\overline{EA}+\overline{EB}.$$

Но $\overline{EC}+\overline{EB}=2\overline{EM_1}$, следовательно,

$$\bar{0}=q\overline{EA}+2\overline{EM_1}=q\overline{EA}-2\overline{M_1E}=(q-2)\overline{EA},$$

а отсюда:

$$q=2,\quad \frac{XA}{XB}=\frac{1}{2}.$$

Двадцать второй способ решения.

Проведем прямую BE. Пусть она пересечет сторону AC в точке Y (рис. 75). Обозначим отрезки AX, XB, BM_1, M_1C, CY, YA через x, y, m, n, p, q, соответственно. По теореме Чевы:

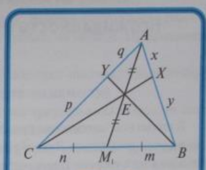

Рис. 75

$$\frac{xmp}{ynq}=1.$$

Поскольку $m=n$, то

$$\frac{x}{y}=\frac{q}{p}. \qquad (1)$$

По теореме Ван-Обеля:

$$\frac{x}{y}+\frac{q}{p}=\frac{AE}{EM_1},\ \text{то есть}\ \frac{x}{y}+\frac{q}{p}=1.$$

Учитывая (1), имеем:

$$\frac{x}{y}+\frac{x}{y}=1,\quad \frac{x}{y}=\frac{1}{2}.$$

7*

Неожиданность обратной задачи

Вспоминает студент мехмата

В школьной математике прямая и обратная теоремы навевали на учеников скуку. В алгебре они серьезно появились только однажды в теореме Виета и исчезли в море параметров. В геометрии прямая и обратная теоремы использовались как-то нетактично-навязчиво: если четырехугольник — параллелограмм, то диагонали в точке пересечения делятся пополам, а если диагонали четырехугольника в точке пересечения делятся пополам, то четырехугольник — параллелограмм... Ну так и что? Разве это чудо?!

Помню, как разволновался класс, когда Учитель «разыграл» нас:

— Если число четное, то оно делится на 2. Так?

— (*Хором*) Yes!

— Если число делится на два, то оно..?

— Четное!

Небольшая пауза.

— Если углы вертикальные, то они..?

— Равны!

— Если углы равны...

Снова радостный хор:

— То они вертикальные (???)!

Даже сегодня весело вспоминать, как смеялся тогда Учитель. А мы... мы в растерянности:

— Прямая теорема верна, а обратная — не всегда?!

Потом нас учили необходимым и достаточным условиям, но удивление, даже шок, ждал на нас впереди. Этому способствовало **мастерство**, настоящее **мастерство** Учителя...

Расскажу об этом по порядку. Важная контрольная работа, то ли за четверть, то ли за полугодие, не помню. Предлагается решить задачи:

1. В равнобедренном треугольнике высоты, проведенные к боковым сторонам, равны. Доказать.

1° (обратная). Если две высоты треугольника равны, то этот треугольник — равнобедренный. Доказать.

2. В равнобедренном треугольнике медианы, проведенные к боковым сторонам, равны. Доказать.

2° (обратная). Если две медианы треугольника равны, то этот треугольник — равнобедренный. Доказать.

Задачи были решены мгновенно, и мы уже собирались сдавать «боевые листки», но тут Учитель предложил третье задание — еще две задачи, которые были почти полной копией предыдущих:

3. В равнобедренном треугольнике биссектрисы, проведенные к боковым сторонам, равны. Доказать.

3° (обратная). Если две биссектрисы треугольника равны, то этот треугольник — равнобедренный. Доказать.

Мы восторженно:

— Нет проблем!

Но учитель ошеломляет:

— Кто сделает — «5» за год по геометрии!

«5» по геометрии?! За год?! У него???

Мы уже почти видели счастливые лица наших родителей и их гордость за талантливых детей («Весь в отца!»)...

К сожалению, как это и прогнозировалось учителем, мы «провалились». Ну кто же мог подумать, что обратная задача о двух биссектрисах известна всему миру как теорема Штейнера—Лемуса.

О ней мы еще поговорим в других разделах, а теперь — о задачах, где прямая задача — «нечего делать», а обратная — «ну очень сложная». Большая коллекция таких задач представлена в книге «Методи розв'язання задач з геометрії»[1]. Кроме «эффекта двух биссектрис», важно также то, что о существовании обратной задачи в этом случае мало кто подозревает. Вспомним некоторые задачи такого рода (без доказательств):

Задача 1. Если в четырехугольнике сумма двух противоположных углов равна 180°, то вокруг него можно описать окружность.

Задача 2. Если в выпуклом четырехугольнике суммы противоположных сторон равны между собой, то в него можно вписать окружность.

Задача 3. Если из точки C, которая лежит вне окружности, к окружности проведена секущая, пересекающая окружность в точках A и B, а точка D принадлежит окружности, причем $CD^2 = CA \cdot CB$, то прямая CD является касательной к этой окружности.

Задача 4. Если внутри остроугольного треугольника существует точка X, такая что для углов $\varphi_1 = \angle BXC$, $\varphi_2 = \angle AXC$ выполняется одна из систем равенств:

[1] См. примечание на с. 18.

1) $\varphi_1 = 90° + \dfrac{A}{2}$, $\varphi_2 = 90° + \dfrac{B}{2}$,

2) $\varphi_1 = 180° - A$, $\varphi_2 = 180° - B$,

3) $\varphi_1 = 2A$, $\varphi_2 = 2B$,

то точка X будет соответственно:

1) инцентром I,

2) ортоцентром H,

3) центром O описанной окружности.

Задача 5. Доказать, что если в трапеции $ABCD$ (AD и BC — основания) $AB + BD = AC + CD$, то трапеция — равнобедренная.

Хоровод обратных задач

Рассмотрим несколько обратных задач, связанных одной идеей как в условии, так и при решении. Эти задачи, так или иначе, «вращаются» вокруг одной, которая иногда кажется достаточно легкой, а иногда, на первый взгляд, вообще неверной по условию. Но она — просто жемчужинка. Жемчужинка из нашей коллекции.

Задача (основная). Дан отрезок, концы которого принадлежат двум сторонам треугольника, а сам он параллелен третьей стороне. Тогда медиана, проведенная к этой стороне, делит этот отрезок пополам. Доказать.

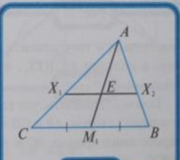

Рис. 76

Доказательство.

Доказательство следует из подобия треугольников AEX_1 и AM_1C, а также AEX_2 и AM_1B (рис. 76).

Имеем

$$\frac{EX_1}{CM_1}=\frac{AE}{AM_1}=\frac{EX_2}{BM_1}.$$

Но $CM_1 = BM_1$, поэтому $EX_1 = EX_2$.

Рассмотрим теперь обратные задачи.

Задача 1. Концы отрезка принадлежат двум сторонам треугольника. Доказать, что если медиана, проведенная к третьей стороне, делит этот отрезок пополам, то он параллелен этой стороне.

Доказательство.

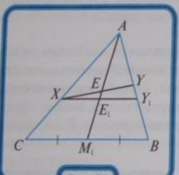

Рис. 77

Пусть отрезок XY делится медианой AM_1 пополам:

$$XE = EY$$

(рис. 77). Предположим, что он не является параллельным стороне BC. Проведем отрезок XY_1, параллельный BC. Тогда медиана разделит его пополам:

$$XE_1 = E_1Y_1$$

(согласно прямой задаче). Следовательно, в треугольнике XYY_1 отрезок EE_1 — средняя линия, а поэтому $EE_1 || YY_1$, что невозможно. Отсюда, $XY || BC$.

Задача 2. Доказать, что если середины M и N двух противоположных сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$ и точка S пересечения прямых BC и AD принадлежат одной прямой, то $ABCD$ — трапеция.

Доказательство.

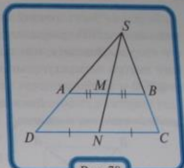

Рис. 78

Итак, пусть точки M, N, S принадлежат одной прямой (рис. 78).

Тогда SN — медиана в треугольнике SCD и она делит отрезок AB пополам. Из задачи 1 следует, что

$$AB || DC,$$

то есть $ABCD$ — трапеция.

Задача 3. Доказать, что если прямая, которая проходит через середины двух противоположных сторон выпуклого четырехугольника, проходит и через точку пересечения диагоналей, то четырехугольник — трапеция или параллелограмм.

Доказательство.

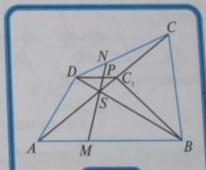

Рис. 79

Предположим, что сторона DC не параллельна стороне AB (рис. 79). Пусть точки M и N — середины сторон AB и CD, соответственно, S — точка пересечения диагоналей. По условию, точки M, N, S принадлежат одной прямой. Проведем $DC_1 || AB$ ($C_1 \in AC$). Прямая MN пересечет отрезок DC_1 в его середине — точке P, поскольку

$$\frac{PD}{MB}=\frac{PS}{SM}=\frac{PC_1}{AM} \text{ и } AM = BM.$$

Следовательно, NP — средняя линия в треугольнике DCC_1, то есть $NP || CC_1$, что невозможно (поскольку $S \in NP$, $S \in CC_1$).

Задача 4. Через точку O пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$ проведена прямая, параллельная одной из его сторон. Доказать, что если отрезок этой прямой, лежащий внутри четырехугольника, делится точкой O пополам, то $ABCD$ — трапеция.

Доказательство.

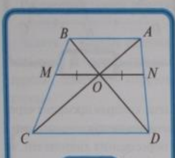

Рис. 80

Пусть прямая, проходящая через точку O параллельно стороне AB, пересекает стороны BC и AD в точках M и N (рис. 80). Тогда

$$\frac{AB}{NO}=\frac{BD}{OD}, \quad \frac{AB}{MO}=\frac{AC}{OC},$$

и поскольку $NO = MO$, то

$$\frac{BD}{OD}=\frac{AC}{OC},$$

откуда

$$\frac{BO+OD}{OD}=\frac{AO+OC}{OC}, \quad \frac{BO}{OD}=\frac{AO}{OC}.$$

Следовательно, $AB || CD$.

ЕЩЕ ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ

Задача (прямая). Через вершину, между сторонами угла проведен луч. На нем взяты две произвольные точки A и B. Доказать, что расстояния от них до сторон угла пропорциональны между собой.

Доказательство очевидно.

Ценность предложенной задачи состоит в том, что, во-первых, «не видно» обратной задачи, во-вторых, в отличие от прямой, доказательство обратной не является очевидным.

Задача (обратная). Внутри угла с вершиной S взяты две произвольные точки A и B, расстояния от которых до сторон угла пропорциональны между собой. Доказать, что точки A, B и S принадлежат одной прямой.

Если читатель «легко» решил эту задачу, советуем ему проверить, правильно ли его решение, если данный угол — тупой.

Приведем решение, которое не зависит от того, является ли острым угол с вершиной S.

Доказательство.

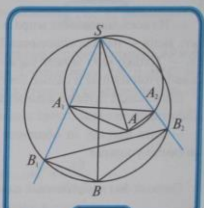

Рис. 81

Пусть A и B — данные точки (рис. 81), A_1, A_2, B_1, B_2 — их проекции на стороны угла. Опишем окружности вокруг четырехугольников SA_1AA_2 и SB_1BB_2. Поскольку

$$\frac{AA_1}{BB_1}=\frac{AA_2}{BB_2}$$

и

$$\angle A_1AA_2 = 180^\circ - \angle S = \angle B_1BB_2,$$

то треугольники A_1AA_2 и B_1BB_2 подобны. Отсюда

$$\angle A_2SA = \angle A_2A_1A = \angle B_2B_1B = \angle B_2SB,$$

и следовательно, лучи SA и SB совпадают, то есть точки S, A, B принадлежат одной прямой.

Знания или импровизация? (1002-я сказка Шахерезады)

— Из всех диковинок мира только Геометрия смогла поразить меня — начала спасенная Шахерезада свою новую сказку. — Только Она может удовлетворить самые изысканные, самые утонченные и самые благородные желания.

Шахерезада глубоко вздохнула, и ее вздох перешел в многозначительную паузу:

— Хотя награду от общения с Геометрией получали только самые упорные.

Сначала был неограненный алмаз:

Задача. Дан равнобедренный треугольник ABC ($AB = AC$). Окружность касается боковых сторон AB и AC в точках P и Q, соответственно, а также внутренним образом касается описанной вокруг треугольника ABC окружности. Доказать, что середина отрезка PQ является инцентром треугольника ABC.

Много искателей алмазов вышли на путь поисков, но только тот, кто знал **гомотетию**, *приблизился к получению первой награды:*

Решение.

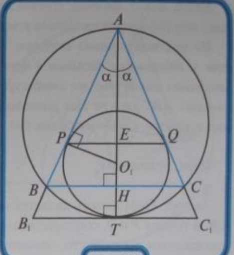

Рис. 82

Пусть AH — высота треугольника ABC, E — середина отрезка PQ, O_1 — центр данной окружности, T — точка касания данной окружности с окружностью, описанной вокруг треугольника (рис. 82).

Ясно, что точки E и T принадлежат прямой AH. Проведем через точку T касательную к данной окружности (а следовательно, и к описанной вокруг треугольника ABC окружности). Пусть она пересечет прямые AB и AC в точках B_1 и C_1, соответственно. Треугольники ABC и AB_1C_1 гомотетичны с центром гомотетии в точке A и коэффициентом гомотетии $k = \frac{AH}{AT}$. Из прямоугольных треугольников AHB и ABT имеем, что

$$AH = AB\cos\alpha, \quad AT = \frac{AB}{\cos\alpha}$$

($\alpha = \angle BAH = \angle CAH$), следовательно, $k = \cos^2\alpha$.

Аналогично, из прямоугольных треугольников AEP и APO_1:

$$\frac{AE}{AO_1} = \cos^2\alpha.$$

Следовательно, при этой гомотетии точка O_1 перейдет в точку E, а поскольку точка O_1 — центр вписанной в треугольник окружности, то E будет центром вписанной в треугольник ABC окружности.

Итак, алмаз завоеван! Ничего здесь не поделаешь — случилось так, что Геометрия проиграла в честном бою.[1]

Но она подготовила сюрприз: Геометрия владела бриллиантом — настоящим, большим и прекрасным. На первый взгляд, он напоминал алмаз: та же конфигурация, те же грани... Но треугольник ABC уже не был равнобедренным. Нужно было искать новые приемы, чтобы выиграть бой.

Итак, бриллиант:

Задача. Окружность касается сторон AC и AB треугольника ABC в точках P и Q, соответственно, а также внутренним образом касается окружности, описанной вокруг этого треугольника. Доказать, что инцентр I треугольника ABC совпадает с серединой отрезка PQ.

Доказательство.

Опытные «искатели бриллиантов» решили найти непрямой, но разумный и неожиданный путь: чтобы доказать, что точка E, середина отрезка PQ, является инцентром треугольника ABC, достаточно показать, что

$$AE = \frac{r}{\sin\frac{A}{2}}, \tag{1}$$

где r — радиус вписанной в треугольник ABC окружности. Действительно, поскольку

$$AP = AQ, \text{ то } AO_1 \perp PQ$$

(O_1 — центр данной окружности), а точка E лежит на прямой AO_1 (рис. 83). Поскольку инцентр также лежит на AO_1 (биссектрисе угла A), то, чтобы доказать, что точки E и I совпадают, достаточно показать, что $AE = AI$.

[1] А может, Геометрия выиграла — это уже на усмотрение читателя!

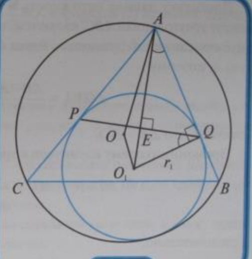

Рис. 83

Но известно (и очевидно!), что

$$AI = \frac{r}{\sin\frac{A}{2}}.$$

Следовательно, наша цель — доказать формулу (1)!

Но поиски непрямого пути продолжались: пусть r_1 — радиус данной в условии окружности, следовательно, $O_1Q = r_1$.

Из треугольников O_1EQ и AEQ имеем:

$$r_1 = \frac{EQ}{\cos\angle EQO_1} = \frac{AE\,\mathrm{tg}\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}} = AE\,\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}},$$

откуда:

$$AE = \frac{r_1\cos^2\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}}.$$

Следовательно, для доказательства формулы (1) *и получения бриллианта* достаточно показать, что

$$r_1\cos^2\frac{A}{2} = r. \tag{2}$$

Попробуем доказать это по аналогии с **тригонометрическим доказательством формулы Эйлера**.

Поскольку данная окружность и окружность, описанная вокруг треугольника ABC, касаются, то $OO_1 = R - r_1$, где R — радиус описанной окружности. Точка O_1 лежит на биссектрисе угла A, поэтому

$$\angle OAO_1 = \frac{\angle B - \angle C}{2}$$

(считаем, что $\angle B > \angle C$).

Применим теорему косинусов к треугольнику AOO_1:

$$AO = R, \quad AO_1 = \frac{r_1}{\sin\frac{A}{2}},$$

а следовательно,

$$(R - r_1)^2 = R^2 - 2R\frac{r_1}{\sin\frac{A}{2}}\cos\frac{B-C}{2} + \frac{r_1^2}{\sin^2\frac{A}{2}},$$

Отсюда

$$r_1\sin^2\frac{A}{2} - r_1 = -2R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2} + 2R\sin^2\frac{A}{2},$$

$$r_1\cos^2\frac{A}{2} = 2R\sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B-C}{2} - \sin\frac{A}{2}\right),$$

$$r_1\cos^2\frac{A}{2} = 2R\sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B-C}{2} - \cos\frac{B+C}{2}\right),$$

$$r_1\cos^2\frac{A}{2} = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

— Ура! — вырвался восторженный возглас у искателей. — Нам помогают неземные силы! Это же формула! Знакомая формула!!! Вот она:

$$r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

Следовательно, $r_1\cos^2\frac{A}{2} = r$, и формула (2) доказана. Значит, доказана и формула (1) — *и бриллиант наш! Знания помогли!*

Но Геометрия не сдавалась:

— Я отдам этот прекрасный бриллиант только тогда, когда вы найдете не просто решение, а чисто геометрическое решение.

— Ну, что же делать, — тихо сказала огорченная Шахерезада, — геометрическое, так геометрическое. Но тут придется обращаться к небесам за помощью.

В тот же миг прозвучал страшной силы гром, и голос, который услышал каждый, прогремел:

— Отправляю к вам Архимеда!

Архимед прилетел на волшебной колеснице, у которой вместо колес были бесчисленные окружности, и скинул папирус. Искатели быстро его развернули и прочли:

Лемма Архимеда. Если какая-то окружность касается данной окружности и ее хорды, то прямая, соединяющая точки касания, проходит через середину дуги, стягиваемой этой хордой.

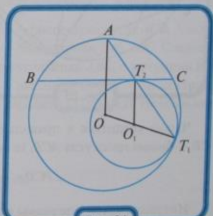

Рис. 84

Доказательство.

Пусть O, O_1 — центры данных окружностей (рис. 84), T_1 — точка касания окружностей, T_2 — точка касания меньшей окружности и хорды BC большей окружности, A — точка пересечения прямой T_1T_2 с большей окружностью.

8 — 4-1664

Треугольники $O_1T_1T_2$ и OT_1A равнобедренные, поэтому

$$\angle O_1T_2T_1 = \angle O_1T_1T_2 = \angle OT_1A = \angle OAT_1,$$

откуда $O_1T_2 \parallel OA$. Но ведь $O_1T_2 \perp BC$, следовательно, $OA \perp BC$, и поэтому $\cup AB = \cup AC$.

Итак, лемму доказали, а дальше? Как же дальше? Нет больше ни одной подсказки. Не будет больше помощи! Тогда решили искатели бриллиантов двигаться далее самостоятельно. Вместо компаса им стала полезна лемма и ее величество — Интуиция. Вначале подготовили они хороший рисунок (рис. 85). А далее...

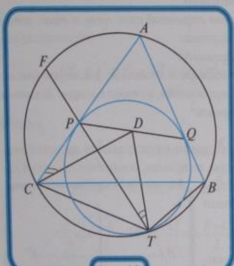

Рис. 85

Сохраним все обозначения из «тригонометрического способа». Пусть T — точка касания данной окружности и окружности, описанной вокруг треугольника ABC.

Проведем биссектрису угла BTC. Пусть она пересечет отрезок PQ в некоторой точке D. Интуиция подсказывает, что точка D — инцентр треугольника ABC.

Чтобы убедиться в правильности догадки, докажем, что CD — биссектриса угла ACB, то есть, что

$$\angle PCD = \frac{1}{2}\angle ACB. \qquad (3)$$

Интуиция ведет: а не равны ли углы PTD и PCD? Попробуем доказать, что точки C, P, D, T принадлежат одной окружности.

Действительно,

$$\angle CPD + \angle CTD = 180° - \left(90° - \frac{A}{2}\right) + \frac{1}{2}\angle CTB =$$

$$= 90° + \frac{A}{2} + \frac{1}{2}(180° - A) = 180°.$$

Следовательно, четырехугольник $CPDT$ — вписанный, поэтому $\angle PTD = \angle PCD$. А теперь не интуиция — уверенность — применим лемму Архимеда: данная в условии окружность внутренним образом касается описанной окружности и ее хорды AC, а поэтому прямая TP делит дугу AC пополам. Пусть прямая TP пересечет описанную окружность в точке F, тогда $\cup CF = \cup AF = \frac{1}{2}\cup AC$. Остаются вычисления:

$$\angle CTD = \angle CTF + \angle FTD = \frac{\angle ABC}{2} + \angle ACD;$$

с другой стороны:

$$\angle CTD = \frac{1}{2}\angle CTB = \frac{1}{2}(180° - A) = 90° - \frac{A}{2};$$

следовательно, $90° - \frac{\angle BAC}{2} = \frac{\angle ABC}{2} + \angle ACD, \quad \angle ACD = \frac{\angle ACB}{2}.$

Равенство (3) доказано, CD — биссектриса угла ACB. Аналогично доказывается, что BD — биссектриса угла ABC. Следовательно, точка D — инцентр треугольника ABC, и интуиция нас не подвела. А поскольку D — инцентр, то AD — биссектриса угла A, и, следовательно, D — середина PQ (так как треугольник APQ — равнобедренный).

Победа!

Шахерезада мудро усмехнулась:

— Знания или интуиция?

Поздравляем вас с новым бриллиантом, уважаемые читатели!

8 •

Углы в правильной треугольной пирамиде: страсти и находки

Что может быть в школьной математике страшнее, чем постоянные шаги по шаблонам?! «Боковое ребро правильной треугольной пирамиды образует с основанием...» И поехала задачка на аттестат о среднем образовании. Даже в очень популярном сборнике задач под редакцией М. И. Сканави только изредка встречаются задачи, в которых фигурируют угол между боковым ребром и боковой гранью или угол между стороной основания и боковой гранью... Жаль, что это так! Ведь в работе со «стереометрическими углами», как говорится, возможны варианты. И некоторые из этих вариантов требуют немалых знаний и геометрических «выкрутасов». Рассмотрим некоторые возможные в правильной треугольной пирамиде ситуации по нарастанию степени сложности и «небезопасности».

Ситуация 1. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды образует с плоскостью основания угол α. Найти плоский угол при вершине пирамиды.

Решение.

Пусть сторона основания пирамиды $SABC$ равна a (рис. 86), SO — высота пирамиды.

Из треугольника SAO:

$$SA = \frac{AO}{\cos\alpha} = \frac{a\sqrt{3}}{3\cos\alpha}. \quad (1)$$

Проведем апофему SD. Пусть $x = \angle BSC$ — искомый угол. Тогда

$$\angle ASD = \frac{x}{2},$$

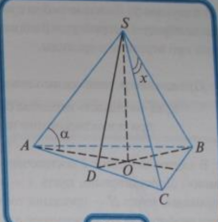

Рис. 86

$$SA = \frac{a}{2\cdot\sin\frac{x}{2}}. \quad (2)$$

Сравнивая (1) и (2), имеем:

$$\frac{a\sqrt{3}}{3\cos\alpha} = \frac{a}{2\cdot\sin\frac{x}{2}},$$

отсюда

$$\sin\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha, \quad x = 2\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha\right).$$

Замечание. Эту задачу можно также решить, используя **«формулу трех косинусов»**

$$\cos\angle SAC = \cos\angle SAO\cdot\cos\angle OAC$$

или

$$\cos\left(90^\circ - \frac{x}{2}\right) = \cos\alpha\cdot\cos 30^\circ,$$

$$\sin\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha, \quad x = 2\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha\right).$$

Ситуация 2. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды образует острый угол β с боковой гранью. Найти плоский угол при вершине пирамиды.

Прежде всего, необходимо ответить на вопрос:

куда «попадает» вершина основания пирамиды при проектировании на боковую грань?

В случае ситуации 2 достаточно ответа: «На высоту боковой грани»[1]. Действительно, пусть x — искомый угол при вершине пирамиды, точка H — проекция точки A на грань BSC (рис. 87), тогда по формуле трех косинусов имеем:

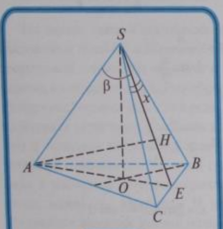

Рис. 87

$$\cos\angle ASC = \cos\angle ASH\cdot\cos\angle CSE,$$

или

$$\cos x = \cos\beta\cdot\cos\frac{x}{2}.$$

Значение $\cos\frac{x}{2}$ будем искать из уравнения

$$2\cos^2\frac{x}{2} - 1 = \cos\beta\cos\frac{x}{2}.$$

Имеем (с учетом того, что $0 < \cos\frac{x}{2} < 1$):

$$\cos\frac{x}{2} = \frac{\cos\beta + \sqrt{\cos^2\beta + 8}}{4}, \quad x = 2\arccos\frac{\cos\beta + \sqrt{\cos^2\beta + 8}}{4}.$$

[1] Действительно, $\angle ASB = \angle ASC$ (рис. 87) и любая точка отрезка SA проектируется на биссектрису SE угла BSC.

Теперь пришло время вернуться к вопросу о проекции вершины основания на боковую грань в правильной треугольной пирамиде.

Теорема. Проекция вершины основания правильной треугольной пирамиды на боковую грань совпадает с ортоцентром этой грани.

Доказательство.

Доказательство проведем для случая, когда боковые грани пирамиды — остроугольные треугольники. Мы уже знаем, что SE — высота треугольника SBC. Проведем прямую CH, пусть она пересечет ребро SB в некоторой точке K (рис. 88).

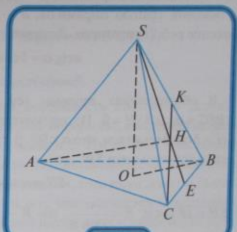

Рис. 88

Поскольку SO — перпендикуляр к плоскости ABC, SB — наклонная, OB — проекция SB на плоскость ABC и $AC \perp BO$, то $AC \perp SB$.

Поскольку AH — перпендикуляр к плоскости SBC, AC — наклонная, CH — проекция AC на эту плоскость и $SB \perp AC$, то $SB \perp CH$, то есть CK — высота треугольника SBC.

Следовательно, точка H — ортоцентр этого треугольника.

Ситуация 3. Сторона основания правильной треугольной пирамиды образует угол γ с боковой гранью. Найти плоский угол при вершине пирамиды.

Указание.

Решение этой ситуации полностью сводится к предыдущей, поскольку (см. рис. 88):

$$\angle SCA = \angle SCB = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BSC,$$

и, по теореме, из прямоугольного треугольника SKC имеем:

$$\angle SCK = 90^\circ - \angle BSC.$$

Ситуация 4. Пусть α — плоский угол при вершине правильной треугольной пирамиды, β — угол между боковым ребром и боковой гранью пирамиды, a — сторона основания, b — боковое ребро пирамиды. Доказать, что

$$a\operatorname{ctg}\alpha = b\cos\beta. \qquad (*)$$

Доказательство.

В обозначениях теоремы (см. рис. 88) $BC = a$, $SA = b$, $\angle BSC = \alpha$, $\angle ASH = \beta$. Из прямоугольного треугольника AHS: $SH = b\cos\beta$ (считаем, что $\alpha < 90^\circ, \beta < 90^\circ$). Поскольку H — ортоцентр треугольника SBC, то

$$SH = a\operatorname{ctg}\alpha$$

($SH = 2R\cos\alpha$, $R = \dfrac{a}{2\sin\alpha}$, где R — радиус описанной вокруг треугольника SBC окружности). Следовательно, равенство (*) выполняется[1].

[1] Формула (*) справедлива и для ортоцентрического тетраэдра.

Защита формул — что это?

Еще одна отличительная особенность школьной геометрии — ее формулы. Их много, они интересны, но судьбы их различны. Несколько формул знают все. Им выпала счастливая судьба — они есть в *программе*. Но подавляющее большинство формул остаются «непристроенными», хотя их уважают и любят не только специалисты, но и все, кто увлекается геометрией. Покажем некоторые из наиболее интересных и защитим их право не только на равные возможности существования наряду с официально принятыми формулами, но и на восхищение их видом, их доказательствами и их возможностями.

1. Две формулы отрезка AH

$$AH^2 = 4R^2 - a^2; \qquad (1^\circ)$$

$$AH = 2R|\cos A| \qquad (1^{\circ\circ})$$

($a = BC$, точка H — ортоцентр треугольника ABC, R — радиус описанной вокруг этого треугольника окружности).

Доказательство 1°.

Пусть треугольник ABC — остроугольный (рис. 89). Через его вершины проведем прямые, параллельные сторонам треугольника.

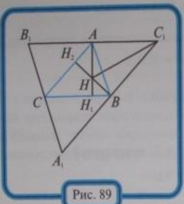

Рис. 89

Мы получим треугольник $A_1B_1C_1$, гомотетичный треугольнику ABC с центром гомотетии — центроидом треугольника ABC — и коэффициентом $k = -2$.

Ортоцентр H треугольника ABC будет центром окружности, описанной вокруг треугольника $A_1B_1C_1$, радиус этой окружности равен $2R$ (R — радиус окружности, описанной вокруг треугольника ABC).

Теперь из треугольника HAC_1 (в котором $AC_1 = a$, $HC_1 = 2R$, $\angle HAC_1 = 90^\circ$) по теореме Пифагора получим формулу (1°). Для тупоугольного треугольника доказательство аналогично.

Используя следствие из теоремы синусов ($a = 2R\sin\angle A$), из формулы (1°) легко получается формула (1°°).

Задача 1 (автор Ф. Бартеньев). В параллелограмме $ABCD$ из вершины A тупого угла опущены перпендикуляры AA_1 (на сторону BC) и AA_2 (на сторону CD). Пусть $AC = d$, $A_1A_2 = t$. Найти расстояние от вершины A до ортоцентра H треугольника AA_1A_2.

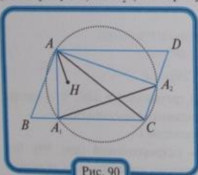

Рис. 90

Решение.

Поскольку

$$\angle AA_1C = \angle AA_2C = 90^\circ$$

(рис. 90), то четырехугольник AA_1CA_2 вписан в окружность радиуса $\dfrac{d}{2}$.

Используем (1°) для треугольника AA_1A_2, получим:

$$AH^2 = 4\left(\frac{d}{2}\right)^2 - (A_1A_2)^2 = d^2 - t^2.$$

Ответ: $AH = \sqrt{d^2 - t^2}$.

Задача 2. Найти угол A остроугольного треугольника ABC, если биссектриса этого угла перпендикулярна прямой Эйлера

Решение.

Поскольку

$$\angle OAL = \angle LAH$$

(где L — основание биссектрисы угла BAC, H — ортоцентр треугольника ABC) (рис. 91), то $OA = AH$.

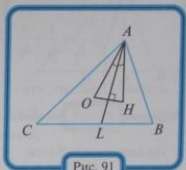

Рис. 91

Тогда из формулы (1°°) имеем:

$$R = 2R\cos A,$$

откуда

$$\cos A = \frac{1}{2}, \quad A = 60^\circ.$$

Ответ: $A = 60^\circ$.

Формулы 1° и 1°° часто используются и при решении стереометрических задач (см., например, предыдущий раздел, с. 120).

2. Формула

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r} \qquad (2)$$

(h_a, h_b, h_c — высоты треугольника, r — радиус вписанной в треугольник окружности).

Доказательство.

Пусть S — площадь треугольника ABC. Тогда

$$h_a = \frac{2S}{a}, \quad \frac{1}{h_a} = \frac{a}{2S}.$$

Аналогично,

$$\frac{1}{h_b} = \frac{b}{2S}, \quad \frac{1}{h_c} = \frac{c}{2S}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{a+b+c}{2S} = \frac{2p}{2S} = \frac{1}{r}.$$

Задача 1. Доказать, что

$$h_a + h_b + h_c \geq 9r.$$

Доказательство.

По неравенству Коши:

$$(h_a + h_b + h_c)\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right) \geq 9.$$

Учитывая формулу (2), имеем $h_a + h_b + h_c \geq 9r$.

Задача 2. Доказать, что если в треугольнике ABC

$$h_a + h_b + h_c = 9r,$$

то он равносторонний.

Доказательство.

Из доказательства предыдущей задачи следует, что

$$h_a + h_b + h_c = 9r$$

только тогда, когда высоты равны между собой, а это и означает, что треугольник ABC — равносторонний.

Задача 3. Из центроида M треугольника ABC опущены перпендикуляры MT_1, MT_2, MT_3 на стороны BC, AC, AB, соответственно. Доказать, что

$$\frac{1}{MT_1} + \frac{1}{MT_2} + \frac{1}{MT_3} = \frac{3}{r}.$$

Доказательство.

Поскольку (рис. 92)

$$\frac{MT_1}{AH_1} = \frac{MM_1}{AM_1} = \frac{1}{3},$$

то

$$\frac{1}{MT_1} = \frac{3}{h_a}.$$

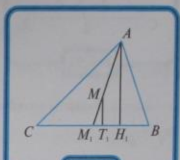

Рис. 92

Следовательно, из формулы (2) имеем:

$$\frac{1}{MT_1} + \frac{1}{MT_2} + \frac{1}{MT_3} = \frac{3}{h_a} + \frac{3}{h_b} + \frac{3}{h_c} = \frac{3}{r}.$$

3. Формула биссектрисы

$$l_a = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2} \qquad (3)$$

(l_a — биссектриса угла BAC).

Обратим внимание, что доказательство этой формулы есть прекрасной иллюстрацией метода вспомогательного элемента (вспомогательный элемент — площадь), о котором мы уже говорили.

Доказательство.

Пусть S_1, S_2, S — площади треугольников ACL, ABL, ABC, соответственно (рис. 93). Тогда $S = S_1 + S_2$, или

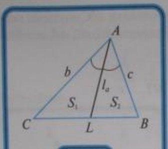

Рис. 93

$$\frac{1}{2}bl_a\sin\frac{A}{2} + \frac{1}{2}cl_a\sin\frac{A}{2} = $$
$$= \frac{1}{2}bc\sin A,$$
$$l_a(b+c)\sin\frac{A}{2} = 2bc\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2},$$

откуда

$$l_a = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}.$$

Задача 1. Доказать, что если в треугольнике ABC $\angle BAC = 120°$, то $\frac{1}{l_a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

Доказательство.

Из формулы (3) имеем:

$$l_a = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{120°}{2} = \frac{bc}{b+c}, \text{ откуда } \frac{1}{l_a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Задача 2. Биссектриса угла BAC остроугольного треугольника ABC перпендикулярна прямой Эйлера. Доказать, что

$$S = \frac{1}{4}l_a(b+c).$$

Доказательство.

Из результата последней задачи «в защиту» формулы длины отрезка AH получим, что $\angle BAC = 60°$. Тогда из формулы (3):

$$l_a = \frac{2bc}{b+c}\cos 30°,$$

а $S = \frac{1}{2}bc\sin 60°$. Отсюда

$$l_a(b+c) = 4S, \text{ или } S = \frac{1}{4}l_a(b+c).$$

Задача 3 (теорема Штейнера—Лемуса). Доказать, что если в треугольнике ABC $l_a = l_b$, то $a = b$.

Доказательство.

Используя формулу длины биссектрисы, имеем

$$\frac{2\cos\frac{A}{2}}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} = \frac{2\cos\frac{B}{2}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}.$$

Предположим, что $a > b$, то есть $\angle A > \angle B$. Тогда $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$, откуда $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} < \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Следовательно, $\cos\frac{A}{2} > \cos\frac{B}{2}$, или $\angle A < \angle B$, что приводит к противоречию. Случай $a < b$ рассматривается аналогично. Следовательно, $a = b$.

Задача 4. Плоскость пересекает боковые ребра правильной четырехугольной пирамиды в точках, расстояния от которых до вершины равны a, b, c, d. Доказать, что $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{1}{b} + \frac{1}{d}$.

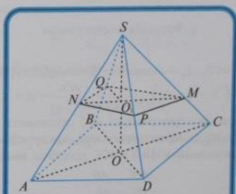

Рис. 94

Доказательство.

Пусть $SABCD$ — правильная четырехугольная пирамида (рис. 94), $PNQM$ — ее сечение данной плоскостью, $SN = a$, $SQ = b$, $SM = c$, $SP = d$. Пусть SO — высота пирамиды, α — угол между высотой пирамиды и боковым ребром:

$$\alpha = \angle NSO = \angle QSO = \angle MSO = \angle PSO.$$

Пусть прямая SO пересекает сечение $PNQM$ в некоторой точке O_1. Поскольку SO — биссектриса углов ASC и BSD, то SO_1 — биссектриса треугольников SNM и SPQ. Тогда, по формуле длины биссектрисы, имеем:

$$\frac{2bd}{b+d}\cos\alpha = SO_1 = \frac{2ac}{a+c}\cos\alpha,$$

отсюда

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{1}{b}+\frac{1}{d}.$$

Рассмотрим несколько формул, в которых нас прежде всего будет интересовать их доказательство.

4. Формула биссектрисы

$$l_a^2 = bc - b_1c_1 \qquad (4)$$

($b_1 = BL_1$, $c_1 = CL_1$, L_1 — основание биссектрисы угла BAC).

Доказательство.

Опишем вокруг треугольника ABC окружность и продлим биссектрису AL_1 до пересечения с этой окружностью в точке W (рис. 95). Треугольники AWB и ACL_1 подобны, поэтому

$$\frac{AW}{AC}=\frac{AB}{AL_1}.$$

Пусть $t = L_1W$.

Тогда

$$\frac{l_a+t}{b}=\frac{c}{l_a},$$

или

$$l_a^2 + l_a t = bc.$$

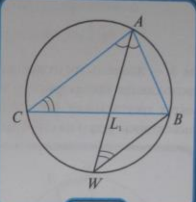

Рис. 95

По теореме о произведении отрезков пересекающихся хорд:

$$l_a t = b_1c_1,$$

следовательно,

$$l_a^2 = bc - b_1c_1.$$

5. Формула биссектрисы

$$l_a = \frac{2\sqrt{bcp(p-a)}}{b+c}. \qquad (5)$$

Доказательство.

Учитывая, что

$$BL_1 = \frac{ac}{b+c}, \quad CL_1 = \frac{ab}{b+c},$$

и используя формулу (4), имеем:

$$l_a^2 = bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = \frac{bc}{(b+c)^2}\left((b+c)^2 - a^2\right) =$$

$$= \frac{bc}{(b+c)^2}(b+c+a)(b+c-a) = \frac{bc}{(b+c)^2}2p(2p-2a)$$

Отсюда,

$$l_a = \frac{2\sqrt{bcp(p-a)}}{b+c}.$$

6. Формула площади треугольника ABC

$$S = \frac{1}{2}AW\cdot MN, \qquad (6)$$

где S — площадь треугольника ABC, W — точка пересечения продолжения биссектрисы угла A с окружностью, описанной вокруг треугольника ABC, M и N — проекции основания L_1 биссектрисы угла A на стороны AC и AB, соответственно.

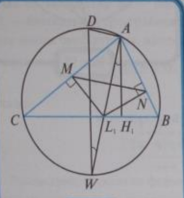

Рис. 96

Доказательство.

Вокруг четырехугольника AML_1N можно описать окружность, причем отрезок AL_1 — его диаметр (рис. 96).

Тогда по следствию из теоремы синусов для треугольника AMN имеем:

$$MN = l_a \sin A.$$

Учитывая формулу (3), получим:

$$MN = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}\sin A = \frac{2bc\sin A}{2R\sin B + 2R\sin C}\cos\frac{A}{2} =$$

$$= \frac{4S}{2R}\,\frac{\cos\frac{A}{2}}{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}} = \frac{S}{R\cos\frac{B-C}{2}}.$$

(R — радиус описанной вокруг треугольника ABC окружности).

Пусть AH_1 — высота треугольника ABC, WD — диаметр описанной вокруг треугольника ABC окружности.

Поскольку

$$\angle DWA = \angle WAH_1 = \frac{\angle B - \angle C}{2}$$

(считаем, что $\angle B \ge \angle C$), то

$$R\cos\frac{B-C}{2} = \frac{1}{2}WD\cos\angle DWA = \frac{1}{2}AW.$$

Следовательно,

$$MN = \frac{S}{\frac{1}{2}AW},$$

откуда $S = \frac{1}{2}AW\cdot MN$.

Другим способом эта формула будет доказана в разделе «От „спрятанного“ подобия до разгадки теоремы Птолемея».

А теперь поговорим об одной стереометрической формуле.

7. Формула объема тетраэдра

$$V = \frac{1}{6}a_1a_2d\sin\varphi, \qquad (7)$$

где V — объем тетраэдра, a_1 и a_2 — длины скрещивающихся ребер тетраэдра, d — расстояние между ними, φ — угол между ними.

Доказательство.

Пусть B_1ABD — данный тетраэдр, $BB_1 = a_1$, $AD = a_2$ (рис. 97). Дополним его до параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Пусть $V_п$ — объем этого параллелепипеда. Тогда:

$$V = \frac{1}{6}V_п,$$

поскольку

$$V = \frac{1}{3}H\cdot S_{ABD} = \frac{1}{3}H\cdot\frac{1}{2}S_{ABCD} = \frac{1}{6}H\cdot S_{ABCD} = \frac{1}{6}V_п$$

(H — высота тетраэдра B_1ABD). Поскольку d — это расстояние между гранями AA_1D_1D и BB_1C_1C, то $V_п = d \cdot S_{BB_1C_1C}$. Далее,

$$S_{BB_1C_1C} = BB_1 \cdot BC \cdot \sin \angle B_1BC,$$

$$\angle B_1BC = \varphi, \quad BC = AD = a_2,$$

следовательно, $S_{BB_1C_1C} = a_1a_2 \sin \varphi$. Отсюда,

$$V = \frac{1}{6}V_п = \frac{1}{6}da_1a_2 \sin \varphi.$$

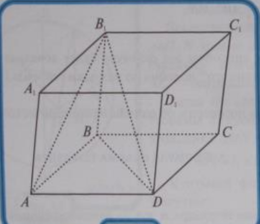

Рис. 97

Задача 1. Доказать, что объем V правильной треугольной пирамиды может быть вычислен по формуле: $V = \frac{1}{3}Ql$, где Q — площадь сечения, проведенного через сторону основания, перпендикулярно противоположному ребру, длина которого равна l.

Доказательство.

Действительно, пусть BEC (рис. 98) — данное сечение правильной треугольной пирамиды $SABC$, перпендикулярное ребру AS, $AS = l$.

Пусть F — середина BC. Тогда по формуле (7):

$$V = \frac{1}{6}AS \cdot BC \cdot EF \cdot \sin 90°.$$

Поскольку

$$Q = \frac{1}{2}EF \cdot BC,$$

то

$$V = \frac{1}{3}AS \cdot Q = \frac{l}{3}Q.$$

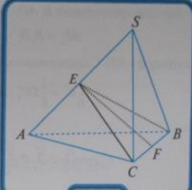

Рис. 98

Задача 2. Найти расстояние d между диагоналями (которые не пересекаются) двух смежных граней куба, если известно, что ребро куба равно a.

Решение.

Соединим в данном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 99) вершины A и C_1 и рассмотрим тетраэдр ADC_1D_1.

Его объем в шесть раз меньше объема куба, то есть равен $\frac{1}{6}a^3$. Используем формулу (7). Ясно, что

$$DC_1 = AD_1 = a\sqrt{2}.$$

Найдем угол φ между ребрами DC_1 и AD_1. Для этого проведем в плоскости ABB_1 диагональ AB_1.

Она параллельна DC_1 и, следовательно,

$$\angle B_1AD_1 = \varphi.$$

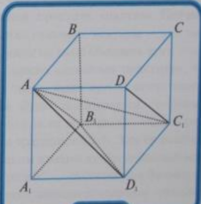

Рис. 99

Но ведь треугольник B_1AD_1 — равносторонний:

$$AB_1 = B_1D_1 = D_1A = a\sqrt{2},$$

поэтому $\varphi = 60°$. Следовательно, имеем:

$$\frac{1}{6}a^3 = \frac{1}{6}DC_1 \cdot AD_1 \cdot d \cdot \sin \varphi,$$

или

$$a^3 = a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot d \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad d = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Ответ: $d = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Векторы кричат: «SOS!»

Векторы появились в школьных программах по математике относительно недавно. С ними поигрались, поохали да и бросили, как куклу, которая давно уже надоела ребенку. Или, точнее, превратили в какого-то подкидыша — подкидыша школьной математики: «Вот держите векторы. Из программы их не исключаем, так что делайте с ними все, что хотите». Авторы учебников подогнали их под свою концепцию, добавили «координатную одежду», а учеников, простите, «надули». Потому что тему ввели, но не объяснили главного: векторы — это новый язык, который ученик раньше не знал! Овладеть этим языком мгновенно невозможно, нужна «языковая практика», то есть нужно решить большое число задач при помощи этого векторного языка. Тогда не будут подниматься вопросы: «Как решать задачу — векторно или не векторно?», «Какое решение лучше — векторное или традиционное?», как не поднимается, например, вопрос: «Каким языком лучше пользоваться для того, чтобы „назвать розу розой“, — русским или французским?». А когда ученики овладеют именно векторным языком, тогда векторы из подкидыша превратятся в друзей-помощников, и их могущество сможет быть использовано еще и в классической геометрии. Но вначале, повторюсь, нужно глубоко изучить векторный язык и не бояться, что его можно дискредитировать «длинными» решениями.

Поймите, друзья, *эти решения не «длинные», они — векторные*! **Всегда был в восторге от чисто векторных решений, так же, как можно быть в восторге от текста, написанного изысканным языком.**

Вот пример такого решения.

Задача. Доказать, что если в треугольнике ABC совпадают центроид и ортоцентр, то этот треугольник равносторонний.

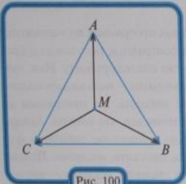

Рис. 100

Доказательство (векторное решение).

Обозначим (рис. 100):

$$\overline{MA}=\overline{r_1},\quad \overline{MB}=\overline{r_2},\quad \overline{MC}=\overline{r_3},$$

где M — центроид треугольника ABC. Тогда имеем:

$$\overline{AB}=\overline{r_2}-\overline{r_1},\quad \overline{AC}=\overline{r_3}-\overline{r_1},\quad \overline{BC}=\overline{r_3}-\overline{r_2}.$$

Докажем, что

$$\left(\overline{r_3}-\overline{r_1}\right)^2=\left(\overline{r_2}-\overline{r_1}\right)^2=\left(\overline{r_3}-\overline{r_2}\right)^2. \qquad (1)$$

Поскольку $MC\perp AB$, то

$$\overline{r_3}\cdot\left(\overline{r_2}-\overline{r_1}\right)=0.$$

Поскольку M — центроид, то $\overline{MA}+\overline{MB}+\overline{MC}=\overline{0}$, то есть

$$\overline{r_1}+\overline{r_2}+\overline{r_3}=\overline{0},\ \text{или}\ \overline{r_3}=-\left(\overline{r_1}+\overline{r_2}\right).$$

Отсюда $\left(\overline{r_1}+\overline{r_2}\right)\cdot\left(\overline{r_2}-\overline{r_1}\right)=0$, поэтому $\overline{r_1}^2=\overline{r_2}^2$.

Аналогично,

$$\overline{r_1}^2=\overline{r_2}^2=\overline{r_3}^2. \qquad (2)$$

Далее, из равенств

$$\overline{r_1}\cdot\left(\overline{r_3}-\overline{r_2}\right)=0,\quad \overline{r_2}\cdot\left(\overline{r_3}-\overline{r_1}\right)=0$$

следует, что

$$\overline{r_1}\cdot\overline{r_2}=\overline{r_2}\cdot\overline{r_3}=\overline{r_3}\cdot\overline{r_1}. \qquad (3)$$

Учитывая (2) и (3), получаем, что (1) доказано, а следовательно, доказано и утверждение задачи.

Идею использования векторов как формальнго языка проиллюстрируем на примере теоремы о средней линии треугольника.

С первых шагов изучения векторной алгебры мы убеждаемся, что рисунок (одно из главных средств в классической геометрии) здесь вторичен.

Итак, требуется доказать, что средняя линия MN треугольника ABC (рис. 101) параллельна стороне BC и равна половине этой стороны.

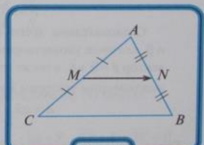

Рис. 101

Пусть X — произвольная точка на плоскости. Тогда, по правилу вычитания векторов, имеем:

$$\overline{MN}=\overline{XN}-\overline{XM}.$$

Поскольку точки M и N — середины отрезков AC и AB, соответственно, то, по известной формуле, имеем:

$$2\overline{XN}=\overline{XA}+\overline{XB},\quad 2\overline{XM}=\overline{XA}+\overline{XC}.$$

Если теперь из предпоследней формулы вычесть последнюю, получим:

$$2\overline{XN}-2\overline{XM}=\overline{XB}-\overline{XC},$$

или

$$\overline{MN}=\frac{1}{2}\overline{CB}.$$

Следовательно, теорема доказана.

Среди «чисто векторных» тем хотелось бы выделить вопрос о доказательстве векторных формул при помощи разложения вектора по двум неколлинеарным векторам.

Теория.

Известно, что если даны два неколлинеарных вектора $\overline{x}$ и $\overline{y}$, то для произвольного вектора $\overline{p}$, компланарного с $\overline{x}$ и $\overline{y}$, существует единственная пара чисел α и β, удовлетворяющая равенству

$$\overline{p}=\alpha\overline{x}+\beta\overline{y}. \qquad (1)$$

Следовательно, всегда можно подобрать числа α и β, которые удовлетворяют (1). Поэтому, если дан вектор $\overline{p}=\overline{a}+\overline{b}$, а также известно, что векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны векторам $\overline{x}$ и $\overline{y}$, то

$$\overline{a}=\alpha\overline{x},\quad \overline{b}=\beta\overline{y}.$$

Теперь покажем несколько формул-задач, решенных именно при помощи рассмотренных соотношений.

Задача 1. Пусть X — произвольная точка внутри треугольника ABC, S_1,S_2,S_3 — площади треугольников XCB, XAC, XAB, соответственно. Доказать, что имеет место равенство:

$$S_1\cdot\overline{XA}+S_2\cdot\overline{XB}+S_3\cdot\overline{XC}=\overline{0}. \qquad (*)$$

Доказательство.

Разложим вектор $\overline{XA}$ по векторам $\overline{XB}$ и $\overline{XC}$ (рис. 102):

$$\overline{XA}=\alpha\overline{XB}+\beta\overline{XC}. \qquad (1)$$

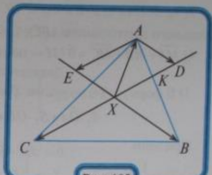

Рис. 102

Отложим векторы $\overline{AE}$ и $\overline{AD}$, которые сонаправлены векторам $\overline{XC}$ и $\overline{XB}$, соответственно. Четырехугольник $ADXE$ — параллелограмм.

Тогда

$$\overline{XA}=\overline{XE}+\overline{XD}$$

и из (1) следует, что

$$\alpha=-\frac{XE}{XB},\quad \beta=-\frac{XD}{XC}.$$

Пусть прямая CX пересекает сторону AB в точке K. Тогда

$$\frac{XE}{XB}=\frac{KA}{KB}=\frac{S_2}{S_1},$$

откуда $\alpha=-\dfrac{S_2}{S_1}$.

Аналогично, $\beta=-\dfrac{S_3}{S_1}$. Следовательно, из (1) имеем:

$$\overline{XA}=-\frac{S_2}{S_1}\overline{XB}-\frac{S_3}{S_1}\overline{XC},\ \text{или}\ S_1\cdot\overline{XA}+S_2\cdot\overline{XB}+S_3\cdot\overline{XC}=\overline{0},$$

что и требовалось доказать.

Задача. Доказать, что в треугольнике ABC:

1) $\sin 2A\cdot\overline{OA}+\sin 2B\cdot\overline{OB}+\sin 2C\cdot\overline{OC}=\overline{0}$ (O — центр описанной вокруг остроугольного треугольника ABC окружности);

2) $a\cdot\overline{IA}+b\cdot\overline{IB}+c\cdot\overline{IC}=\overline{0}$ (I — инцентр треугольника ABC);

3) $\operatorname{tg} A \cdot \overline{HA} + \operatorname{tg} B \cdot \overline{HB} + \operatorname{tg} C \cdot \overline{HC} = \overline{0}$ (H — ортоцентр остроугольного треугольника ABC);

4) $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = \overline{0}$ (M — центроид треугольника ABC).

Доказательство.

1) В формуле (*) положим $X \equiv O$, имеем:

$$S_1 \cdot \overline{OA} + S_2 \cdot \overline{OB} + S_3 \cdot \overline{OC} = \overline{0}.$$

При этом

$$S_1 = \frac{1}{2} R^2 \sin 2A, \quad S_2 = \frac{1}{2} R^2 \sin 2B, \quad S_3 = \frac{1}{2} R^2 \sin 2C$$

(R — радиус описанной окружности). Следовательно,

$$\sin 2A \cdot \overline{OA} + \sin 2B \cdot \overline{OB} + \sin 2C \cdot \overline{OC} = \overline{0}.$$

2) В формуле (*) положим $X \equiv I$, имеем:

$$S_1 \cdot \overline{IA} + S_2 \cdot \overline{IB} + S_3 \cdot \overline{IC} = \overline{0}.$$

Пусть r — радиус вписанной окружности. Ясно, что

$$S_1 = \frac{1}{2} ar, \quad S_2 = \frac{1}{2} br, \quad S_3 = \frac{1}{2} cr.$$

Следовательно, $a \cdot \overline{IA} + b \cdot \overline{IB} + c \cdot \overline{IC} = \overline{0}$.

3) В формуле (*) положим $X \equiv H$, имеем:

$$S_1 \cdot \overline{HA} + S_2 \cdot \overline{HB} + S_3 \cdot \overline{HC} = \overline{0}.$$

Пусть CH_3 — высота треугольника. Тогда

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{AH_3}{H_3 B} = \frac{\operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} A},$$

аналогично,

$$\frac{S_3}{S_1} = \frac{\operatorname{tg} C}{\operatorname{tg} A}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{tg} A \cdot \overline{HA} + \operatorname{tg} B \cdot \overline{HB} + \operatorname{tg} C \cdot \overline{HC} = \overline{0}.$$

4) В формуле (*) положим $X \equiv M$, имеем:

$$S_1 \cdot \overline{MA} + S_2 \cdot \overline{MB} + S_3 \cdot \overline{MC} = \overline{0}.$$

Далее,

$$S_1 = S_2 = S_3 = \frac{1}{3} S_{ABC},$$

следовательно,

$$\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = \overline{0}.$$

И, наконец, покажем использование векторов для решения задач классической геометрии.

Задача. Доказать, что если плоские углы при вершине тетраэдра прямые, то центроид основания, центр описанной вокруг тетраэдра сферы и вершина тетраэдра принадлежат одной прямой.

Доказательство.

Пусть в тетраэдре $DABC$ (рис. 103) точка M — центроид треугольника ABC, точка O — центр описанной сферы, $\overline{DA} = \overline{a}$, $\overline{DB} = \overline{b}$, $\overline{DC} = \overline{c}$, $\overline{DO} = \overline{n}$, $\overline{DM} = \overline{m}$. Докажем, что векторы $\overline{n}$ и $\overline{m}$ сонаправлены. По формуле

$$\overline{DM} = \frac{1}{3}\left(\overline{a} + \overline{b} + \overline{c}\right),$$

а поэтому векторы $\overline{m}$ и $\overline{a} + \overline{b} + \overline{c}$ сонаправлены.

Поскольку

$$DO^2 = AO^2,$$

то

$$\overline{n}^2 = \left(\overline{n} - \overline{a}\right)^2,$$

откуда

$$\overline{a}^2 = 2\overline{n}\overline{a}.$$

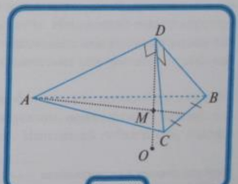

Рис. 103

Разложим вектор $\overline{n}$:

$$\overline{n} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{b} + \gamma\overline{c},$$

тогда

$$\overline{a}^2 = 2\overline{a}\left(\alpha\overline{a} + \beta\overline{b} + \gamma\overline{c}\right),$$

а поскольку $\overline{a}\,\overline{b} = \overline{a}\,\overline{c} = 0$, то

$$\overline{a}^2 = 2\alpha\overline{a}^2, \quad \alpha = \frac{1}{2}.$$

Аналогично, $\beta = \gamma = \frac{1}{2}$. Следовательно,

$$\overline{n} = \frac{1}{2}\left(\overline{a} + \overline{b} + \overline{c}\right),$$

и поэтому векторы $\overline{n}$ и $\overline{m}$ сонаправлены, то есть точки D, O и M принадлежат одной прямой.

От «спрятанного» подобия до разгадки теоремы Птолемея

Поиски закономерностей при научных исследованиях — одно из главных увлечений ученых. Цель таких поисков — поймать «синюю птицу» — общий метод решений большой группы задач. Как мы уже говорили, это свойственно математике на любом уровне. Об одном из таких поисков мы и будем сейчас говорить.

Казалось бы, что может быть легче — найти при решении задачи пару подобных треугольников. Но, к сожалению, подобие таких треугольников не всегда легко заметить, поэтому оно получило название «спрятанного». Нахождение такого спрятанного подобия бывает очень полезным: при решении задачи оно заменяет громоздкие алгебраические или тригонометрические преобразования.

Поиски спрятанного подобия однажды привели к разгадке некоего вспомогательного построения, используемого при доказательстве теоремы Птолемея[1]. Наивысшей победой буду считать

[1] Клавдий Птолемей (II ст. н. э.) — древнегреческий ученый, исследования которого имели большое значение для развития разных научных направлений.

и никогда не забуду, как один мой ученик на уроке от увлечения выкрикнул: *«Именно так двигался к доказательству Птолемей!»*

Посмотрим, что же это за тайна.

Теорема Птолемея. В четырехугольнике, вписанном в окружность, сумма произведений противоположных сторон равна произведению диагоналей.

Вспомним доказательство этой теоремы:

Доказательство.

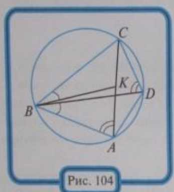

Рис. 104

Пусть четырехугольник $ABCD$ (рис. 104) вписан в окружность. Необходимо доказать, что

$$AB\cdot CD+AD\cdot BC=AC\cdot BD.$$

Построим угол KBC, равный углу ABD.

Тогда треугольники ABK и DBC подобны ($\angle ABK=\angle DBC$, $\angle BAC=\angle BDC$). Отсюда имеем:

$$\frac{AB}{BD}=\frac{AK}{CD},$$

или

$$AB\cdot CD=AK\cdot BD. \qquad (1)$$

Кроме того, треугольники ABD и KBC также подобны, ($\angle ABD=\angle KBC$, $\angle ADB=\angle KCB$), откуда

$$\frac{AD}{KC}=\frac{BD}{BC},$$

или

$$AD\cdot BC=KC\cdot BD. \qquad (2)$$

Сложим равенства (1) и (2), имеем:

$$AB\cdot CD+AD\cdot BC=\left(AK+KC\right)\cdot BD,$$

или

$$AB\cdot CD+AD\cdot BC=AC\cdot BD,$$

что и требовалось доказать.

Уверен, что Вы, разбирая это доказательство, помимо воли спрашивали себя: «Каким образом „догадался“ Птолемей „устроить“ такое подобие треугольников? Как можно избавиться от некоторой искусственности при построении равных углов?» Как бы там ни было, но автору не попадалось убедительного объяснения этого факта, встречались только аппеляции к гениальности Птолемея. Но ведь этого недостаточно! Следовательно, попробуем раскрыть эту тайну.

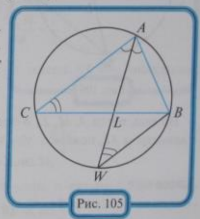

Рис. 105

Опишем вокруг треугольника ABC окружность и продлим биссектрису угла BAC до пересечения с этой окружностью в точке W (рис. 105).

Треугольники AWB и ACL подобны (L — основание биссектрисы).

Действительно,

$$\angle CAL=\angle BAL,$$

$$\angle ACB=\angle AWB.$$

Это подобие мы назовем «замечательным». Мы уже его использовали при доказательстве свойства биссектрисы (см. с. 21) и формулы длины биссектрисы (см. с. 128).

Приведем еще несколько примеров его использования.

Первая задача нам уже встречалась (см. с. 130), но посмотрите, как эффективно срабатывает «замечательное» подобие.

10 — 4-1664

Задача 1. Доказать формулу $S=\frac{1}{2}AW\cdot MN$, где S — площадь треугольника ABC, M и N — проекции точки L на стороны AC и AB, соответственно.

Доказательство.

Из «замечательного подобия» имеем:

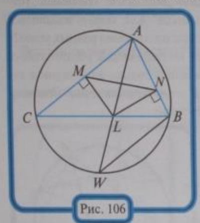

Рис. 106

$$\frac{AW}{AC}=\frac{AB}{AL}$$

(рис. 106), или:

$$AB\cdot AC=AW\cdot AL.$$

Умножим обе части этого равенства на $\frac{1}{2}\sin A$:

$$\frac{1}{2}\sin A\cdot AB\cdot AC=$$

$$=\frac{1}{2}\sin A\cdot AW\cdot AL.$$

Но ведь точки A, M, L, N принадлежат одной окружности с диаметром AL, поэтому:

$$AL\sin A=MN.$$

Кроме того,

$$\frac{1}{2}\sin A\cdot AB\cdot AC=S.$$

Следовательно, $S=\frac{1}{2}AW\cdot MN.$

Задача 2. В неравнобедренном треугольнике ABC точки M и I — центроид и инцентр, соответственно. Доказать, что если отрезок MI перпендикулярен BC, то $a=\frac{b+c}{3}$.

Доказательство.

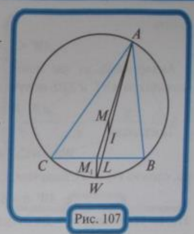

Рис. 107

Из «замечательного подобия» имеем (рис. 107):

$$\frac{BW}{CL}=\frac{AW}{AC};$$

но, по «теореме трилистника» $BW=IW$. Поэтому

$$\frac{IW}{AW}=\frac{CL}{b}. \qquad (1)$$

С другой стороны, поскольку $MI\parallel M_1W$ (где M_1 — середина стороны BC), то:

$$\frac{IW}{AW}=\frac{M_1M}{AM_1}=\frac{1}{3}.$$

Следовательно, учитывая (1), имеем: $CL=\frac{b}{3}$. Аналогично, $BL=\frac{c}{3}$. Отсюда,

$$a=BC=BL+CL=\frac{b+c}{3}.$$

Следующая задача, как правило, в литературе решалась при помощи теоремы Птолемея. Мы же используем «замечательное подобие».

Задача 3. Стороны треугольника ABC образуют арифметическую прогрессию ($b>a>c$). Доказать, что $AI=IW$ (I — инцентр треугольника ABC).

Доказательство.

Из «замечательного подобия» имеем (см. рис. 105):

$$\frac{BW}{CL}=\frac{AW}{AC},$$

10*

то есть

$$AW \cdot CL = b \cdot BW. \quad (1)$$

Аналогично, из «не менее замечательного подобия» треугольников AWC и ABL получим:

$$AW \cdot BL = c \cdot CW. \quad (2)$$

Поскольку

$$WB = WC, \quad CL + BL = a,$$

то, сложив (1) и (2), получим, что

$$AW \cdot a = BW \cdot (b+c).$$

Но, по условию, $b+c=2a$, откуда $AW = 2BW$. По «теореме трилистника» $BW = IW$, следовательно, $AI = IW$.

Рассмотрим вписанный четырехугольник $ABWC$.

Задача 4. Доказать теорему Птолемея для четырехугольника $ABWC$ (то есть доказать теорему Птолемея для вписанного четырехугольника, две смежные стороны которого равны).

Доказательство.

Нам нужно доказать, что справедливо равенство:

$$AW \cdot BC = AC \cdot WB + AB \cdot WC.$$

Но оно было доказано при помощи «замечательного подобия» в предыдущей задаче.

Пусть теперь $ABXC$ — произвольный вписанный четырехугольник (то есть точка X двигается по дуге BC). Тогда AX уже не будет биссектрисой угла BAC и «замечательное подобие» «испортится». Но попробуем понять, что же при доказательстве подобия треугольников AWB и ACL было основным? А то, что на стороне BC была такая точка L, что $\angle CAL = \angle BAL$. (Равенство этих углов половине угла BAC не использовалось).

А теперь внимание! Точка L должна «раздвоиться».

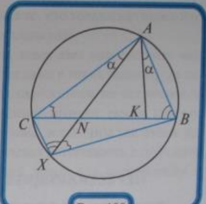

Рис. 108

Пусть AX (рис. 108) пересекает сторону BC в некоторой точке N («первое обличье» точки L), и угол CAX равен α. Выберем на BC такую точку K («второе обличье» точки L), чтобы угол BAK также был равен α.

Тогда возникают аналоги «замечательного подобия»:

треугольники ABK и AXC подобны
$(\angle CAX = \angle BAK = \alpha, \angle CXA = \angle CBA)$,

треугольники ACK и AXB подобны
$(\angle CAK = \angle BAX, \angle BXA = \angle BCA)$.

Дальнейшее доказательство проводится «автоматически», заменив в предыдущих равенствах W на X и L на K. Получим:

$$AX \cdot BK = c \cdot CX, \quad (1')$$

$$AX \cdot CK = b \cdot BX. \quad (2')$$

Сложим равенства (1′) и (2′):

$$AX(BK + CK) = b \cdot BX + c \cdot CX,$$

или

$$AX \cdot a = b \cdot BX + c \cdot CX.$$

Следовательно, теорема Птолемея доказана и загадка вспомогательного построения разгадана!

Надеемся, что Птолемей размышлял именно так!

Пересекающиеся окружности — полигон для вдохновения и штурма

Задачи с пересекающимися (или касающимися) окружностями похожи между собой только внешне. Но внешнее сходство — это мираж, к тому же уровень сложности задач очень разный. А сходство состоит только в... растерянности в первые минуты решения задачи. Если задачи с пересекающимися или касающимися окружностями собрать вместе, они образуют некий полигон, который будет существенно отличаться от обычного набора задач. Чем же он будет отличаться?

Во-первых, для решения таких задач не нужно расширеной теории. Достаточно иметь в арсенале небольшую, хотя и специфическую коллекцию теорем, например, об угле между касательной и хордой, о свойстве вписанного угла, о свойстве вписанного в окружность четырехугольника.

Во-вторых, использование этого арсенала возможно, как правило, только после того, как выполнены дополнительные построения и можно «прочитать» знакомую конфигурацию.

В-третьих, решение одной задачи совсем не гарантирует быстро решение следующей. Именно здесь и возникает не только заинтересованность в решении, но и «охотничий

азарт», которому подвласны даже те, кто только начинает изучать геометрию. Великая магия сходства!

В-четвертых, подборка таких задач дает возможность научиться видеть знакомые ситуации даже в таких задачах, где пересекающиеся или касающиеся окружности не встречаются.

И в-пятых, эти задачи вызывают интерес еще и потому, что все они без исключения красивы, эстетичны как своим условием, так и решением. Воспитывая уверенность в победном результате, они дают прекрасный повод для вдохновения и штурма в будущем.

Советуем собирать такие задачи. Чем больше их будет в вашей коллекции, тем больше гарантий успеха. Ну, а о наслаждении излишне даже и говорить. Сами увидите!

Задача 1. Через точку A пересечения двух окружностей проведена произвольная секущая, которая пересекает окружности еще и в точках X и Y, точка B — другая точка пересечения окружностей. Доказать, что угол XBY не зависит от выбора секущей.

Доказательство.

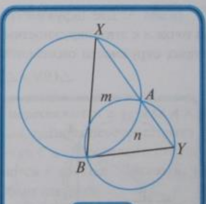

Рис. 109

Рассмотрим треугольник XYB (рис. 109). Поскольку

$$\angle AYB = \frac{1}{2} \cup AmB,$$

$$\angle AXB = \frac{1}{2} \cup AnB,$$

то сумма этих углов постоянна, а следовательно, величина угла XBY, равная

$$180° - (\angle AYB + \angle AXB),$$

также является постоянной.

Задача 2. Даны две касающиеся окружности. Через точку касания проведены две секущие. Доказать, что две хорды, соединяющие концы секущих, параллельны.

Доказательство.

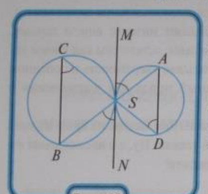

Рис. 110

Рассмотрим случай, когда окружности касаются внешним образом (рис. 110). Пусть S — точка касания окружностей, AB и CD — данные секущие. Построим общую внутреннюю касательную MN к окружностям ($S \in MN$).

Справедливо равенство

$$\angle SDA = \angle MSA = \\ = \angle NSB = \angle SCB,$$

откуда $AD \parallel BC$. Случай, когда окружности касаются внутренним образом, рассматривается аналогично.

Задача 3. Две окружности пересекаются в точках A и B. В точке A к этим окружностям проведены касательные, на которых окружности отсекают хорды AM и AN. Доказать, что

$$\angle ABN + \angle MAN = 180°.$$

Доказательство.

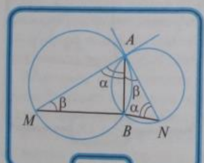

Рис. 111

Рассмотрим треугольник ABN (рис. 111). Пусть

$$\angle ANB = \alpha, \quad \angle BAN = \beta.$$

Поскольку угол BAN — это угол между касательной и хордой, то

$$\angle AMB = \beta.$$

Из аналогичных рассуждений, $\angle MAB = \alpha$. Тогда

$$\angle ABN + \angle MAN = \left(180° - (\alpha + \beta)\right) + \alpha + \beta = 180°.$$

Задача 4. Две окружности пересекаются в точках A и B. Проведена прямая, пересекающая первую окружность в точках C и D, а вторую — в точках E и F, причем точка E лежит между точками C и D. Доказать, что $\angle CAE = \angle DBF$.

Доказательство.

Обозначим

$$\angle DFB = \alpha,$$
$$\angle DBF = x,$$
$$\angle CAE = y$$

(рис. 112). Тогда

$$\angle EAB = \angle EFB = \alpha,$$

и следовательно,

$$\angle CDB = \angle CAB = y + \alpha.$$

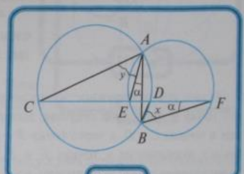

Рис. 112

Но ведь угол CDB — внешний в треугольнике BDF, поэтому $\angle CDB = x + \alpha$. Отсюда

$$x + \alpha = y + \alpha, \quad x = y,$$

что и требовалось доказать.

Задача 5. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку A проведена секущая, которая пересекает окружности в точках C и D. Через точки C и D проведены секущие к окружностям; они пересекаются в точке E. Доказать, что

1) угол CED не зависит от выбора секущей;

2) четырехугольник $BCED$ является вписанным в окружность.

Доказательство.

Построим хорду AB (рис. 113). Обозначим:

$$\angle ECD = \alpha, \quad \angle EDC = \beta.$$

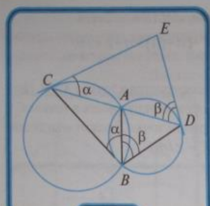

Рис. 113

Тогда $\angle CBA = \alpha$, $\angle DBA = \beta$. Согласно задаче 1, $\angle CBD$ — постоянный. Поскольку

$$\angle CBD = \alpha + \beta,$$

а $\angle CED = 180° - (\alpha + \beta)$,

то, во-первых, $\angle CED$ — постоянный, а, во-вторых,

$$\angle CED + \angle CBD = 180°,$$

следовательно, четырехугольник $BCED$ — вписанный.

Задача 6. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку A проведена секущая, которая пересекает окружности в точках C и D, а через точку B — секущая, которая пересекает окружности в точках E и F, при этом точки C и E принадлежат одной окружности, а точки D и F — другой. Доказать, что $\angle CBD = \angle EAF$.

Доказательство.

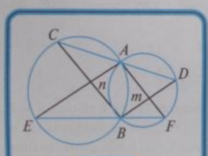

Рис. 114

Имеем (см. доказательство задачи 1 и рис. 114):

$$\angle CBD = 180° - \\ - \left(\frac{1}{2} \cup AmB + \frac{1}{2} \cup AnB\right),$$

$$\angle EAF = 180° - \\ - \left(\frac{1}{2} \cup AmB + \frac{1}{2} \cup AnB\right).$$

Задача 7. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через произвольную точку X первой окружности проведена прямая XA, которая пересекает вторую окружность в точке Y,

и прямая XB, которая пересекает вторую окружность в точке Z. Доказать, что прямая YZ перпендикулярна диаметру первой окружности, проведенному через точку X.

Доказательство.

Пусть точка A лежит между точками X и Y (рис. 115). Через точку X проведем касательную XL к первой окружности. Тогда

$$\angle LXY = \angle XBA = \\ = \angle ZBA = \angle ZYA,$$

следовательно, $YZ \parallel XL$. Отсюда: $YZ \perp XD$, где XD — диаметр первой окружности.

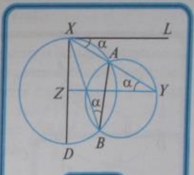

Рис. 115

Задача 8. Через общую точку A двух окружностей с центрами O_1 и O_2 проведена прямая, которая пересекает эти окружности в точках M и N. Доказать, что $\angle O_1MB = \angle O_2NB$, где B — другая общая точка окружностей.

Доказательство.

Пусть точка A лежит между точками M и N (рис. 116). Пусть $\angle O_1MB = \alpha$, $\angle O_2NB = \beta$. Тогда

$$\angle BAN = \frac{1}{2} \angle BO_2N = \\ = \frac{1}{2}(180° - 2\beta) = 90° - \beta,$$

аналогично,

$$\angle BAM = 90° + \alpha.$$

Тогда

$$90° - \beta + 90° + \alpha = 180°,$$

откуда $\alpha = \beta$.

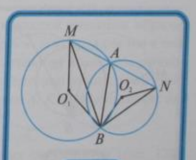

Рис. 116

Задача 9. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку A проведены хорды AC и AD, каждая из которых касается одной из окружностей. Доказать, что прямые BC и BD симметричны относительно прямой AB.

Доказательство.

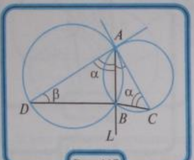

Рис. 117

Пусть (рис. 117) $\angle BCA = \alpha$, $\angle BDA = \beta$. Тогда $\angle DAB = \alpha$, $\angle CAB = \beta$. Угол DBL является внешним в треугольнике DBA, поэтому $\angle DBL = \alpha + \beta$.

Аналогично, $\angle CBL = \alpha + \beta$. Следовательно,

$$\angle DBL = \angle CBL,$$

что доказывает утверждение задачи.

Задача 10. Через одну из точек пересечения двух равных окружностей проведена секущая. Доказать, что часть секущей, которая ограничена окружностями, делится пополам окружностью, построенной на общей хорде данных окружностей как на диаметре.

Доказательство.

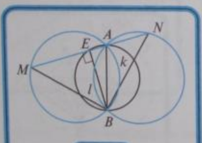

Рис. 118

Пусть AB — общая хорда данных окружностей (рис. 118), MN — данная секущая, проходящая через точку A.

Поскольку окружности равны, то

$$\cup AlB = \cup AkB,$$

откуда

$$\angle AMB = \angle ANB.$$

Следовательно, треугольник BMN — равнобедренный. Построим на AB как на диаметре окружность, которая пересечет MN в некоторой точке E. Тогда $\angle BEM = 90°$ и поэтому $ME = EN$, что и требовалось доказать.

Задача 11. Две окружности касаются внутренним образом в точке A. Отрезок AB является диаметром большей окружности. Хорда BK большей окружности касается меньшей окружности в точке C. Доказать, что AC является биссектрисой угла BAK.

Доказательство.

Пусть точка O — центр меньшей окружности (рис. 119). Тогда $O \in AB$. Ясно, что $OC \perp BK$ (поскольку BC — касательная к меньшей окружности) и $AK \perp BK$ (поскольку AB — диаметр большей окружности).

Отсюда $AK \parallel OC$ и поэтому

$$\angle KAC = \angle ACO.$$

Но треугольник OAC — равнобедренный, поэтому $\angle ACO = \angle CAO$.

Следовательно, $\angle KAC = \angle CAO$, и утверждение задачи доказано.

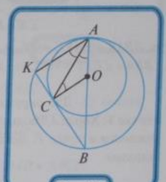

Рис. 119

Задача 12. Две окружности касаются внешним образом в точке K. Внешняя касательная касается окружностей в точках A и B. Параллельно этой касательной проведена прямая LT, касающаяся той окружности, которой принадлежит точка B, в точке T. Доказать, что точки A, K, T принадлежат одной прямой.

Доказательство.

Пусть O_1 и O_2 — центры данных окружностей (рис. 120). Поскольку $AB \parallel LT$, то BT — диаметр окружности с центром O_1.

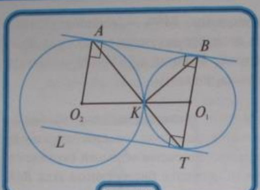

Рис. 120

Тогда

$$\angle BKT = 90°.$$

Докажем, что

$$\angle BKA = 90°.$$

Поскольку, AB — общая касательная, то

$$\angle AO_2K = 2\angle BAK,$$

$$\angle BO_1K = 2\angle ABK.$$

А поскольку

$$\angle AO_2K + \angle BO_1K = 180°,$$

то $\angle BAK + \angle ABK = 90°$, и следовательно, $\angle BKA = 90°$. Отсюда, $\angle BKA + \angle BKT = 180°$, что доказывает утверждение задачи.

Задача 13. Две окружности касаются внутренним образом в точке T. Хорда AB большей окружности касается меньшей окружности в точке P. Доказать, что прямая TP делит угол ATB пополам.

Доказательство.

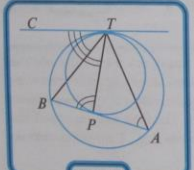

Рис. 121

В точке T проведем касательную TC (рис. 121). Тогда

$$\angle BTC = \angle BAT,$$

$$\angle BPT = \angle CTP.$$

Угол BPT является внешним в треугольнике ATP, поэтому

$$\angle ATP = \angle BPT - \angle BAT =$$
$$= \angle CTP - \angle BTC = \angle BTP,$$

то есть TP — биссектриса угла BTA.

Задача 14. Две окружности касаются внешним образом в точке D. Прямая касается одной из них в точке A, а вторую пересекает в точках B и C. Доказать, что точка A равноудалена от прямых BD и CD.

Доказательство.

Пусть прямая CD пересекает вторую окружность в точке E (рис. 122). Следует доказать, что

$$\angle ADB = \angle ADE.$$

Проведем общую касательную FK ($F \in AB$). Поскольку угол ADE — внешний угол треугольника ADC, то

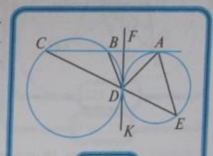

Рис. 122

$$\angle ADE = \angle ACD + \angle CAD.$$

Далее,

$$\angle DAF = \angle AED = \angle ADF.$$

Но

$$\angle ADB = \angle ADF + \angle BDF = \angle BAD + \angle ACD.$$

Следовательно, $\angle ADB = \angle ADE$.

Задача 15. Две окружности касаются внешним образом. Точка A — это точка касания общей внешней касательной к окружностям с одной из них, точка B — это точка этой же окружности, диаметрально противоположная точке A. Доказать, что длина касательной, проведенной из точки B к другой окружности, равна диаметру первой окружности.

Доказательство.

Пусть O_1 и O_2 — центры данных окружностей, P — точка касания, AD — общая внешняя касательная (рис. 123), BM — касательная к другой окружности. Отметим, что точки B, P, D принадлежат одной прямой.

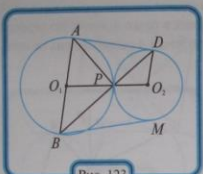

Рис. 123

Действительно, поскольку $AB \parallel DO_2$, то $\angle PO_1B = \angle PO_2D$, откуда $\angle BPO_1 = \angle DPO_2$.

Далее, треугольник BAD — прямоугольный, и AP — его высота. Поэтому

$$AB^2 = BD \cdot BP.$$

Но, с другой стороны,

$$BM^2 = BD \cdot BP.$$

Следовательно, $AB = BM$.

Задача 16. На хорде AB окружности с центром O взята произвольная точка C. Через точки A, O, C проведена окружность, которая пересекает данную в точке D (отличной от A). Доказать, что $CD = CB$.

Доказательство.

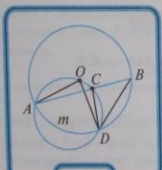

Рис. 124

В треугольнике CBD (рис. 124) положим: $\angle CBD = \alpha$.

Тогда $\cup AmD = 2\alpha$, то есть

$$\angle ACD = \angle AOD = 2\alpha.$$

Но угол ACD — внешний угол треугольника CBD. Следовательно,

$$\angle ACD = \alpha + \angle CDB.$$

Отсюда $\angle CDB = \alpha$, и поэтому треугольник CBD — равнобедренный.

Задача 17. Окружности с центрами в точках O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Лучи O_1A и O_2A пересекают окружности в точках D и C, соответственно. Доказать, что точки C, O_1, B, O_2, D принадлежат одной окружности.

Доказательство.

Поскольку

$$\angle CAO_1 = \angle DAO_2$$

(рис. 125) и треугольники O_1AC и O_2AD равнобедренные, то

$$\angle CO_1D = \angle CO_2D.$$

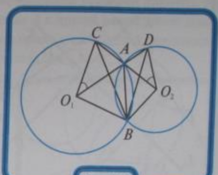

Рис. 125

Следовательно, точки C, O_1, O_2, D принадлежат одной окружности. Докажем, что и точка B также принадлежит этой окружности.

Действительно, рассмотрим четырехугольник O_1DO_2B. Поскольку треугольники O_1BO_2 и O_1AO_2 равны, то

$$\angle O_1BO_2 = \angle O_1AO_2.$$

А поскольку треугольник O_2AD — равнобедренный, то

$$\angle O_2DA = \angle O_2AD.$$

Следовательно,

$$\angle O_1BO_2 + \angle O_2DA = 180°,$$

и поэтому четырехугольник O_1DO_2B является вписанным. Утверждение доказано.

Задача 18. Через точку A пересечения двух окружностей провели две прямые, которые пересекают окружности в точках B и C и D и E, соответственно. Хорды BD и EC продолжили до пересечения в точке M. Доказать, что угол BME не зависит от выбора прямых.

Доказательство.

Сделаем вспомогательное построение: через точку A проведем касательные KL и K_1L_1 к окружностям (рис. 126).

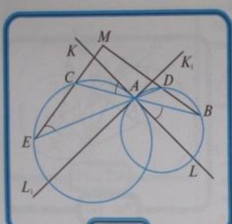

Рис. 126

Тогда

$$\angle AEC = \angle CAK = \angle BAL,$$

$$\angle ADB = \angle BAL_1.$$

Из треугольника MDE:

$$\angle DME =$$
$$= \angle EDB - \angle DEM =$$
$$= \angle BAL_1 - \angle BAL =$$
$$= \angle LAL_1.$$

Но $\angle LAL_1$ не зависит от выбора прямых, следовательно, утверждение задачи доказано.

Задача 19. Две окружности пересекаются в точках A и B. Прямая, проходящая через точку A, пересекает одну окружность в точке M, а вторую — в точке N. Через точки M и N проведены параллельные прямые, которые пересекают окружности в точках T и L, соответственно. Доказать, что точки T, B, L принадлежат одной прямой.

Доказательство.

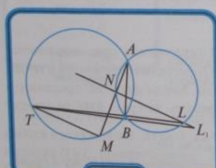

Рис. 127

Очевидно, что

$$\angle BTM = \angle BAM = \angle BLN$$

(рис. 127). Продолжим прямую TB до пересечения с прямой NL в точке L_1. Поскольку $TM \parallel LN$, то

$$\angle NL_1B = \angle BTM,$$

а следовательно,

$$\angle NL_1B = \angle NLB,$$

и точки L и L_1 совпадают.

Задача 20. Две окружности пересекаются, A — одна из точек пересечения. В каждой из окружностей проведен диаметр, параллельный касательной в точке A к другой окружности. Доказать, что концы этих диаметров принадлежат одной окружности.

Доказательство.

Пусть O_1 и O_2 — центры данных окружностей, BC и DE — данные диаметры (рис. 128).

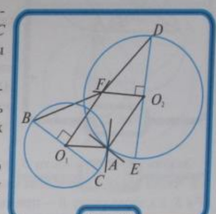

Рис. 128

Проведем серединные перпендикуляры к BC и DE; пусть F — точка пересечения этих перпендикуляров.

Докажем, что F — центр окружности, на которой лежат точки B, C, E, D.

Действительно, по построению, $FB = FC$, $FD = FE$. Следовательно, докажем, что $FB = FD$. По построению, $FO_1 \perp BC$, а, по условию, $O_2A \perp BC$. Поэтому имеем, что $FO_1 \parallel AO_2$. Аналогично, $FO_2 \parallel AO_1$. Отсюда, четырехугольник FO_2AO_1 — параллелограмм, следовательно,

$$FO_2 = O_1A = O_1B, \quad FO_1 = O_2A = O_2D.$$

Тогда прямоугольные треугольники BO_1F и DO_2F равны, откуда $FB = FD$, а значит точка F равноудалена от точек B, C, E, D, что и требовалось доказать.

Задача 21. Окружность S_1 касается сторон угла ABC в точках A и C. Окружность S_2 касается прямой AC в точке C и проходит через точку B. Точка M — это точка пересечения окружностей S_1 и S_2. Доказать, что прямая AM делит отрезок BC пополам.

Доказательство.

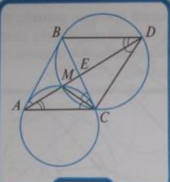

Рис. 129

Пусть прямая AM пересекает окружность S_2 в точке D (рис. 129). Тогда

$$\angle MDC = \angle MCA = \angle MAB,$$

следовательно, $AB \| CD$. Далее,

$$\angle CAM = \angle MCB = \angle MDB,$$

следовательно, $AC \| BD$. Отсюда $ABDC$ — параллелограмм, и поэтому $BE = EC$ (где E — точка пересечения прямых AM и BC).

Задача 22. Окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках A и B. Через точку A проведена касательная AP к окружности S_2 ($P \in S_1$), а через точку B — прямая, параллельная AP и пересекающая окружности S_1 и S_2 в точках C и D, соответственно. Доказать, что $APCD$ — параллелограмм.

Доказательство.

Пусть $\angle BAP = \alpha$ (рис. 130). Поскольку

$$AP \| BD, \text{ то } \angle ABD = \alpha.$$

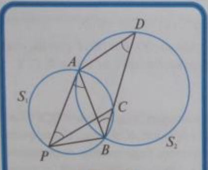

Рис. 130

Следовательно,

$$\angle APC = \alpha.$$

С другой стороны,

$$\angle ADB = \alpha,$$

поскольку AP — касательная к S_2. Поэтому

$$\angle PAD = 180^\circ - \alpha$$

(поскольку $AP \| BD$), откуда $PC \| AD$, и $APCD$ — параллелограмм.

Задача 23. Окружности γ_1 и γ_2 пересекаются в точках A и B. Окружность γ_2 проходит через центр окружности γ_1. Касательная к окружности γ_2, проведенная через точку B, пересекает окружность γ_1 в точке C (отличной от B). Доказать, что $AB = BC$.

Доказательство.

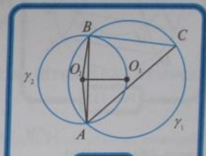

Рис. 131

Пусть O_1 и O_2 (рис. 131) — центры окружностей γ_1 и γ_2, соответственно, а $\angle ABC = \alpha$. Тогда

$$\angle ABO_2 = 90^\circ - \alpha$$

($O_2B \perp BC$), отсюда

$$\angle AO_2B = 2\alpha,$$

$$\angle AO_1B = 180^\circ - \alpha.$$

Поэтому

$$\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AO_1B = 90^\circ - \frac{\alpha}{2},$$

следовательно,

$$\angle BAC = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} \text{ и } AB = BC.$$

Задача 24. Две окружности касаются внутренним образом в точке A. Точки P и Q лежат на большей окружности, M и N — это точки пересечения отрезка PQ с меньшей окружностью. Доказать, что

$$\angle PAM = \angle NAQ.$$

Доказательство.

Пусть прямые AM и AN пересекают большую окружность в точках M_1 и N_1, соответственно (рис. 132). Проведем общую касательную TV в точке A. Докажем, что хорды PQ и M_1N_1 большей окружности параллельны.

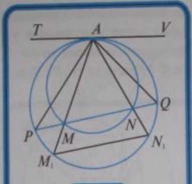

Рис. 132

Действительно, TV — касательная к большей окружности, поэтому

$$\angle TAM_1 = \angle AN_1M_1,$$

TV — касательная к меньшей окружности, поэтому

$$\angle TAM = \angle ANM.$$

Следовательно,

$$\angle ANM = \angle AN_1M_1$$

и $PQ \| M_1N_1$. Тогда

$$\cup PM_1 = \cup QN_1,$$

откуда $\angle PAM = \angle NAQ$.

Задача Паппа и теорема Штейнера—Лемуса

Задачи, о которых будет идти речь в этом разделе, жили себе независимо друг от друга. Они были в почете среди специалистов и любителей элементарной геометрии. Задачи эти родились в разное время и в разных странах — первая из них появилась на свет в Древней Греции более двух тысяч лет тому назад, а вторая — в Швеции в XIX столетии.

Первая задача почему-то всегда недооценивалась для использования, а вторая наделала много шума. Ее прислал известному шведскому геометру Якову Штейнеру в 1840 году С. Л. Лемус[1] с просьбой найти чисто геометрическое доказательство такого факта:

если в треугольнике две биссектрисы равны,
то этот треугольник — равнобедренный[2].

Штейнер предложил достаточно сложное доказательство, которое подтолкнуло целые поколения исследователей к поиску других, более простых и красивых доказательств.

[1] Имя которого, если бы не этот случай, было бы, вероятно, давно забыто.

[2] Напоминаем, что с этой задачей мы уже встречались в нашей книге дважды, причем один раз — с доказательством (см. с. 101 и 127).

Мы также не останемся в стороне. Но, в отличие от других, не только докажем *теорему Штейнера—Лемуса* (такое название теперь имеет наша вторая задача), но и отдадим должное первой задаче, которая называется *задачей Паппа*[1]. Решая задачу, мы непринужденно, как бы невзначай (!), сможем доказать теорему.

Задача Паппа. Треугольник Паппа

Можно сформулировать условие задачи Паппа в двух вариантах:

1°. Дана точка L на биссектрисе угла. Провести через эту точку прямую так, чтобы отрезок этой прямой, расположенный внутри угла, был заданной длины.

2°. Построить треугольник ABC по данному углу A, биссектрисе этого угла l_a и стороне BC, равной a.

Будем решать задачу 2°, а треугольник, который нужно построить, мы и назовем *треугольником Паппа*.

Итак, построим треугольник Паппа (по a; A; l_a).

Анализ.

Предположим, что задача решена (рис. 133). Вокруг треугольника ABC опишем окружность, пусть продолжение биссектрисы AL ($AL = l_a$) пересечет его в точке W. Поскольку треугольники BAW и BLW подобны, то

$$\frac{BW}{AW} = \frac{LW}{BW},$$

или

$$LW \cdot AW = BW^2. \qquad (1)$$

[1] Папп Александрийский — геометр Древней Греции (вторая половина III столетия до н. э.) — автор сочинения «Математическое собрание» в восьми книгах, в которых собраны в оригинальном виде открытия математиков Древней Греции.

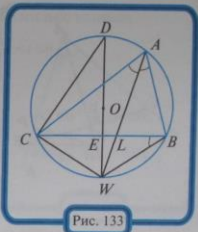

Рис. 133

Обозначим:

$$LW = x, \quad BW = t.$$

Поскольку $WA = x + l_a$, то из (1) имеем:

$$t^2 = (x + l_a) \cdot x. \qquad (2)$$

Проведем диаметр WD. Он пересечет сторону BC в некоторой точке E. Прямоугольный треугольник BEW можно построить: катет $BE = \frac{a}{2}$ задан,

$$\angle WBE = \frac{1}{2}\angle A.$$

Следовательно, можно построить и отрезок $BW = t$.

Построение.

Искомый отрезок x найдем из (2). Это возможно, поскольку отрезок l_a задан по условию, а отрезок t можно построить. А именно, отрезок x находится как внешняя часть такой секущей, проведенной из некоторой точки к окружности диаметра l_a, которая проходит через центр этой окружности, а длина отрезка касательной, проведенной из этой точки к окружности, равна t.

Следовательно, на отрезке $BC = a$ строим сегмент, вмещающий угол A, и точки W и A.

Когда существует треугольник Паппа?

Для того, чтобы ответить на вопрос о существовании треугольника Паппа, нужно провести *исследование построения*.

При произвольных a, l_a и при $\angle A < 180°$ отрезки t и x всегда можно построить.

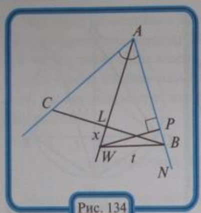

Рис. 134

Рассмотрим задачу Паппа в первой из приведенных формулировок (см. 1°). На биссектрисе угла A (рис. 134) задана точка L. Выясним, как проводится построение, учитывая нахождение отрезков x и t.

На прямой AL откладываем отрезок $LW = x$ (его построение описано выше). Из точки W, как из центра, опишем окружность радиуса $WB = t$.

Эту окружность обозначим γ.

1) Треугольник ABC невозможно построить, если окружность γ не пересечет сторону угла — луч AN. Если из точки W опустить перпендикуляр WP на сторону AN, то этот случай можно описать неравенством $WB < WP$, или

$$t < (x + l_a)\sin\frac{A}{2}. \qquad (1')$$

2) Треугольник ABC будет единственным, если окружность γ касается стороны AN угла A:

$$t = (x + l_a)\sin\frac{A}{2}. \qquad (2')$$

3) Задача будет иметь два решения, если окружность γ пересечет сторону AN в двух точках:

$$t > (x + l_a)\sin\frac{A}{2}. \qquad (3')$$

Преобразуем условия (1′), (2′), (3′) так, чтобы они связывали данные задачи Паппа (см. 2°): a; A; l_a. Используем соотношение (2):

$$t^2 = (x + l_a) \cdot x, \text{ или } \frac{x}{t} = \frac{t}{x + l_a}.$$

Следовательно, условие (1′) равносильно условию

$$\frac{x}{t} < \sin\frac{A}{2}, \text{ или } x < t\sin\frac{A}{2}.$$

Тогда из (2) имеем:

$$t\sin\frac{A}{2}\left(t\sin\frac{A}{2} + l_a\right) > t^2, \text{ или } l_a > \frac{t^2 - t^2\sin^2\frac{A}{2}}{t\sin\frac{A}{2}} = \frac{t^2\cos^2\frac{A}{2}}{t\sin\frac{A}{2}}.$$

Поскольку

$$t = \frac{\frac{a}{2}}{\cos\frac{A}{2}}, \text{ то } l_a > \frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{A}{2}.$$

Это условие эквивалентно условию (1′), то есть именно при этом условии задача Паппа (2°) не имеет решения, и треугольник Паппа не существует.

Аналогичные рассуждения показывают, что при

$$l_a = \frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{A}{2}$$

задача Паппа (2°) имеет единственное решение (один равнобедренный треугольник Паппа), а при

$$l_a < \frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{A}{2}$$

задача Паппа (2°) имеет два решения (два треугольника Паппа, которые симметричны относительно серединного перпендикуляра к BC).

Иногда задача Паппа формулируется для прямоугольного треугольника:

построить прямоугольный треугольник
по гипотенузе и биссектрисе прямого угла.

Покажем ее решение при помощи тригонометрии.

Итак, пусть прямоугольный треугольник ACB ($\angle C = 90°$) построен (рис. 135). $AB = c$ — гипотенуза, $CL = l$ — биссектриса прямого угла. Обозначим $\angle CLB = x$.

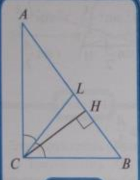

Рис. 135

Отметим, что $x > 45°$, поскольку иначе $\angle ABC > 90°$. Опустим высоту CH на гипотенузу. Из прямоугольного треугольника CHL:

$$CH = CL \sin \angle CLB = l \sin x;$$

из прямоугольного треугольника CHB:

$$BC = \frac{CH}{\sin B} = \frac{l \sin x}{\sin(135° - x)};$$

из прямоугольного треугольника CHA:

$$AC = \frac{CH}{\sin A} = \frac{l \sin x}{\cos(135° - x)}.$$

Далее,

$$c = \sqrt{AC^2 + BC^2} = l \sin x \sqrt{\frac{1}{\cos^2(135° - x)} + \frac{1}{\sin^2(135° - x)}} =$$

$$= \frac{2l \sin x}{|\sin(270° - 2x)|} = \frac{2l \sin x}{|\cos 2x|} = \frac{2l \sin x}{-\cos 2x} = \frac{2l \sin x}{2\sin^2 x - 1}$$

(поскольку $2x > 90°$, $\cos 2x < 0$).

Следовательно,

$$2c \sin^2 x - 2l \sin x - c = 0,$$

$$\sin x = \frac{l \pm \sqrt{l^2 + 2c^2}}{2c},$$

но $\sin x > 0$, поэтому

$$\sin x = \frac{l + \sqrt{l^2 + 2c^2}}{2c}. \qquad (*)$$

Кроме этого, $\sin x \le 1$, поэтому

$$\sqrt{l^2 + 2c^2} \le 2c - l, \quad l^2 + 2c^2 \le 4c^2 - 4cl + l^2,$$

$$0 \le 2c^2 - 4cl, \quad 2l \le c.$$

Следовательно, при $2l > c$ решений нет, а при $2l \le c$ можно построить угол x из равенства (*). Кроме того, случай $2l = c$ соответствует тому, что $x = 90°$, то есть тому, что треугольник ABC — равнобедренный. Тогда задача имеет единственное решение. Если же $2l < c$, то задача имеет два решения (они соответствуют случаям $x < 90°$ и $x > 90°$).

Использование треугольника Паппа при решении задач

Задача 1. В остроугольном треугольнике ABC точки H_1, H_2, H_3 являются основаниями высот. Высота AH_1 пересекает отрезок H_2H_3 в точке F. Построить треугольник ABC по отрезкам H_2H_3, FH_1 и углу BAC.

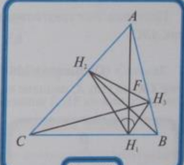

Рис. 136

Решение.

Поскольку высота AH_1 — это биссектриса угла $H_2H_1H_3$ (рис. 136), то значит треугольник $H_1H_2H_3$ можно построить как треугольник Паппа: H_2H_3 — сторона, FH_1 — биссектриса, проведенная к ней, и

$$\angle H_2H_1H_3 = 180° - 2\angle BAC.$$

Имея треугольник $H_1H_2H_3$, построим треугольник ABC: проведем биссектрисы треугольника $H_1H_2H_3$ и проведем через точки H_1, H_2, H_3 прямые, перпендикулярные этим биссектрисам; точки пересечения прямых будут вершинами треугольника ABC.

Задача 2. Построить треугольник ABC по углу A, биссектрисе l_b угла B и радиусу r вписанной в треугольник окружности.

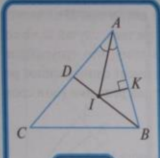

Рис. 137

Решение.

Пусть K — точка касания вписанной в треугольник окружности со стороной AB, I — инцентр (рис. 137). Построив прямоугольный треугольник AKI по $KI = r$ и $\angle KAI = \frac{\angle A}{2}$, построим отрезок AI. Тогда треугольник ABD (D — основание биссектрисы угла ABC) можно построить как треугольник Паппа: $BD = l_b$ — основание, AI — биссектриса, $\angle DAB = \angle A$.

Построив этот треугольник, можно построить и треугольник ABC.

Задача 3 (Олимпиада МФТИ, Киев). Построить треугольник ABC по углу A, медиане m_a и биссектрисе l_a.

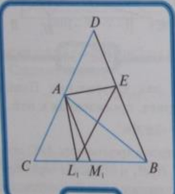

Рис. 138

Решение.

Пусть треугольник ABC уже построен (рис. 138). На луче CA построим точку D, такую что $CA = AD$. Пусть AM_1 — медиана стороны BC, а AL_1 — биссектриса стороны BC. Тогда AM_1 — средняя линия треугольника CBD, откуда $BD = 2m_a$.

Пусть AE — биссектриса угла BAD. Тогда $AE \perp AL_1$, поскольку биссектрисы смежных углов перпендикулярны.

Докажем, что

$$\angle AL_1E = \frac{1}{2}\angle A.$$

Действительно, поскольку AL_1 — биссектриса угла BAC, то

$$\frac{CL_1}{BL_1} = \frac{AC}{AB}, \qquad (1)$$

AE — биссектриса угла BAD, откуда

$$\frac{DE}{EB} = \frac{AD}{AB}.$$

Но ведь $AD = AC$, поэтому

$$\frac{DE}{EB} = \frac{AC}{AB}. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) имеем:

$$\frac{CL_1}{BL_1} = \frac{DE}{EB},$$

следовательно, $EL_1 \parallel CD$ и $\angle AL_1E = \angle CAL_1 = \frac{1}{2}\angle A$.

Отсюда, прямоугольный треугольник L_1AE можно построить по $AL_1 = l_a$ и $\angle AL_1E = \frac{1}{2}\angle A$, и, следовательно, получить отрезок AE. Тогда треугольник ABD можно построить как треугольник Паппа: $BD = 2m_a$ — основание, AE — биссектриса,

$$\angle DAB = 180° - \angle BAC.$$

Построив этот треугольник, можно построить треугольник ABC.

Признак Паппа

Задача. Доказать, что треугольник ABC равен треугольнику $A_1B_1C_1$, если $a = a_1$, $\angle A = \angle A_1$, $l_a = l_{a_1}$.

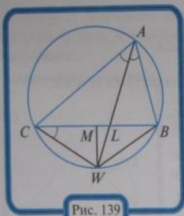

Рис. 139

Доказательство.

Пусть M — середина стороны BC треугольника ABC, L — основание биссектрисы угла BAC, W — точка пересечения продолжения этой биссектрисы с описанной окружностью (рис. 139).

В треугольнике $A_1B_1C_1$ введем аналогичные обозначения, но с индексом 1. Поскольку прямоугольные треугольники CMW и $C_1M_1W_1$ равны по катету и острому углу, то $WM = W_1M_1$ и $CW = C_1W_1$. Из подобия треугольников CLW и ACW имеем:

$$\frac{CW}{AW} = \frac{LW}{CW}$$

(сравните с равенством (1) на с. 168), откуда

$$CW^2 = (l_a + LW)LW.$$

Следовательно,

$$l_a \cdot LW + LW^2 = l_{a_1} \cdot L_1W_1 + L_1W_1^2,$$

а поскольку $l_a = l_{a_1}$, то

$$l_a \cdot (LW - L_1W_1) + (LW - L_1W_1)(LW + L_1W_1) = 0,$$

откуда $LW = L_1W_1$.

Тогда прямоугольные треугольники LMW и $L_1M_1W_1$ равны по катету и гипотенузе. Поэтому

$$LM = L_1M_1 \text{ и } \angle MLW = \angle M_1L_1W_1.$$

Отсюда получим, что треугольники ABL и $A_1B_1L_1$ равны:

$$BL = BM - LM = \frac{a}{2} - LM =$$

$$= \frac{a_1}{2} - L_1M_1 = B_1M_1 - L_1M_1 = B_1L_1,$$

$$AL = l_a = l_{a_1} = A_1L_1,$$

$$\angle ALB = \angle MLW = \angle M_1L_1W_1 = \angle A_1L_1B_1.$$

Значит, $\angle B = \angle B_1$, а следовательно, $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

(Отметим, что мы не знаем, какой из углов B_1 или C_1 больше, а следовательно, точке B может «соответствовать» как точка B_1, так и точка C_1; это связано с тем, что в задаче на построение были возможны два решения).

Доказательство теоремы Штейнера—Лемуса при помощи треугольника Паппа

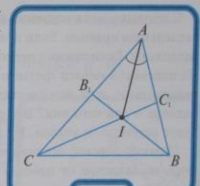

Рис. 140

Пусть BB_1 и CC_1 — биссектрисы углов ABC и ACB треугольника ABC (рис. 140). По условию, $BB_1 = CC_1$.

Поскольку AI — биссектриса и в треугольнике CAC_1, и в треугольнике BAB_1, то эти треугольники равны по признаку Паппа, а следовательно,

$$AB = AC \text{ или } AB = AC_1.$$

Ясно, что второй вариант — невозможен, а поэтому треугольник ABC — равнобедренный.

12 — 4-1664

Параллели? Антипараллели!

С первых шагов изучения геометрии мы привыкли к параллельным прямым. Если прямые не пересекаются, они параллельны. Если прямые пересекаются, они не параллельны. На плоскости ничего третьего быть не может — или прямые параллельны, или они пересекаются. Что же такое антипараллели и для чего они? Все станет ясно, когда этот раздел будет прочитан и усвоен. Ну а пока что — одно замечание.

Надеюсь, дорогой читатель, что ты вместе со мной скоро ощутишь наслаждение от поисков **геометрических общностей**, убедишься, что это — самое сложное и самое интересное при изучении геометрии. Ты увидишь, что появляются такие геометрические ситуации, которые желательно объединить и попробовать дать им какое-то обобщающее название. Насколько будет оправдано такое обобщение? Это могут подтвердить только задачи. Только они! Содержательны ли они? Эстетичны ли? Интересно ли (это тоже очень важно!) их решать? Конечно, желательно, чтобы обобщенные нами свойства-задачи стали полезны в... решении последующих задач. Тогда такой цикл порождает **стандартную ситуацию**. И когда ты с этой ситуацией встретишься в море-океане задач, то подаришь ей свою улыбку, как старому другу. Что же может быть приятнее? Итак, вперед!

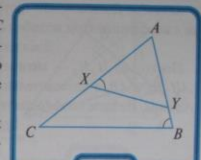

Рис. 141

Определение. Если на стороне AC треугольника ABC (рис. 141) или на ее продолжении выбрать произвольную точку X и провести через нее прямую XY ($Y \in AB$) так, чтобы $\angle AXY = \angle B$, то тогда отрезок XY будем называть **антипараллелью** стороны BC.

Отрезки XY и BC называются **антипараллельными**.

Рассмотрим несколько «знаменитых» антипараллелей.

1. Антипараллель — отрезок H_2H_3

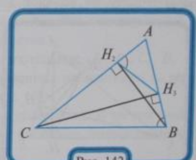

Рис. 142

Рассмотрим остроугольний треугольник ABC. Проведем высоты BH_2 и CH_3 (рис. 142).

Докажем, что отрезок H_2H_3 антипараллелен отрезку BC.

Действительно, вокруг четырехугольника BH_3H_2C можно описать окружность, откуда

$$\angle CH_2H_3 + \angle CBH_3 = 180°.$$

А поскольку

$$\angle CH_2H_3 + \angle AH_2H_3 = 180°,$$

то отсюда

$$\angle AH_2H_3 = \angle CBA,$$

то есть отрезки H_2H_3 и BC антипараллельны.

12*

Задача 1. Доказать, что треугольники AH_2H_3 и ABC подобны с коэффициентом подобия $\cos A\,(\angle A < 90^\circ)$.

Доказательство.

Поскольку H_2H_3 — антипараллель к BC (см. рис. 142), то $\angle AH_2H_3 = \angle B$, а следовательно, треугольники AH_2H_3 и ABC подобны. Найдем коэффициент подобия k:

$$k = \frac{H_2H_3}{BC}.$$

Треугольник H_2H_3B вписан в окружность с диаметром BC, поэтому

$$H_2H_3 = BC \sin \angle H_2BH_3 = BC \sin(90^\circ - A) = BC \cos A.$$

Следовательно, $k = \cos A$.

Задача 2. Доказать, что в ортоцентрическом треугольнике $H_1H_2H_3$ остроугольного треугольника ABC биссектриса угла $H_2H_1H_3$ принадлежит высоте AH_1.

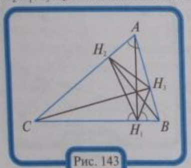

Рис. 143

Доказательство.

Отрезки H_1H_2 и H_1H_3 антипараллельны сторонам AB и AC треугольника ABC, соответственно (рис. 143), а следовательно,

$$\angle CH_1H_2 = \angle BAC,$$

$$\angle BH_1H_3 = \angle BAC.$$

Поскольку AH_1 — высота, то

$$\angle H_2H_1A = 90^\circ - \angle BAC = \angle H_3H_1A.$$

Задача 3. В остроугольном треугольнике ABC провели высоты AH_1 и BH_2. Из точек A и B на прямую H_1H_2 опустили перпендикуляры AK_1 и BK_2. Доказать, что $K_1H_2 = K_2H_1$.

Доказательство.

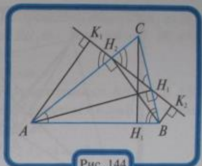

Рис. 144

Поскольку H_1H_2 — антипараллель к AB, то

$$\angle BH_1K_2 = \angle CH_1H_2 = \angle A,$$

$$\angle AH_2K_1 = \angle CH_2H_1 = \angle B$$

(рис. 144). Из прямоугольного треугольника AK_1H_2:

$$K_1H_2 = AH_2 \cos \angle AH_2K_1 = $$
$$= AB \cos A \cos B.$$

Из прямоугольного треугольника BK_2H_1:

$$K_2H_1 = BH_1 \cos \angle BH_1K_2 = AB \cos B \cos A.$$

Следовательно, $K_1H_2 = K_2H_1$.

Задача 4. Из вершин выпуклого четырехугольника опустили перпендикуляры на его диагонали. Доказать, что четырехугольник, образованный их основаниями, подобен данному.

Доказательство.

Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник, A_1, B_1, C_1, D_1 — основания перпендикуляров, опущенных на диагонали из вершин A, B, C, D, соответственно (рис. 145).

Пусть O — точка пересечения диагоналей. В треугольнике AOB отрезки AA_1 и BB_1 являются высотами, поэтому отрезок A_1B_1 антипараллелен стороне AB:

$$\angle B_1A_1O = \angle B_1AB.$$

Четырехугольник AA_1D_1D — вписанный, поэтому

$$\angle D_1A_1O = \angle B_1AD.$$

Следовательно, $\angle B_1A_1D_1 = \angle BAD$.

Аналогично показывается, что и другие углы четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$ равны соответственным углам четырехугольника $ABCD$.

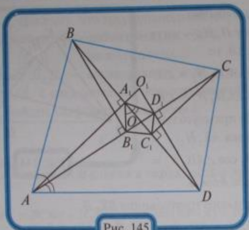

Рис. 145

Докажем, что соответственные стороны этих четырехугольников пропорциональны. Пусть $\angle AOB = \alpha$. Как было показано в задаче 1,

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \cos\alpha.$$

Аналогично, $\frac{C_1D_1}{CD} = \cos \angle COD = \cos\alpha.$

Пусть прямые DA_1 и AD_1 пересекаются в точке O_1. Тогда AA_1 и DD_1 — высоты в треугольнике AO_1D, поэтому отрезок A_1D_1 антипараллелен AD, и из задачи 1,

$$\frac{A_1D_1}{AD} = \cos \angle AO_1D = \cos(180^\circ - \angle A_1OD_1) = \cos\alpha.$$

Аналогично, $\frac{B_1C_1}{BC} = \cos\alpha.$

Следовательно, соответственные стороны четырехугольников $A_1B_1C_1D_1$ и $ABCD$ пропорциональны, а углы равны. Поэтому эти четырехугольники подобны с коэффициентом $k = \cos\alpha$.

Задача 5. В треугольнике ABC проведены высоты AH_1 и CH_3. Найти площадь треугольника BH_3H_1, если $AB = 13$, $BC = 14$, $AC = 15$.

Решение.

Пусть $\angle B = \beta$. Из задачи 1 треугольники BH_1H_3 и ABC (см. рис. 143) подобны с коэффициентом $k = \cos\beta$. По теореме косинусов для треугольника ABC:

$$15^2 = 13^2 + 14^2 - 2\cdot 13\cdot 14\cdot\cos\beta,$$

откуда $\cos\beta = \frac{5}{13}$. Тогда $\sin\beta = \frac{12}{13}$,

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot BA\cdot BC\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}\cdot 13\cdot 14\cdot\frac{12}{13} = 84.$$

Поскольку

$$\frac{S_{BH_1H_3}}{S_{ABC}} = k^2 = \cos^2\beta,$$

$$\text{то } S_{BH_1H_3} = 84\cdot\frac{25}{169} = \frac{2100}{169}.$$

Ответ: $\frac{2100}{169}$.

2. АНТИПАРАЛЛЕЛЬ — ОТРЕЗОК MN

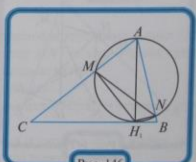

Рис. 146

Задача 1. Рассмотрим остроугольный треугольник ABC (рис. 146), AH_1 — его высота, M и N — проекции точки H_1 на стороны AC и AB, соответственно. Доказать, что отрезок MN антипараллелен BC.

Доказательство.

Ясно, что четырехугольник AMH_1N — вписанный. Тогда

$$\angle AMN = \angle AH_1N = \angle ABH_1$$

и, следовательно, отрезок MN антипараллелен BC.

Задача 2. Доказать, что $MN \parallel H_2H_3$ (в условиях и обозначениях предыдущих задач).

Доказательство.

Справедливым является даже более общий факт: если на стороне AC рассмотреть точки X и X_1, а на стороне AB — Y и Y_1, такие что отрезки XY и X_1Y_1 антипараллельны BC (см. рис. 141), то $XY \parallel X_1Y_1$. Действительно, по условию $\angle AXY = \angle ABC = \angle AX_1Y_1$.

Задача 3. Пусть M_1, N_1 — проекции основания H_1 высоты треугольника ABC на стороны AC и AB, соответственно. Точки M_2, N_2 и M_3, N_3 определяются аналогично (рис. 147). Доказать, что $M_1N_1 = M_2N_2 = M_3N_3$.

Доказательство.

Поскольку четырехугольник $AM_1H_1N_1$ вписан в окружность с диаметром AH_1, то из треугольника AM_1N_1:

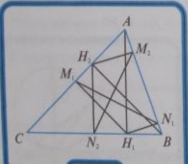

Рис. 147

$$M_1N_1 = AH_1 \cdot \sin A = \frac{2S}{a}\sin A = \frac{S}{R},$$

где S — площадь треугольника ABC, R — радиус описанной окружности.

Аналогично показывается, что

$$M_2N_2 = M_3N_3 = \frac{S}{R}.$$

Задача 4. В обозначениях предыдущей задачи доказать, что $M_1M_2 = N_1N_2$.

Доказательство.

В треугольнике CH_1H_2 (см. рис. 147) отрезки H_1M_1 и H_2N_2 являются высотами. Следовательно, отрезок M_1N_2 антипараллелен H_1H_2.

Аналогично решению задачи 2 имеем: $M_1N_2 \parallel AB$. Отсюда следует, что четырехугольник $M_1N_2N_1M_2$ — трапеция, а поскольку из задачи 3 $M_1N_1 = M_2N_2$, то эта трапеция — равнобедренная. Следовательно, $M_1M_2 = N_1N_2$.

Задача 5. Доказать, что $OA \perp MN$, где точка O — центр описанной вокруг треугольника ABC окружности.

Доказательство.

Пусть отрезок OA пересекает MN в точке D (рис. 148).Тогда имеем:

$$\angle ADM = 180° - (\angle AMN + \angle OAM) = 180° - (\angle B + 90° - \angle B) = 90°,$$

что и требовалось доказать.

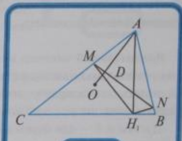

Рис. 148

Задача 6. Если центр O описанной вокруг треугольника ABC окружности принадлежит отрезку MN, то этот отрезок делит треугольник ABC на две равновеликие части.

Доказательство.

Пусть S — площадь треугольника ABC, S_x — площадь треугольника AMN (рис. 149).

Эти треугольники подобны, а поскольку AO — высота треугольника AMN (см. предыдущую задачу), то

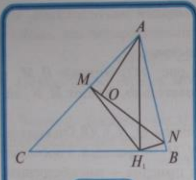

Рис. 149

$$\frac{S_x}{S} = \frac{OA^2}{AH_1^2} = \frac{R^2}{h_a^2} \qquad (1)$$

(R — радиус описанной окружности, $h_a = AH_1$). С другой стороны, AH_1 — диаметр окружности, описанной вокруг треугольника AMN, откуда

$$\frac{S_x}{S} = \frac{h_a^2}{4R^2}. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) имеем, что

$$\left(\frac{S_x}{S}\right)^2 = \frac{1}{4}, \quad \frac{S_x}{S} = \frac{1}{2},$$

что и требовалось доказать.

Внимательный читатель мог заметить, что мы пока что рассматривали только антипараллели в треугольнике. А разве нельзя сказать о двух произвольных отрезках на плоскости: антипараллельны они или нет? Конечно можно, и очень просто!

Пусть a и b — два отрезка на плоскости. Проведем через их концы прямые и предположим, что они пересекутся в некоторой точке A так, что один из отрезков будет лежать внутри треугольника, образованного точкой A и другим отрезком (например, как показано на рис. 150).

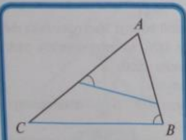

Рис. 150

Пусть BC — больший отрезок. Тогда данусе отрезки называются антипараллельными, если меньший из них является антипараллельным стороне BC в треугольнике ABC.

3. Антипараллели в окружности

Задача 1. Стороны угла A пересечены окружностью. Доказать, что хорды окружности, которые соединяют точки пересечения, антипараллельны.

Доказательство.

Пусть B_1C_1 и B_2C_2 — данные хорды (рис. 151). Тогда

$$\angle AC_1B_1 = 180° - \angle B_1C_1C_2 = \angle AB_2C_2.$$

Следовательно, отрезки B_1C_1 и B_2C_2 антипараллельны, что и требовалось доказать.

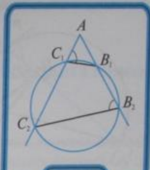

Рис. 151

Обратите внимание на то, что антипараллельные отрезки могут иметь общее начало.

Задача 2. Из точки вне окружности провели к окружности секущую и касательную. Доказать, что произведение длин секущей и ее внешней части равно квадрату длины касательной.

Доказательство.

Пусть A — данная точка, AA_1 — касательная, AB_2 — секущая, AB_1 — ее внешняя часть (рис. 152).

Поскольку $\angle AA_1B_1$ — это угол между касательной и хордой, то

$$\angle AA_1B_1 = \angle AB_2A_1.$$

Следовательно, отрезки A_1B_1 и A_1B_2 антипараллельны. Поэтому треугольники AA_1B_1 и AB_2A_1 подобны, откуда

$$\frac{AA_1}{AB_2} = \frac{AB_1}{AA_1}, \quad AA_1^2 = AB_2 \cdot AB_1,$$

что и требовалось доказать.

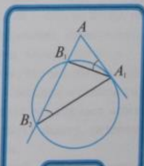

Рис. 152

Задача 3. Касательная, проведенная через вершину остроугольного треугольника к описанной вокруг этого треугольника окружности, параллельна прямой, соединяющей основания высот, которые проведены из двух других вершин. Доказать[1].

Доказательство.

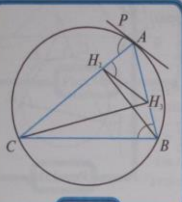

Рис. 153

Пусть PA (рис. 153) — касательная к описанной вокруг треугольника ABC окружности, BH_2, CH_3 — высоты. Тогда

$$\angle PAC = \angle ABC. \qquad (1)$$

С другой стороны, отрезок H_2H_3 антипараллелен стороне BC:

$$\angle AH_2H_3 = \angle ABC. \qquad (2)$$

Из равенств (1) и (2) имеем, что $\angle PAC = \angle AH_2H_3$, а следовательно, $PA \| H_2H_3$.

[1] Утверждение справедливо и для тупоугольного треугольника.

Клондайк под ногами. Не проходите мимо!

Сейчас мы рассмотрим задачи, в которых, на первый взгляд, нет ничего нового: в основном рассматривается частный случай более-менее известного факта. Стремление к обобщению заставляет нас оставаться в сомнениях относительно целесообразности такой постановки вопроса, пока... не начинаешь решать задачу.

Только тогда начинаешь понимать, что умение рассмотреть частный случай, предположив, например, совпадение точек или равенство углов или отрезков, часто не менее интересно, чем разглядеть общность в казалось бы разрозненных фактах.

Обратим внимание: такой подход (поиски частного случая известного факта) к созданию новой задачи — скорее всего, результат опыта и фортуны. Но тут, безусловно, присутствует и большая доля геометрического интереса: «А что, если?..»

Неожиданность момента состоит в том, что основную задачу уже много раз видели, решали (да еще и не одним способом), но даже и не подозревали, что один из частных случаев может выделиться в интересную самостоятельную задачу, решение которой требует эрудиции и находчивости.

К сожалению, не каждый частный случай — новая интересная задача. Тем более растет ценность задач такого типа, если их

удалось все же заметить и оценить по достоинству. Пока что их найдено немного, но я уверен, что поиски будут продолжаться, надеюсь, теперь уже вместе с тобой, дорогой читатель!

Задача 1. В треугольнике ABC точка H — ортоцентр, R — радиус описанной окружности. Найти $\angle BAC$, если $AH = R$.

Решение.

Справедлива формула (см. с. 121)

$$AH = 2R|\cos A|.$$

Следовательно, из условия:

$$R = 2R|\cos A|, \quad |\cos A| = \frac{1}{2},$$

$$\angle A = 60^\circ \text{ или } \angle A = 120^\circ.$$

Ответ: $\angle A = 60^\circ$ или $\angle A = 120^\circ$.

Задача 2. AM_1 — медиана равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$). Найти угол A этого треугольника, если

$$OM_1 = OH$$

(O — центр описанной окружности, H — ортоцентр).

Решение.

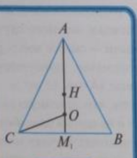

Рис. 154

Из условия следует, что треугольник ABC — остроугольный (рис. 154) и точка O лежит между точками M_1 и H. Поскольку

$$OM_1 = R\cos A$$

(из прямоугольного треугольника CM_1O), а

$$AH = 2R\cos A,$$

то

$$OH = R - 2R\cos A.$$

Следовательно,

$$R\cos A = R - 2R\cos A,$$

$$3R\cos A = R, \quad \cos A = \frac{1}{3}, \quad A = \arccos\frac{1}{3}.$$

Ответ: $A = \arccos\frac{1}{3}$.

Задача 3. В треугольник ABC вписана окружность, которая касается сторон AC и AB в точках B_1 и C_1, соответственно. Доказать, что если $BB_1 = CC_1$, то треугольник ABC — равнобедренный.

Доказательство.

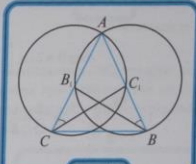

Рис. 155

Из теоремы синусов для треугольников ABB_1 и ACC_1 (рис. 155) следует, что радиусы окружностей, описанных вокруг этих треугольников равны (поскольку $BB_1 = CC_1$ и угол BAC — общий). Кроме того, $AB_1 = AC_1$ (поскольку B_1 и C_1 — точки касания вписанной окружности).

Поэтому $\cup AB_1 = \cup AC_1$, откуда $\angle ABB_1 = \angle ACC_1$, а следовательно, и $\angle AB_1B = \angle AC_1C$. Отсюда: $\Delta ABB_1 = \Delta ACC_1$, $AB = AC$.

Задача 4. Найти косинус угла при основании равнобедренного треугольника, если его ортоцентр лежит на вписанной в этот треугольник окружности.

Решение.

Пусть ABC — данный равнобедренный треугольник ($AB = AC$). По условию, ортоцентр H находится внутри треугольника, следовательно, $\angle A < 90^\circ$ (рис. 156). Пусть

$$\angle ABC = \beta,$$

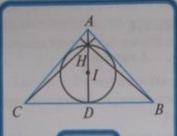

Рис. 156

D — середина BC, $CD = a$. Поскольку $\angle HCD = 90° - \beta$, то из прямоугольного треугольника CDH имеем:

$$HD = a\,\mathrm{tg}\,(90° - \beta) = a\,\mathrm{ctg}\,\beta.$$

Пусть точка I — инцентр треугольника ABC, тогда $HD = 2ID$. Но из прямоугольного треугольника BDI:

$$ID = a\,\mathrm{tg}\,\frac{\beta}{2}.$$

Следовательно,

$$a\,\mathrm{ctg}\,\beta = 2a\,\mathrm{tg}\,\frac{\beta}{2}, \quad 1 = 2\,\mathrm{tg}\,\frac{\beta}{2}\,\mathrm{tg}\,\beta,$$

$$1 = \frac{4\,\mathrm{tg}^2\frac{\beta}{2}}{1 - \mathrm{tg}^2\frac{\beta}{2}}, \quad \mathrm{tg}^2\frac{\beta}{2} = \frac{1}{5}, \quad \frac{1 - \cos\beta}{1 + \cos\beta} = \frac{1}{5}, \quad \cos\beta = \frac{2}{3}.$$

Ответ: $\frac{2}{3}$.

Задача 5. Одна из диагоналей вписанного в окружность четырехугольника является диаметром этой окружности. Доказать, что проекции противоположных сторон четырехугольника на другую диагональ попарно равны.

Доказательство.

Пусть центр O окружности, которая описана вокруг четырехугольника $ABCD$ принадлежит диагонали AC, точки M и L — проекции на диагональ BD точек A и C, соответственно (рис. 157). Через точку O проведем прямую, которая параллельна CL. По теореме Фалеса эта прямая пересечет отрезок

AL в его середине — точке K. Но $KO \parallel AM$, а поэтому отрезок KO пересечет сторону LM треугольника ALM в ее середине — точке E. С другой стороны,

$$OE \perp BD,$$

а следовательно,

$$BE = ED.$$

Отсюда

$$DL = BM,\ DM = BL,$$

что и требовалось доказать.

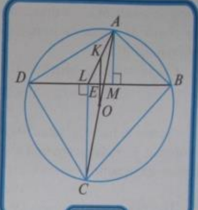

Рис. 157

Задача 6. Высота и медиана треугольника ABC, которые выходят из одной вершины, делят угол при этой вершине на три равные части. Доказать, что треугольник ABC — прямоугольный.

Доказательство.

Пусть высота CD и медиана CM делят угол ACB на три равные части:

$$\angle ACD = \angle DCM = \angle MCB$$

(рис. 158). Отобразим вершину C симметрично относительно стороны AB в некоторую точку C_1. Докажем, что треугольник BCC_1 — равносторонний.

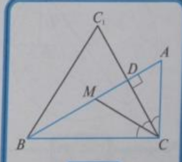

Рис. 158

Действительно, треугольник ACM — равнобедренный, поэтому $AD = MD$.

С другой стороны, $AM = BM$, а тогда $BM = 2MD$. Отсюда, точка M является точкой пересечения медиан равнобедренного

13 — 4-1664

треугольника BCC_1, а поскольку CM — биссектриса угла DCB, то точка M является и точкой пересечения биссектрис треугольника BCC_1.

Следовательно, этот треугольник равносторонний,

$$\angle DCB = 60°, \quad \angle BCM = 30°, \quad \angle ACB = 90°.$$

Задача 7. Высота, медиана и биссектриса треугольника ABC, которые выходят из одной вершины, делят угол при этой вершине на четыре равные части. Найти углы треугольника ABC.

Решение.

Пусть в треугольнике ABC высота CH, медиана CM и биссектриса CL делят угол ACB на четыре равные части (рис. 159). Отметим, что

биссектриса лежит между медианой и высотой.

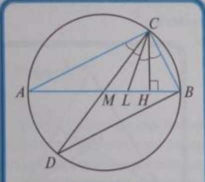

Рис. 159

Опишем вокруг треугольника ABC окружность и продлим медиану AM до пересечения с этой окружностью в точке D. Поскольку

$$\angle CAB = \angle CDB \text{ и}$$

$$\angle ACH = \frac{3}{4}\angle C = \angle DCB,$$

то

$$\angle CBD = \angle CHA = 90°.$$

Следовательно, CD — диаметр описанной окружности, а поскольку $AM = BM$ и CD не перпендикулярен AB, то AB — также диаметр. Тогда точка M — центр описанной окружности, то есть треугольник ACB — прямоугольный, $\angle ACB = 90°$.

Отсюда

$$\angle BCH = \frac{1}{4}\angle ACB = 22°30',$$

а поэтому

$$\angle CAB = 22°30', \quad \angle ABC = 67°30'.$$

Ответ: $22°30', 67°30', 90°$.

Отметим, что в двух последних задачах можно было воспользоватся тем, что

$$\angle ACO = \angle BCH,$$

где O — центр описанной окружности, H — ортоцентр (рис. 160).

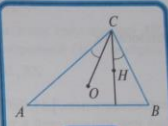

Рис. 160

Следовательно, если этот угол еще и равен углу между медианой и стороной, то центр описанной окружности лежит на медиане, а значит, треугольник равнобедренный или прямоугольный.

Задача 8. Пусть BL_2 и CL_3 — биссектрисы треугольника ABC, I — его инцентр. Доказать, что если $IL_2 = IL_3$, то или треугольник ABC — равнобедренный, или $\angle A = 60°$.

Доказательство.

Пусть K_2 и K_3 — точки касания вписанной окружности со сторонами AC и AB, соответственно (рис. 161). Тогда прямоугольные треугольники IK_2L_2 и IK_3L_3 равны по катету и гипотенузе.

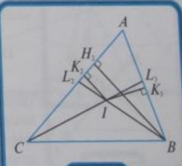

Рис. 161

13*

Отсюда $\angle K_2IL_2 = \angle K_3IL_3$. Проведем высоту BH_2. Ясно, что

$$\angle K_2IL_2 = \angle H_2BL_2.$$

Но ведь

$$\angle H_2BL_2 = \frac{|\angle A - \angle C|}{2},$$

откуда

$$\angle K_2IL_2 = \frac{|\angle A - \angle C|}{2}.$$

Аналогично,

$$\angle K_3IL_3 = \frac{|\angle A - \angle B|}{2}.$$

Следовательно, $|\angle A - \angle C| = |\angle A - \angle B|$. Если угол A наибольший или наименьший в треугольнике, то отсюда имеем, что $\angle B = \angle C$. Если же угол A — средний по величине, например, $\angle B \geq \angle A \geq \angle C$, то

$$\angle A - \angle C = \angle B - \angle A, \quad 2\angle A = \angle B + \angle C,$$
$$3\angle A = 180°, \quad \angle A = 60°.$$

Задача 9. Найти зависимость между сторонами треугольника, если две его медианы взаимно перпендикулярны.

Решение.

Пусть медианы

$$BM_2 = m_b \text{ и } CM_3 = m_c$$

треугольника ABC взаимно перпендикулярны (рис. 162). Пусть a, b, c — стороны треугольника, точка M — центроид. Тогда из прямоугольного треугольника BMC:

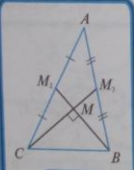

Рис. 162

$$\frac{4}{9}\left(m_b^2 + m_c^2\right) = a^2,$$

или

$$\frac{4}{9}\frac{2\left(a^2+c^2\right) - b^2 + 2\left(a^2+b^2\right) - c^2}{4} = a^2,$$

$$b^2 + c^2 = 5a^2.$$

Ответ: $b^2 + c^2 = 5a^2$.

Задача 10. Вычислить косинусы углов треугольника ABC, если треугольник AMM_3 — равносторонний (M — центроид, M_3 — середина стороны AB).

Решение.

Пусть M_1 — середина BC (рис. 163), a, b, c — стороны треугольника. Тогда

$$AM = MM_3 = AM_3 = \frac{c}{2}.$$

Следовательно,

$$CM_3 = \frac{3c}{2}, \quad AM_1 = \frac{3c}{4}.$$

Отсюда:

$$\begin{cases} \dfrac{9c^2}{4} = \dfrac{2\left(a^2+b^2\right) - c^2}{4} \\ \dfrac{9c^2}{16} = \dfrac{2\left(b^2+c^2\right) - a^2}{4} \end{cases},$$

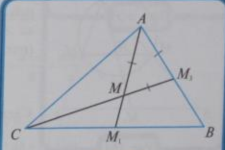

Рис. 163

то есть

$$\begin{cases} 5c^2 = a^2 + b^2 \\ c^2 = 8b^2 - 4a^2 \end{cases}, \quad \begin{cases} b^2 = \dfrac{7}{13}a^2 \\ c^2 = \dfrac{4}{13}a^2 \end{cases}.$$

Поэтому

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{\frac{7}{13}a^2 + \frac{4}{13}a^2 - a^2}{2\frac{\sqrt{28}}{13}a^2} = -\frac{1}{2\sqrt{7}}.$$

Аналогично,

$$\cos B = \frac{5}{2\sqrt{13}}, \quad \cos C = \frac{8}{\sqrt{91}}.$$

Ответ: $\cos A = -\frac{1}{2\sqrt{7}}, \cos B = \frac{5}{2\sqrt{13}}, \cos C = \frac{8}{\sqrt{91}}$.

Задача 11. В треугольнике ABC точки M_1 и M_2 — середины сторон CB и CA, соответственно, точка M — центроид. Известно, что точки C, M_1, M, M_2 принадлежат одной окружности. Доказать, что $2c^2 = a^2 + b^2$ ($a = BC$, $b = AC$, $c = AB$).

Доказательство.

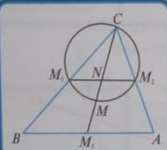

Рис. 164

Пусть N — середина средней линии M_1M_2 треугольника ABC, $CM_3 = m_c$ — медиана (рис. 164). Тогда $N \in CM_3$ и

$$CN = NM_3 = \frac{m_c}{2}.$$

Следовательно,

$$NM = \frac{m_c}{6}.$$

По теореме о произведении отрезков хорд:

$$CN \cdot NM = M_1N \cdot NM_2,$$

или

$$\frac{m_c}{2}\cdot\frac{m_c}{6} = \frac{c}{4}\cdot\frac{c}{4}, \quad \frac{m_c^2}{3} = \frac{c^2}{4}.$$

Но ведь

$$m_c^2 = \frac{2\left(a^2+b^2\right) - c^2}{4},$$

откуда $2c^2 = a^2 + b^2$.

Задача 12. Биссектрисы треугольника ABC делятся инцентром в одном и том же отношении, считая от вершины. Доказать, что треугольник ABC — равносторонний.

Доказательство.

Пусть a, b, c — стороны треугольника ABC, I — инцентр, AL_1 — биссектриса угла BAC (рис. 165). Тогда

$$\frac{AI}{IL_1} = \frac{b+c}{a}.$$

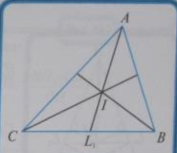

Рис. 165

Учитывая условие, из этого равенства и соответствующих равенств для других вершин треугольника имеем:

$$\frac{b+c}{a} = \frac{a+c}{b} = \frac{a+b}{c}.$$

Отсюда

$$\begin{cases} b^2 + bc = a^2 + ac \\ b^2 + ab = c^2 + ac \end{cases},$$

и, вычитая из первого равенство системы второе, имеем:

$$b(c-a) = (a-c)(a+c),$$
$$(c-a)(a+b+c) = 0, \quad c = a.$$

Аналогично показывается, что $b = a$. Следовательно, треугольник ABC — равносторонний.

Задача 13. Пусть AL_1, BL_2, CL_3 — биссектрисы треугольника ABC. Известно, что AL_1 пересекает отрезок L_2L_3 в центроиде M. Найти углы треугольника.

Решение.

Из условия следует, что AL_1 — медиана треугольника ABC, а следовательно, этот треугольник равнобедренный (рис. 166). Обозначим расстояния от точки M до боковых сторон AB и AC через t_1, а расстояние до основания BC — через t_2. По свойству **биссектрального треугольника**

$$t_1 + t_1 = t_2. \qquad (1)$$

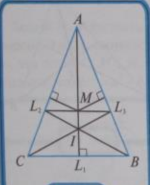

Рис. 166

Пусть $BC = a$, $AC = AB = b$. Поскольку M — центроид, то треугольники AMB, AMC и BMC равновелики, а поэтому

$$t_1 b = t_2 a.$$

Следовательно, из (1) имеем:

$$b = 2a, \quad AB = 4BL_1, \quad \cos B = \frac{1}{4},$$

$$\angle B = \angle C = \arccos\frac{1}{4},$$

$$\angle A = \pi - 2\arccos\frac{1}{4}.$$

Ответ: $\angle A = \pi - 2\arccos\frac{1}{4}$, $\angle B = \angle C = \arccos\frac{1}{4}$.

Задача 14. Пусть BL_2, CL_3 — биссектрисы треугольника ABC. Доказать, что если ортоцентр H треугольника ABC принадлежит отрезку L_2L_3, то

$$\frac{1}{AH} = \frac{1}{BH} + \frac{1}{CH}.$$

Доказательство.

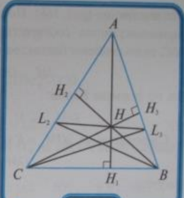

Рис. 167

Пусть AH_1, BH_2, CH_3 — высоты треугольника ABC (рис. 167). По свойству биссектрального треугольника:

$$HH_1 = HH_2 + HH_3. \qquad (1)$$

По свойству ортоцентра треугольника

$$HH_1 \cdot AH = HH_2 \cdot BH = HH_3 \cdot CH. \qquad (2)$$

Представим равенство (1) в виде

$$\frac{HH_1 \cdot AH}{AH} = \frac{HH_2 \cdot BH}{BH} + \frac{HH_3 \cdot CH}{CH},$$

тогда из (2) имеем, что

$$\frac{1}{AH} = \frac{1}{BH} + \frac{1}{CH}.$$

Задача 15. Пусть BL_2, CL_3 — биссектрисы треугольника ABC. Доказать, что если центр O описанной вокруг треугольника ABC окружности принадлежит отрезку L_2L_3, то $AH = R + r$ (H — ортоцентр треугольника, R и r — радиусы описанной и вписанной окружностей, соответственно).

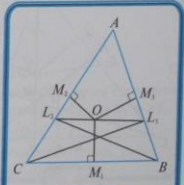

Рис. 168

Доказательство.

Пусть точки M_1, M_2, M_3 — середины сторон BC, AC и AB,

соответственно (рис. 168). Поскольку отрезки OM_1, OM_2, OM_3 перпендикулярны соответственным сторонам треугольника ABC, то по свойству биссектрального треугольника

$$OM_1 = OM_2 + OM_3.$$

Но, по формуле Карно:

$$OM_1 + OM_2 + OM_3 = R + r.$$

Следовательно, $2OM_1 = R + r$. Учитывая, что

$$2OM_1 = AH,$$

получим:

$$AH = R + r.$$

Задача 16. Пусть точки O и I — центры описанной и вписанной окружностей треугольника ABC, соответственно; BL_2, CL_3 — его биссектрисы. Для того, чтобы отрезок OI был параллелен стороне BC необходимо и достаточно, чтобы середина Q высоты AH_1 принадлежала отрезку L_2L_3. Доказать.

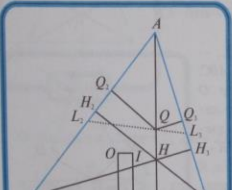

Рис. 169

Доказательство.

Необходимость. Пусть $OI \parallel BC$ (рис. 169), M_1 — середина BC, K_1 — точка касания вписанной окружности со стороной BC, H — ортоцентр, AH_1, BH_2, CH_3 — высоты треугольника, r — радиус вписанной окружности.

Тогда

$$OM_1 = IK_1 = r,$$

но, по формуле Карно,

$$OM_1 + OM_2 + OM_3 = R + r.$$

откуда

$$OM_2 + OM_3 = R.$$

Далее,

$$2OM_2 = BH, \quad 2OM_3 = CH,$$

следовательно,

$$BH + CH = 2R. \qquad (1)$$

Умножим обе части равенства (1) на $\cos A$ и воспользуемся формулами

$$AH = 2R\cos A, \quad HH_2 = CH\cos A, \quad HH_3 = BH\cos A.$$

Имеем $HH_3 + HH_2 = AH$, откуда

$$\frac{HH_2}{QQ_2} \cdot QQ_2 + \frac{HH_3}{QQ_3} \cdot QQ_3 = \frac{AH}{AQ} \cdot AQ, \qquad (2)$$

где точки Q_2 и Q_3 — проекции точки Q на стороны AC и AB, соответственно. Из подобия прямоугольных треугольников AQ_3Q и AH_3H, а также AQ_2Q и AH_2H имеем:

$$\frac{HH_2}{QQ_2} = \frac{AH}{AQ} = \frac{HH_3}{QQ_3}.$$

Следовательно, из (2):

$$QQ_2 + QQ_3 = AQ,$$

а поскольку $AQ = QH_1$, то

$$QQ_2 + QQ_3 = QH_1, \qquad (3)$$

откуда $Q \in L_2L_3$. Действительно, если Q' — точка пересечения AH_1 и L_2L_3, а Q_2', Q_3' — ее проекции на стороны AC и AB, то

$$Q'Q_2' + Q'Q_3' = Q'H_1$$

по свойству биссектрального треугольника. Теперь, если

$$AQ > AQ', \text{ то } QH_1 < Q'H_1,$$
$$\text{а } QQ_2 > Q'Q_2',\ QQ_3 > Q'Q_3',$$

что невозможно. Точно так же показывается, что невозможным является случай $AQ < AQ'$. Следовательно, $AQ = AQ'$, $Q \equiv Q'$.

Достаточность. Пусть Q — середина AH_1, $Q \in L_2L_3$. Тогда $QQ_2 + QQ_3 = QH_1 = AQ$. Из подобия прямоугольних треугольников AQ_3Q и AH_3H и AQ_2Q и AH_2H имеем, что справедливо равенство (2), а следовательно, $HH_3 + HH_2 = AH$. Отсюда следует равенство (1), а поэтому, по формуле Карно, имеем, что $OM_1 = r$, то есть $OI \parallel BC$.

Отметим, что (1) можно переписати в виде

$$\cos B + \cos C = 1.$$

Теперь рассмотрим задачу «по мотивам» предыдущей.

Задача 17. Пусть H — ортоцентр остроугольного треугольника ABC, I — центр вписанной окружности. Доказать, что если отрезок IH перпендикулярен биссектрисе AL_1, то

1) середина M_1 стороны BC, середина E_1 отрезка AH и точка I принадлежат одной прямой;

2) $OI \parallel BC$.

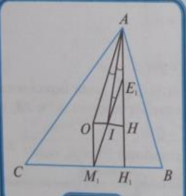

Рис. 170

Доказательство.

По условию, треугольник AIH (рис. 170) — прямоугольный, поэтому IE_1 — медиана прямоугольного треугольника, а следовательно,

$$\angle AIE_1 = \angle IAE_1.$$

А поскольку

$$\angle OAI = \angle IAE_1, \text{ то } IE_1 \parallel OA.$$

С другой стороны, известно, что

$$M_1E_1 \parallel OA.$$

Отсюда, точки M_1, E_1, I лежат на одной прямой. Но (см. с. 45)

прямая M_1I «отсекает» на высоте AH_1 отрезок $AP = r$

(где r — радиус вписанной окружности).

Следовательно, $OM_1 = AE_1 = r$, откуда $OI \parallel BC$.

Задача 18. В остроугольном треугольнике ABC точка T симметрична инцентру I относительно центра O описанной окружности. Доказать, что если T принадлежит BC, то точки M_1, I, H принадлежат одной прямой (H — ортоцентр треугольника, M_1 — середина BC).

Доказательство.

Пусть прямая M_1I пересекает высоту AH_1 в точке P (рис. 171). Как отмечалось при доказательстве предыдущей задачи, тогда $AP = r$ (r — радиус вписанной окружности). Пусть K_1 — точка касания вписанной окружности со стороной BC. Тогда OM_1 — средняя линия в треугольнике TK_1I, откуда

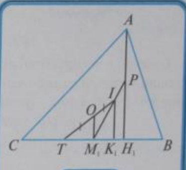

Рис. 171

$$2OM_1 = IK_1 = r.$$

С другой стороны

$$2OM_1 = AH.$$

Итак, $AH = r = AP$, $H \equiv P$, что доказывает утверждение задачи.

Задача 19. В треугольник вписан квадрат, причем центроид треугольника совпадает с центром квадрата. Найти углы треугольника.

Решение.

Пусть M — центроид треугольника ABC, $A_1A_2B_1C_1$ — данный вписанный квадрат, M_1 — середина BC, (рис. 172). Поскольку $B_1C_1 \parallel BC$, то медиана AM_1 пересекает отрезок B_1C_1 в его середине — точке F. Но ведь M — центр квадрата, то есть $FM \perp A_1A_2$. Следовательно, $AM_1 \perp BC$, и треугольник ABC — равнобедренный. Поскольку M — центроид треугольника, то

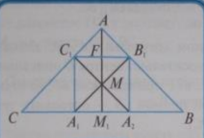

Рис. 172

$$AM = 2MM_1.$$

С другой стороны,

$$FM = MM_1,$$

поэтому

$$AM = 2FM, \quad AF = FM.$$

Отсюда, в четырехугольнике AB_1MC_1 диагонали перпендикулярны и в точке пересечения F делятся пополам, а поэтому этот четырехугольник — ромб. Следовательно,

$$\angle A = \angle C_1MB_1 = 90^\circ, \text{ тогда } \angle B = \angle C = 45^\circ.$$

Ответ: 90°, 45°, 45°.

Задача 20. В треугольнике ABC продолжили медианы до пересечения с описанной окружностью в точках A_1, B_1, C_1. Доказать, что если треугольник $A_1B_1C_1$ — равносторонний, то и треугольник ABC — равносторонний.

Доказательство.

Пусть M — центроид треугольника (рис. 173). Поскольку $\angle C_1B_1M = \angle BCM$, то треугольники C_1MB_1 и BMC подобны, откуда

$$\frac{B_1C_1}{BC} = \frac{B_1M}{CM}. \qquad (1)$$

Аналогично, из подобия треугольников A_1MB_1 и BMA:

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1M}{AM}. \qquad (2)$$

По условию, $B_1C_1 = A_1B_1$. Тогда из (1) и (2) имеем:

Рис. 173

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AM}{CM} = \frac{m_a}{m_c},$$

где $m_a = \frac{3}{2}AM$ — медиана стороны BC, а $m_c = \frac{3}{2}CM$ — медиана стороны AB. Отсюда, по формуле длины медианы, имеем:

$$\frac{AB^2}{BC^2} = \frac{2\left(AB^2 + AC^2\right) - BC^2}{2\left(AC^2 + BC^2\right) - AB^2},$$

откуда

$$\left(AB^2 - BC^2\right)\left(AB^2 + BC^2 - 2AC^2\right) = 0.$$

Поэтому

$$\left[\begin{array}{l} AB = BC \\ AB^2 + BC^2 = 2AC^2 \end{array}\right.$$

Аналогично, справедливы еще две совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} AB = AC \\ AB^2 + AC^2 = 2BC^2 \end{array}\right. \text{ и } \left[\begin{array}{l} AC = BC \\ AC^2 + BC^2 = 2AB^2 \end{array}\right.$$

Если справедливы первые равенства из произвольных двух совокупностей, то $AB = BC = AC$ и утверждение доказано.

Предположим, что справедливо только одно из первых равенств, например, $AB = BC$ и два вторых равенства:

$$\begin{cases} AB^2 + AC^2 = 2BC^2 \\ AC^2 + BC^2 = 2AB^2 \end{cases}.$$

Отсюда $2AC^2 = BC^2 + AB^2$, и поэтому $AC = BC$, то есть треугольник ABC — равносторонний.

Наконец, предположим, что справедливы только вторые равенства из совокупностей:

$$\begin{cases} AB^2 + BC^2 = 2AC^2 \\ AB^2 + AC^2 = 2BC^2. \\ AC^2 + BC^2 = 2AB^2 \end{cases}$$

Тогда, вычитая из первого равенства системы второе, получим, что $BC = AC$, а отнимая от второго третье — что $AB = BC$, то есть, опять-таки, треугольник ABC — равносторонний.

Во славу формулы Эйлера (Исповедь автора)

С формулой Эйлера я познакомился необычно. В начале шестидесятых годов на устном экзамене по математике в одном из вузов Киева преподаватель «валил» неугодных абитуриентов-медалистов при помощи задачи:

В треугольнике ABC найти расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей, если радиусы этих окружностей равны соответственно r и R.

Именно с этой задачей абитуриент (а в прошлом — мой ученик) пришел ко мне. Уверенность в превосходстве высшего педагогического образования (я преподавал математику уже (!) целых два года (!!!)) подтолкнула меня к невзвешенному обещанию — решить задачу тотчас же. Так ведь нет! Задача решаться не хотела. Беру у ученика тайм-аут на сутки и — скорее в библиотеку, ведь за помощью, к сожалению, я мог обратиться только к книгам. Несколько часов просидел в читальном зале, перелистывая страницы журнала «Математика в школе» (задачников в то время почти

не было, может, только «толстый» Моденовский спецкурс по элементарной математике) и почти утратил какую-либо надежду. Но как-то машинально открыв учебник по геометрии для вузов (автор — Перепелкин) я почувствовал буквально какой-то радостный шок, когда увидел формулу! Готовую формулу — формулу Леонарда Эйлера:

$$OI^2 = R^2 - 2Rr!$$

Ни в вузе, ни в литературе, ни в беседах с более маститыми коллегами я эту формулу раньше не встречал. Она покорила меня с первого мгновения, хотя приведенное в учебнике доказательство было не из легких. С того времени я не упускал случая возвращаться к этой короткой волшебной формуле, тем более, что количество способов ее доказательства оказалось почти бесконечным!

В 1971 году в № 3 журнала «Математика в школе» была напечатана моя первая статья «О некоторых свойствах треугольника». В этой статье я привел доказательство формулы Эйлера при помощи «теоремы трилистника» (это доказательство приближалось к доказательству, предложенному самим Эйлером).

Прошло уже тридцать лет. В течение этого времени были найдены разнообразные способы доказательства формулы Эйлера. В конце-концов эта формула появилась даже в некоторых школьных учебниках.

Мы рассмотрим несколько разных доказательств формулы Эйлера. Убедимся, что не все доказательства элементарные и короткие.

Если мы докажем равенство

$$AI \cdot IW = 2Rr,$$

то после этого доказательство формулы Эйлера займет всего одну строчку.

Но окончательно ставить точку рано. Эта формула ожидает новых следствий, может быть таких, как знаменитое неравенство:

доказать, что $R \geq 2r$

(см. ниже), а также новых применений и новых способов доказательства. Надеюсь на все это!

Итак, докажем, что $OI^2 = R^2 - 2Rr$, где O — центр окружности, описанной вокруг треугольника ABC, I — инцентр, R и r — радиусы описанной и вписанной окружностей, соответственно.

Первый способ.

Пусть W — середина дуги BC (рис. 174). WE — диаметр окружности, описанной вокруг треугольника ABC ($O \in WE$).

Из инцентра I проведем перпендикуляр к диаметру WE ($D \in WE$).

Из треугольника WOI (по следствию из теоремы косинусов):

$$OI^2 = OW^2 + IW^2 - -2OW \cdot IW.$$

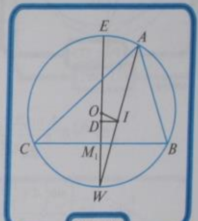

Рис. 174

Но

$$WD = r + M_1W$$

(M_1 — середина стороны BC). Поэтому:

$$OI^2 = R^2 + IW^2 - 2R \cdot (r + M_1W) = = R^2 - 2R \cdot r + IW^2 - 2R \cdot M_1W.$$

Из прямоугольного треугольника WCE следует, что:

$$CW^2 = 2R \cdot M_1W.$$

Поскольку $CW = IW$ («теорема трилистника»), имеем:

$$OI^2 = R^2 - 2Rr.$$

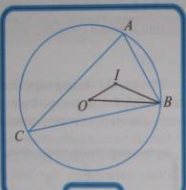

Рис. 175

Второй способ.

Из треугольника OIB по теореме косинусов получим (рис. 175):

$$OI^2 = OB^2 + BI^2 - 2OB \cdot BI \cdot \cos\angle OBI.$$

Учитывая, что:

$$OB = R, \quad BI = \frac{r}{\sin\frac{B}{2}},$$

$$\angle OBI = \frac{1}{2}\angle B - (90^\circ - \angle A),$$

имеем:

$$OI^2 = R^2 + \frac{r^2}{\sin^2\frac{B}{2}} - \frac{2Rr \cdot \sin\left(A + \frac{B}{2}\right)}{\sin\frac{B}{2}} =$$

$$= R^2 - 2Rr\left(\frac{\sin\left(A+\frac{B}{2}\right)}{\sin\frac{B}{2}} - \frac{4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{2R\sin^2\frac{B}{2}}\right) =$$

$$= R^2 - 2Rr\frac{\cos\frac{A-C}{2} - \cos\frac{A-C}{2} + \cos\frac{A+C}{2}}{\sin\frac{B}{2}} =$$

$$= R^2 - 2Rr\frac{\cos\frac{A+C}{2}}{\sin\frac{B}{2}} = R^2 - 2Rr.$$

Третий способ.

Лемма. Справедливо равенство:

$$AI \cdot IW = 2Rr.$$

Доказательство.

Мы уже встречались с этим равенством (см. с. 44). Приведем другой способ его доказательства.

Из прямоугольного треугольника AKI (рис. 176):

$$AI = \frac{r}{\sin\frac{A}{2}},$$

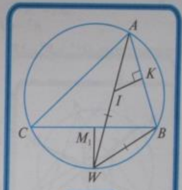

Рис. 176

а из прямоугольного треугольника BM_1W (M_1 — середина стороны BC):

$$BW = \frac{BC}{2\cos\angle M_1BW} = \frac{2R\sin A}{2\cos\frac{A}{2}} = 2R\sin\frac{A}{2}.$$

И поскольку $BW = IW$, то

$$AI \cdot IW = \frac{r}{\sin\frac{A}{2}} \cdot 2R\sin\frac{A}{2} = 2Rr.$$

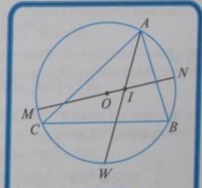

Рис. 177

Перейдем к доказательству формулы Эйлера.

Через точки O и I проведем диаметр MN (рис. 177). Тогда

$$MI = R + OI, \quad NI = R - OI.$$

По теореме о произведениях отрезков хорд:

$$MI \cdot IN = AI \cdot IW,$$

или $(R+OI)(R-OI) = AI \cdot IW$.

Вследствие леммы имеем:

$$R^2 - OI^2 = 2Rr,$$

следовательно, $OI^2 = R^2 - 2Rr$.

Рис. 178

Четвертый способ.

Для произвольного треугольника ABC справедлива формула Гамильтона:

$$\overline{OH} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$$

(H — ортоцентр треугольника).

Как известно,

инцентр I треугольника ABC является ортоцентром треугольника $W_1W_2W_3$.

Запишем формулу Гамильтона для треугольника $W_1W_2W_3$:

$$\overline{OI} = \overline{OW_1} + \overline{OW_2} + \overline{OW_3}.$$

Тогда

$$OI^2 = \left(\overline{OW_1} + \overline{OW_2} + \overline{OW_3}\right)^2$$

и учитывая, что точки W_i $(i = 1, 2, 3)$ делят соответственные дуги пополам (рис. 178), имеем:

$$OI^2 = OW_1^2 + OW_2^2 + OW_3^2 +$$

$$+ 2\overline{OW_1} \cdot \overline{OW_2} + 2\overline{OW_1} \cdot \overline{OW_3} + 2\overline{OW_2} \cdot \overline{OW_3} =$$

$$= 3R^2 + 2R^2\left(\cos(A+B) + \cos(B+C) + \cos(A+C)\right) =$$

$$= 3R^2 - 2R^2(\cos A + \cos B + \cos C) =$$

$$= 3R^2 - 2R^2\left(1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right) =$$

$$= 3R^2 - 2R(R + r) = R^2 - 2Rr.$$

Пятый способ.

Пусть K — точка касания вписанной в треугольник ABC окружности со стороной AC (рис. 179). Имеем:

$$\overline{OI} = \overline{OA} + \overline{AK} + \overline{KI},$$

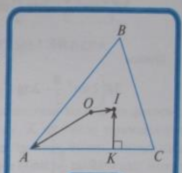

Рис. 179

откуда

$$OI^2 = \left(\overline{OA} + \overline{AK} + \overline{KI}\right)^2 =$$

$$= OA^2 + AK^2 + KI^2 +$$

$$+ 2\overline{OA} \cdot \overline{AK} + 2\overline{OA} \cdot \overline{KI} + 2\overline{AK} \cdot \overline{KI}.$$

Поскольку $\angle AKI = 90^\circ$, то $\overline{AK} \cdot \overline{KI} = 0$. Из прямоугольного треугольника AKI:

$$AK = r\,\mathrm{ctg}\frac{A}{2}.$$

Треугольник AOC равнобедренный, поэтому угол между векторами $\overline{OA}$ и $\overline{IK}$ вдвое меньше угла AOC, то есть равен углу B, а $\angle OAC = 90^\circ - \angle B$.

Отсюда следует, что

$$OI^2 = R^2 + r^2\mathrm{ctg}^2\frac{A}{2} + r^2 - 2R \cdot r\,\mathrm{ctg}\frac{A}{2} \cdot \sin B - 2Rr\cos B =$$

$$= R^2 - 2Rr + r^2 + 2Rr\left(1 - \mathrm{ctg}\frac{A}{2}\sin B - \cos B\right) + r^2\mathrm{ctg}^2\frac{A}{2}.$$

Поэтому для доказательства формулы Эйлера достаточно показать, что

$$2Rr\left(1-\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\sin B-\cos B\right)+r^2\left(\operatorname{ctg}^2\frac{A}{2}+1\right)=0,$$

то есть что

$$2R\left(2\sin^2\frac{B}{2}-2\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\right)+\frac{r}{\sin^2\frac{A}{2}}=0.$$

Имеем

$$2R\left(2\sin^2\frac{B}{2}-2\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\right)+\frac{r}{\sin^2\frac{A}{2}}=$$

$$=4R\sin\frac{B}{2}\left(\sin\frac{B}{2}-\frac{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{A}{2}}\right)+\frac{r}{\sin^2\frac{A}{2}}=$$

$$=-4R\frac{\sin\frac{B}{2}}{\sin\frac{A}{2}}\cos\frac{A+B}{2}+\frac{r}{\sin^2\frac{A}{2}}=$$

$$=-4R\frac{\sin\frac{B}{2}}{\sin^2\frac{A}{2}}\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}+\frac{r}{\sin^2\frac{A}{2}},$$

и осталось только воспользоваться формулой

$$r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

Вариации на темы Эйлера

Есть личности в математике, известные хотя бы по фамилии каждому образованному человеку. К их числу принадлежит и академик из Санкт-Петербурга Леонард Эйлер, гениальный ученый XVIII столетия, которое в области математики может быть названо «столетием Эйлера».

Формулы Эйлера, прямая Эйлера, окружность Эйлера и даже точки Эйлера неоднократно рассматривались в литературе по элементарной геометрии. Но можно проследить странную закономерность: имя знаменитого математика действует на авторов книг, как сеанс гипноза. После того, как сформулировано утверждение или теорема, знакомство с Эйлером, собственно, и заканчивается. То, что курс элементарной геометрии не только в школе, а даже и в вузе страдает дистрофией — давно уже очевидно. Поэтому кажется, что остается благодарить причастных уже за то, что великое имя хотя бы упоминается. Странно, но почти никто и не заметил, что простое введение в задачу образов и терминов Эйлера повышает рейтинг такой задачи на несколько порядков. Действительно, сравним на уровне уважительного отношения к себе: «прямая» и «прямая Эйлера», «окружность» и «окружность девяти точек» («окружность Эйлера»). Можно возразить, что введение терминологии Эйлера

требует достаточно кропотливой работы по получению знаний. Но — тем лучше — новые знания! Главное, не дойти до того, чтобы вместо задач, подтверждающих необходимость доказательства теоремы или формулы, рассматривать обыкновенные упражнения, на уровне «подставить и подсчитать».

Будем говорить о собранных по крохам «вариациях на темы Эйлера», как о «вариациях на темы Паганнини». Хотя есть и существенная разница — первые могут исполнять не только виртуозы геометрии, а все, кто хочет глубже эту науку осознать, кто не утратил способностей восхищаться, волноваться и радоваться.

Думаю, Леонарду Эйлеру это было бы по душе...

Точки Эйлера

Будем в дальнейшем рассматривать остроугольний треугольник ABC. Пусть точка H — ортоцентр этого треугольника. Середины отрезков AH, BH, CH называются точками Эйлера треугольника ABC и обозначаются E_1, E_2, E_3, соответственно.

Задача 1. Доказать, что отрезки M_1E_1, M_2E_2 и M_3E_3 пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам (точки M_1, M_2, M_3 — середины сторон BC, AC и AB, соответственно).

Доказательство.

Пусть точка O — центр описанной окружности вокруг треугольника ABC, H — ортоцентр этого треугольника (рис. 180). Поскольку

$$2OM_1 = AH,$$

то четырехугольник OM_1HE_1 — параллелограмм, а следовательно, отрезок M_1E_1 проходит через точку E — середину отрезка OH — и делится этой точкой пополам. Аналогично показывается,

что и отрезки M_2E_2 и M_3E_3 проходят через точку E и делятся этой точкой пополам.

Задача 2. Доказать, что $M_1E_1 = R$ (R — радиус описанной окружности)[1].

Доказательство.

Действительно, поскольку четырехугольник AOM_1E_1 — параллелограмм (рис. 180), то

$$M_1E_1 = OA = R.$$

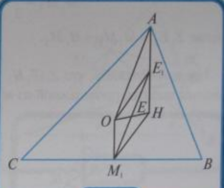

Рис. 180

Задача 3. Доказать, что

$$E_1E_2 = M_1M_2 = H_1M_3$$

(точка H_1 — основание высоты, проведенной из вершины A).

Доказательство.

В треугольнике AHB отрезок E_1E_2 — средняя линия (рис. 181):

$$E_1E_2 = \frac{1}{2}AB.$$

В прямоугольном треугольнике AH_1B отрезок H_1M_3 — медиана к гипотенузе, поэтому

$$H_1M_3 = \frac{1}{2}AB.$$

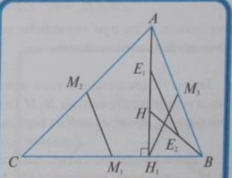

Рис. 181

[1] Здесь и далее в этом разделе обозначения будут «накапливаться» от задачи к задаче.

Учитывая, что

$$M_1M_2 = \frac{1}{2}AB,$$

имеем: $E_1E_2 = M_1M_2 = H_1M_3$.

Задача 4. Доказать, что $\angle AE_1H_3 = \angle CE_3H_1$ (точка H_3 — основание высоты, проведенной из вершины C).

Доказательство.

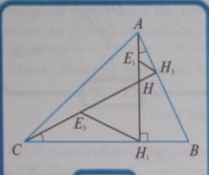

Рис. 182

В прямоугольном треугольнике CH_1H (рис. 182) отрезок H_1E_3 — медиана к гипотенузе, поэтому треугольник CE_3H_1 — равнобедренный. Аналогично, треугольник AE_1H_3 — равнобедренный. А поскольку углы при основаниях этих треугольников равны:

$$\angle E_3CH_1 = 90^\circ - \angle B = \angle E_1AH_3,$$

то равны и углы при вершинах, то есть $\angle AE_1H_3 = \angle CE_3H_1$, что и требовалось доказать.

Задача 5. Доказать, что угол между прямыми H_3M_2 и H_2E_3 равен углу между прямыми H_2M_3 и H_3E_2 (точка H_2 — основание высоты, проведенной из вершины B).

Доказательство.

В прямоугольном треугольнике AH_3C (рис. 183) отрезок H_3M_2 — медиана, поэтому $\angle AH_3M_2 = \angle A$. В прямоугольном треугольнике BH_3H отрезок H_3E_2 — медиана, поэтому $\angle BH_3E_2 = \angle H_3BE_2$. Поскольку

$$\angle H_3BE_2 = \angle ABH_2 = 90^\circ - \angle A,$$

то

$$\angle AH_3M_2 + \angle BH_3E_2 = 90^\circ,$$

откуда

$$\angle M_2H_3E_2 = 90^\circ.$$

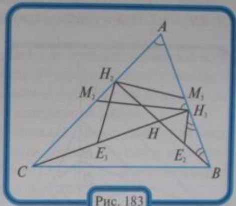

Рис. 183

Аналогично показывается, что

$$\angle M_3H_2E_3 = 90^\circ.$$

А поэтому угол между прямыми H_3M_2 и H_2E_3, как и угол между прямыми H_2M_3 и H_3E_2, дополняет до 90° угол между прямыми H_2M_3 и H_3M_2. Или, другими словами, стороны одного из данных углов между прямыми перпендикулярны соответственным сторонам другого угла. Утверждение доказано.

Задача 6. В треугольнике ABC отрезки BE_1 и H_2M_3 пересекаются в точке T. Доказать, что

$$S_{H_2E_1T} = S_{BM_3T}.$$

Доказательство.

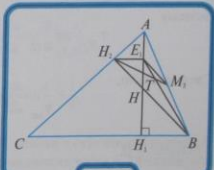

Рис. 184

В треугольнике AHB (рис. 184) отрезок E_1M_3 — средняя линия, а поэтому $E_1M_3 \parallel HB$.

Следовательно, четырехугольник $H_2E_1M_3B$ — трапеция, откуда

$$S_{H_2E_1T} = S_{H_2E_1M_3} - S_{E_1M_3T} = S_{BE_1M_3} - S_{E_1M_3T} = S_{BM_3T}.$$

Задача 7. Площадь четырехугольника $H_1E_3E_1E_2$ равна Q, $AH:HH_1 = 3:2$. Найти площадь треугольника ABC.

Решение.

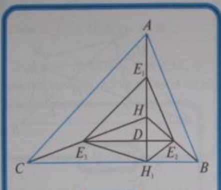

Рис. 185

Поскольку E_2E_3 — средняя линия треугольника BHC (рис. 185), то

$$S_{BHC} = 4S_{E_2HE_3}.$$

Проведя аналогичные рассуждения, получим:

$$S_{ABC} = 4S_{E_1E_2E_3}.$$

Далее,

$$S_{E_1E_2E_3} = Q - S_{E_2H_1E_3}.$$

Пусть D — точка пересечения AH_1 и E_2E_3.

Поскольку $E_1H_1 \perp E_2E_3$, то

$$\frac{S_{E_1E_2E_3}}{S_{E_2H_1E_3}} = \frac{E_1D}{DH_1} = \frac{E_1H + HD}{DH_1} = \frac{AH + HH_1}{HH_1} = \frac{AH}{HH_1} + 1 = \frac{5}{2}.$$

Поэтому

$$\frac{7}{5}S_{E_1E_2E_3} = Q, \quad S_{E_1E_2E_3} = \frac{5}{7}Q.$$

Следовательно,

$$S_{ABC} = \frac{20}{7}Q.$$

Ответ: $\frac{20}{7}Q$.

Формула Эйлера
$OI^2 = R^2 - 2Rr$

С этой формулой, а точнее, с ее доказательством мы встретились в предыдущем разделе. Теперь перед нами стоит другая задача — показать использование формулы, но не на вычислительных упражнениях, а на интересных задачах.

Напомним обозначения: точка O — центр описанной вокруг треугольника ABC окружности, точка I — центр вписанной в этот треугольник окружности, R — радиус описанной окружности, r — радиус вписанной окружности.

Задача 1. Доказать, что $R \geq 2r$.

Доказательство.

Поскольку $R^2 - 2Rr = OI^2 \geq 0$, то $R \geq 2r$.

Задача 2. Доказать, что в треугольнике ABC справедливо неравенство

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}.$$

Доказательство.

Поскольку $R \geq 2r$ и

$$r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2},$$

то

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}.$$

Задача 3. Треугольник ABC вписан в окружность радиуса R, точка D диаметрально противоположна точке C. Доказать, что

$$ID^2 = 4R^2 - ab$$

(где $a = BC$, $b = AC$).

Доказательство.

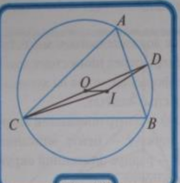

Рис. 186

Поскольку OI — медиана треугольника CDI (рис. 186), то по формуле длины медианы имеем, что

$$OI^2 = \frac{2\left(CI^2 + ID^2\right) - CD^2}{4}.$$

Справедлива формула:

$$CI^2 = ab - 4Rr.$$

Тогда, учитывая формулу Эйлера, имеем:

$$R^2 - 2Rr = \frac{1}{2}(ab - 4Rr) + \frac{1}{2} ID^2 - R^2,$$

откуда $ID^2 = 4R^2 - ab$.

Задача 4. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его средней линии M_2M_3 и проходит через центр O окружности, описанной вокруг этого треугольника. Найти угол BAC.

Решение.

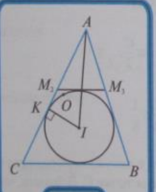

Рис. 187

По условию $OI = r$ (рис. 187), поэтому, по формуле Эйлера,

$$r^2 = R^2 - 2Rr, \quad \left(\frac{r}{R}\right)^2 = 1 - 2\frac{r}{R},$$

а следовательно,

$$\frac{r}{R} = \sqrt{2} - 1. \qquad (1)$$

Трапеция BM_3M_2C описана вокруг окружности, поэтому

$$CM_2 + BM_3 = CB + M_2M_3,$$

то есть

$$\frac{b}{2} + \frac{c}{2} = a + \frac{a}{2},$$

откуда

$$p - a = a. \qquad (2)$$

($a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, p — полупериметр треугольника ABC).

Пусть K — точка касания вписанной окружности со стороной AC, тогда $AK = p - a$, и учитывая (2), $AK = a$. Тогда из прямоугольного треугольника AKI:

$$IK = AK \operatorname{tg} \frac{A}{2},$$

то есть

$$r = a \operatorname{tg} \frac{A}{2} = 2R \sin A \operatorname{tg} \frac{A}{2}.$$

Следовательно, из (1) имеем:

$$\sin A \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}, \quad 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} \frac{\sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{A}{2}} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2},$$

$$2 \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}, \quad \cos A = 1 - \frac{\sqrt{2} - 1}{2} = \frac{3 - \sqrt{2}}{2}.$$

Ответ: $\arccos \frac{3 - \sqrt{2}}{2}$.

Задача 5. Построить треугольник по R, r, a.

Построение.

Строим окружность радиуса R, центр которой обозначим O (рис. 188). Из произвольной точки C этой окружности проведем хорду CB длины a. Нам нужно найти такую точку A на окружности, чтобы радиус вписанной в треугольник ABC окружности

15 — 4-1664

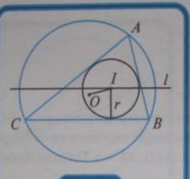

Рис. 188

был равен r. Проведем на расстоянии r от хорды CB прямую l ($l \parallel BC$), а потом из точки O проведем дугу радиуса

$$\sqrt{R^2 - 2Rr}$$

до пересечения с прямой l. Получим инцентр треугольника — точку I. Далее, из точек B и C проведем касательные к окружности, радиус которой r, а центр — точка I. Эти касательные пересекутся в точке A на исходной окружности. Треугольник ABC — искомый.

(Поскольку основная цель этой задачи — использование формулы Эйлера для построения треугольника, исследование оставляем читателю.)

Формула Эйлера неожиданно появляется в исследовании одного замечательного геометрического места точек.

Пусть в треугольнике ABC сторона c — наименьшая (рис. 189). На сторонах BC и AC от вершин B и A отложим отрезки $BD = c$ и $AE = c$, соответственно. Докажем, что сумма расстояний от произвольной точки отрезка DE до сторон треугольника ABC — величина постоянная. Действительно, пусть X — произвольная точка отрезка DE, точки N, P, Q — проекции точки X на стороны BC, AC, AB, соответственно.

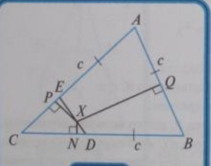

Рис. 189

Тогда

$$S_{ABDE} = S_{AXB} + S_{BXD} + S_{AXE} =$$
$$= \frac{1}{2}\left(XQ \cdot AB + XN \cdot BD + XP \cdot AE\right) =$$
$$= \frac{c}{2}\left(XQ + XN + XP\right)$$

следовательно,

$$XN + XP + XQ = \frac{2S_{ABDE}}{c},$$

что не зависит от X.

Но при чем же здесь формула Эйлера?! Внимание:

Задача 6. Доказать, что радиус R_x окружности, описанной вокруг треугольника CDE, равен OI.

Доказательство.

Из треугольника CDE (см. рис. 189) имеем:

$$R_x = \frac{DE}{2 \sin C}. \qquad (1)$$

Рассмотрим четырехугольник $ABDE$ (рис. 190). Пусть, для определенности, $\angle A \geq \angle B$. Опустим из точек E и D перпендикуляры EE_1 и DD_1 на AB. Поскольку $AB = AE = BD = c$, то из прямоугольных треугольников AE_1E и BD_1D имеем:

$$AE_1 = c \cos A, \quad BD_1 = c \cos B,$$
$$EE_1 = c \sin A, \quad DD_1 = c \sin B.$$

Тогда

$$EE_1 > DD_1.$$

Опустим из точки D перпендикуляр DK на EE_1.

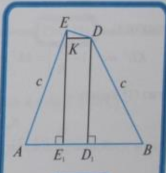

Рис. 190

15*

Имеем:

$$EK = EE_1 - KE_1 = EE_1 - DD_1 = c\sin A - c\sin B,$$

$$DK = E_1D_1 = AB - AE_1 - BD_1 = c - c\cos A - c\cos B.$$

Следовательно, из прямоугольного треугольника DKE имеем:

$$ED^2 = EK^2 + DK^2 =$$
$$= c^2(\sin A - \sin B)^2 + c^2(1 - \cos A - \cos B)^2 =$$
$$= c^2(\sin^2 A + \sin^2 B - 2\sin A \sin B) +$$
$$+ c^2(1 + \cos^2 A + \cos^2 B - 2\cos A - 2\cos B + 2\cos A\cos B) =$$
$$= c^2(3 + 2\cos(A+B) - 2\cos A - 2\cos B) =$$
$$= c^2\left(1 + 4\cos^2\frac{A+B}{2} - 4\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\right) =$$
$$= c^2\left(1 + 4\cos\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A+B}{2} - \cos\frac{A-B}{2}\right)\right) =$$
$$= c^2\left(1 - 8\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\right).$$

Поэтому, учитывая формулу

$$r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2},$$

получим:

$$ED^2 = c^2\left(1 - \frac{2r}{R}\right) = 4R^2\sin^2 C\left(1 - \frac{2r}{R}\right) = 4\sin^2 C\left(R^2 - 2Rr\right)$$

и из (1) имеем:

$$R_x = \sqrt{R^2 - 2Rr},$$

что и требовалось доказать.

Вторая формула Эйлера

$$S_x = \frac{S}{4}\left(1 - \frac{OX^2}{R^2}\right), \qquad (*)$$

где X — произвольная точка внутри остроугольного треугольника ABC, S_x — площадь треугольника, образованного проекциями точки X на стороны треугольника ABC, точка O — центр описанной вокруг треугольника ABC окружности, R — радиус этой окружности, S — площадь треугольника ABC.

(Доказательство этой формулы можно найти, например, в книге «Методи розв'язання задач з геометрії», с. 437)[1].

Задача 1. При помощи формулы (*) доказать формулу Эйлера

$$OI^2 = R^2 - 2Rr.$$

Доказательство.

Используем формулу (*) в случае $X \equiv I$. Проекции точки I на стороны BC, AC, AB — точки K_1, K_2, K_3, соответственно — являются точками касания вписанной окружности с этими сторонами (рис. 191). Тогда

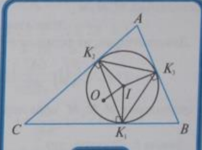

Рис. 191

$$S_x = S_{K_1K_2K_3} =$$
$$= S_{K_1IK_2} + S_{K_2IK_3} + S_{K_1IK_3} = \frac{1}{2}r^2(\sin A + \sin B + \sin C) =$$
$$= \frac{1}{2}r^2 \cdot \frac{1}{2R}(a+b+c) = \frac{1}{2R}r^2 p = \frac{Sr}{2R}.$$

[1] См. примечание на с. 18.

Следовательно, по формуле (*) получим:

$$\frac{S}{4}\left(1 - \frac{OI^2}{R^2}\right) = \frac{Sr}{2R}, \quad 1 - \frac{OI^2}{R^2} = \frac{2r}{R}, \quad OI^2 = R^2 - 2Rr,$$

что и требовалось доказать.

Отметим, что при доказательстве предыдущей задачи мы получили интересный факт:

$$\frac{S_{K_1K_2K_3}}{S} = \frac{r}{2R}.$$

Задача 2. Доказать, что среди всех треугольников, которые образованы проекциями некоторой точки X на стороны остроугольного треугольника, наибольшую площадь имеет треугольник $M_1M_2M_3$.

Доказательство.

Действительно, из формулы (*) получим, что

$$S_x = \frac{S}{4}\left(1 - \frac{OX^2}{R^2}\right) \le \frac{S}{4} = S_{M_1M_2M_3},$$

а треугольник $M_1M_2M_3$ образован проекциями точки O.

Задача 3. Доказать, что

$$OM^2 = R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9},$$

где точка M — центроид остроугольного треугольника ABC.

Доказательство.

Опустим из точки M перпендикуляры MP_1, MP_2, MP_3 на стороны BC, AC, AB, соответственно (рис. 192). Найдем площадь треугольника $P_1P_2P_3$. Поскольку $MM_1 = \frac{1}{3}AM_1$, то

$$MP_1 = \frac{h_a}{3},$$

аналогично,

$$MP_2 = \frac{h_b}{3},$$

$$MP_3 = \frac{h_c}{3}$$

(где h_a, h_b, h_c — высоты, проведенные к сторонам BC, AC, AB, соответственно). Отсюда

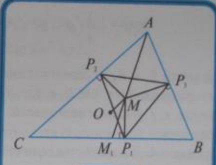

Рис. 192

$$S_{P_1MP_3} = \frac{1}{2}\frac{h_a}{3}\frac{h_c}{3}\sin B.$$

Рассуждая аналогично, получим, что

$$S_{P_1P_2P_3} = \frac{1}{18}\left(h_bh_c\sin A + h_ah_b\sin C + h_ah_c\sin B\right) =$$
$$= \frac{1}{18}\left(\frac{2S}{b}\frac{2S}{c}\frac{a}{2R} + \frac{2S}{a}\frac{2S}{b}\frac{c}{2R} + \frac{2S}{a}\frac{2S}{c}\frac{b}{2R}\right) =$$
$$= \frac{S^2}{9R}\left(\frac{a}{bc} + \frac{c}{ab} + \frac{b}{ac}\right) = \frac{S^2}{9Rabc}\left(a^2 + b^2 + c^2\right) =$$
$$= \frac{S^2}{9R \cdot 4SR}\left(a^2 + b^2 + c^2\right) = \frac{S}{36R^2}\left(a^2 + b^2 + c^2\right).$$

С другой стороны, учитывая формулу (*),

$$S_{P_1P_2P_3} = \frac{S}{4}\left(1 - \frac{OM^2}{R^2}\right),$$

откуда

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{9R^2} = 1 - \frac{OM^2}{R^2},$$

$$OM^2 = R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}.$$

Формула Эйлера в четырехугольнике

$$E_1E_2^2=\frac{1}{4}\left(a^2+b^2+c^2+d^2-e^2-f^2\right), \qquad (**)$$

где точки E_1 и E_2 — середины диагоналей BD и AC выпуклого четырехугольника $ABCD$, a, b, c, d — длины последовательных сторон, e, f — длины диагоналей.

Задача 1. Доказать, что если сумма квадратов сторон выпуклого четырехугольника равна сумме квадратов его диагоналей, то этот четырехугольник — параллелограмм.

Доказательство.

Из формулы (**) следует, что в этом случае $E_1E_2=0$, а следовательно, диагонали данного четырехугольника в точке пересечения делятся пополам, то есть этот четырехугольник — параллелограмм.

Задача 2. Доказать, что

$$b^2+d^2-2ac\le e^2+f^2.$$

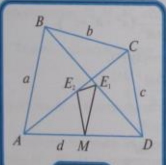

Рис. 193

Доказательство.

Пусть, для определенности, $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$, $AC=e$, $BD=f$ (рис. 193). Пусть точка M — середина стороны AD. Тогда E_1M — средняя линия в треугольнике ABD, а E_2M — средняя линия в треугольнике ACD. Следовательно, из треугольника E_1E_2M получим:

$$E_1E_2\le E_1M+E_2M=\frac{a}{2}+\frac{c}{2}=\frac{a+c}{2}.$$

Поэтому, учитывая формулу (**), имеем:

$$a^2+b^2+c^2+d^2-e^2-f^2\le a^2+c^2+2ac,$$
$$b^2+d^2-2ac\le e^2+f^2.$$

Прямая Эйлера

Леонард Эйлер доказал, что центр O описанной вокруг треугольника ABC окружности, центроид M этого треугольника и ортоцентр H принадлежат одной прямой, причем

$$2OM=MH.$$

Существует много способов доказательства этого факта, но мы не будем на них останавливаться, а сразу перейдем к задачам на прямую Эйлера.

Задача 1. Доказать, что

$$OM_1=\frac{1}{2}AH.$$

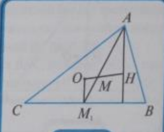

Рис. 194

Доказательство.

Поскольку (рис. 194)

$$OM_1 \parallel AH,$$

то треугольники OM_1M и HAM подобны. Учитывая, что

$$2OM=MH,$$

имеем $2OM_1=AH$.

Задача 2. Доказать, что прямая OI является прямой Эйлера треугольников $W_1W_2W_3$ и $K_1K_2K_3$ (W_1, W_2, W_3 — точки пересечения продолжений биссектрис углов треугольника ABC с описанной окружностью, K_1, K_2, K_3 — точки касания вписанной окружности со сторонами треугольника).

Доказательство.

Доказательство очевидно, поскольку

точка I является ортоцентром треугольника $W_1W_2W_3$, и треугольник $K_1K_2K_3$ гомотетичен треугольнику $W_1W_2W_3$, причем точка I при этой гомотетии переходит в точку O.

Задача 3. Доказать, что прямая Эйлера треугольника ABC параллельна стороне AB тогда, и только тогда, когда $\operatorname{tg} A\operatorname{tg} B=3$.

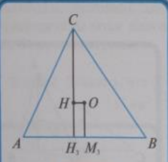

Рис. 195

Доказательство.

Необходимость.

Прежде всего отметим, что треугольник ABC — остроугольный (рис. 195), поскольку прямая OH не пересекает прямую AB. По условию

$$HH_3=OM_3,$$

но

$$HH_3=2R\cos A\cos B, \qquad (1)$$
$$OM_3=R\cos C. \qquad (2)$$

Отсюда,

$$2R\cos A\cos B=R\cos C,$$
$$2\cos A\cos B=-\cos(A+B),$$
$$3\cos A\cos B=\sin A\sin B, \quad \operatorname{tg} A\operatorname{tg} B=3.$$

Достаточность.

Пусть $\operatorname{tg} A\operatorname{tg} B=3$. Тогда $2R\cos A\cos B=R\cos C$. Поскольку $\operatorname{tg} A\operatorname{tg} B>0$, то $\angle A<90^\circ$, $\angle B<90^\circ$.

Далее,

$$\operatorname{tg} C=-\operatorname{tg}(A+B)=\frac{\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} A\operatorname{tg} B-1}=\frac{\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B}{2}>0,$$

то есть $\angle C<90^\circ$. При этих условиях формулы (1) и (2) справедливы. Отсюда $HH_3=OM_3$, что и требовлаось доказать.

Задача 4. Доказать, что прямые Эйлера треугольников BHC, AHC, AHB и ABC пересекаются в одной точке.

Доказательство.

Известно, что

окружность, описанная вокруг треугольника BHC, симметрична окружности, описанной вокруг треугольника ABC, относительно прямой BC.

Поэтому центр O_1 окружности, описанной вокруг треугольника BHC, симметричен центру O окружности, описанной вокруг треугольника ABC, относительно прямой BC (рис. 196).

Точка A — ортоцентр треугольника BHC, поэтому AO_1 — прямая Эйлера этого треугольника. Поскольку $AH=2OM_1=OO_1$ и $AH\parallel OO_1$, то четырехугольник AOO_1H — параллелограмм.

Следовательно, прямые Эйлера треугольников ABC и BHC пересекаются в середине отрезка OH — точке E. Аналогично показывается, что и прямые Эйлера треугольников AHC и AHB проходят через точку E.

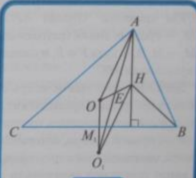

Рис. 196

Задача 5. Доказать, что если прямая Эйлера треугольника ABC делит его площадь пополам, то этот треугольник — равнобедренный.

Доказательство.

Докажем сначала такую лемму:

> отрезок, который проходит через центроид треугольника и делит площадь треугольника пополам, является медианой этого треугольника.

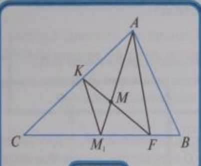

Рис. 197

Действительно, пусть отрезок KF проходит через центроид M треугольника ABC (рис. 197), причем $K \in AC$, $F \in BC$,

$$S_{CKF} = \frac{1}{2} S_{ABC}.$$

Тогда

$$S_{ACM_1} = \frac{1}{2} S_{ABC} = S_{CKF},$$

откуда

$$S_{AKM_1} = S_{ACM_1} - S_{CKM_1} = S_{CKF} - S_{CKM_1} = S_{FKM_1}.$$

Следовательно, $AF \parallel KM_1$, а поэтому треугольники AFM и M_1KM подобны. Отсюда $AF : KM_1 = AM : MM_1 = 2$, то есть KM_1 — средняя линия треугольника CAF, и $CM_1 = M_1F$. Но ведь $CM_1 = M_1B$, откуда $F \equiv B$, и следовательно, $FK \equiv BK$ — медиана треугольника ABC.

Доказательство задачи теперь становится очень простым: поскольку центроид M принадлежит прямой Эйлера, и, по условию, эта прямая делит площадь треугольника пополам, то, по лемме, отрезок прямой Эйлера, который лежит внутри треугольника, является медианой этого треугольника. Следовательно, ортоцентр и центр описанной окружности принадлежит медиане (или ее продолжению), поэтому треугольник — равнобедренный.

Задача 6. Доказать, что если прямая Эйлера отсекает от треугольника ABC равнобедренный треугольник CPQ ($CP = CQ$), то $\angle C = 60^\circ$ (то есть треугольник CPQ является равносторонним).

Доказательство.

Пусть P и Q — точки пересечения прямой Эйлера треугольника ABC со сторонами CA и CB, соответственно (рис. 198). По условию, $\angle CPQ = \angle CQP$. Тогда, поскольку

$$\angle ACO = \angle BCH,$$

имеем, что треугольники CPO и CQH равны (по стороне и двум углам). Следовательно,

$$CO = CH.$$

Поэтому из равенства $CH = 2R\cos C$ имеем:

$$R = 2R\cos C,$$

откуда $\angle C = 60^\circ$, что и требовалось доказать.

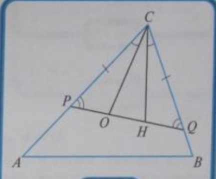

Рис. 198

Задача 7. Доказать, что если прямая Эйлера треугольника ABC перпендикулярна медиане этого треугольника, то квадраты сторон, как и квадраты медиан, образуют арифметическую прогрессию.

Доказательство.

Поскольку центроид M треугольника принадлежит прямой Эйлера, то по условию треугольник OMA — прямоугольный (рис. 199). Имеем:

$$OA^2 = OM^2 + AM^2. \qquad (1)$$

Поскольку (см. задачу 3 на с. 230)

$$OM^2 = R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9},$$

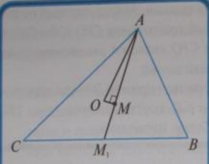

Рис. 199

и кроме того,

$$OA = R,$$

$$AM^2 = \frac{4}{9} m_a^2 = \frac{4}{9} \cdot \frac{2\left(b^2 + c^2\right) - a^2}{4}$$

(где m_a — медиана, которая проведена к стороне BC), то из (1) следует, что

$$R^2 = R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9} + \frac{2\left(b^2 + c^2\right) - a^2}{9},$$

то есть

$$2a^2 = b^2 + c^2. \qquad (2)$$

Следовательно, квадраты сторон треугольника образуют арифметическую прогрессию. Далее, из (2) имеем, что

$$m_a^2 = \frac{2\left(b^2 + c^2\right) - a^2}{4} = \frac{3}{4} a^2,$$

$$m_b^2 + m_c^2 = \frac{2\left(a^2 + c^2\right) - b^2 + 2\left(a^2 + b^2\right) - c^2}{4} =$$

$$= \frac{4a^2 + b^2 + c^2}{4} = \frac{3a^2}{2} = 2m_a^2.$$

Следовательно, и квадраты медиан треугольника образуют арифметическую прогрессию.

Задача 8. Доказать, что если инцентр I треугольника ABC лежит на прямой Эйлера, то треугольник — равнобедренный.

Доказательство.

Если $\angle B = \angle A$ или $\angle B = \angle C$, то утверждение задачи доказано.

Предположим, что угол B отличен от углов A и C. По условию, $I \in OH$ (рис. 200). Поскольку точка W_1 лежит на серединном перпендикуляре к BC, то треугольники AHI и W_1OI подобны. (Подчеркнем, что оба эти треугольники невырожденные, поскольку $\angle B \neq \angle C$).

Следовательно,

$$\frac{OI}{IH} = \frac{OW_1}{AH}. \qquad (1)$$

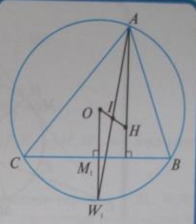

Рис. 200

Аналогично,

$$\frac{OI}{IH} = \frac{OW_3}{CH}. \qquad (2)$$

Поскольку $OW_1 = OW_3 = R$, то из (1) и (2) имеем, что $AH = CH$, то есть $\angle A = \angle C$.

Окружность Эйлера (окружность девяти точек)

Напомним, что это окружность, которой принадлежат (рис. 201):

- H_1, H_2, H_3 — основания высот треугольника ABC;
- M_1, M_2, M_3 — середины сторон треугольника ABC;
- E_1, E_2, E_3 — середины отрезков AH, BH, CH, соответственно, — точки Эйлера.

Центр E этой окружности — середина отрезка OH, а радиус равен $\frac{1}{2}R$ (R — радиус описанной окружности).

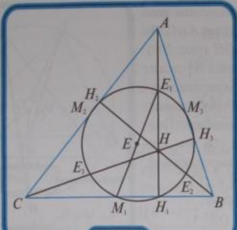

Рис. 201

Сначала рассмотрим доказательство двух уже знакомых нам утверждений при помощи окружности Эйлера.

Задача 1. Доказать, что $M_1E_1 = M_2E_2 = M_3E_3 = R$.

Доказательство.

Точки M_1, E_1, H_1 (см. рис. 201) принадлежат окружности Эйлера, причем

$$\angle M_1H_1E_1 = 90°.$$

Следовательно, M_1E_1 — диаметр окружности Эйлера, а значит

$$M_1E_1 = R.$$

Другие равенства доказываются аналогично.

Задача 2. Доказать, что высота AH_1 принадлежит биссектрисе угла $H_2H_1H_3$.

Доказательство.

Достаточно доказать, что $\cup E_1H_2 = \cup E_1H_3$ (см. рис. 201). Хорда E_1H_2 является медианой прямоугольного треугольника AH_2H, проведенной к гипотенузе AH.

Следовательно,

$$E_1H_2 = \frac{1}{2}AH.$$

Из аналогичных соображений,

$$E_1H_3 = \frac{1}{2}AH,$$

то есть $E_1H_2 = E_1H_3$, откуда $\cup E_1H_2 = \cup E_1H_3$, что доказывает утверждение задачи.

Задача 3. Доказать, что середины отрезков W_1W_2, W_1W_3, W_2W_3, IW_1, IW_2, IW_3, IA, IB, IC принадлежат одной окружности (I — инцентр треугольника ABC).

Доказательство.

Действительно, все эти точки принадлежат окружности Эйлера треугольника $W_1W_2W_3$, потому что

в треугольнике $W_1W_2W_3$ точка I — ортоцентр, а середины отрезков IA, IB, IC — основания высот.

Задача 4. Середина отрезка AO принадлежит окружности Эйлера. Доказать, что

$$\angle A = 60°.$$

Доказательство.

Пусть P — середина отрезка AO (рис. 202). Тогда

$$M_2P \| CO, \quad M_3P \| BO,$$

поэтому

$$\angle M_2PM_3 = \angle BOC = 2\angle A.$$

С другой стороны,

$$\angle M_2M_1M_3 = \angle A.$$

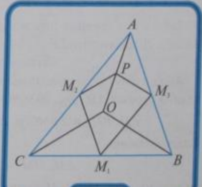

Рис. 202

16 — 4-1664

Но, по условию, четырехугольник $M_1M_2PM_3$ — вписанный, поэтому

$$\angle M_2PM_3 + \angle M_2M_1M_3 = 180°,$$

то есть

$$3\angle A = 180°, \quad \angle A = 60°,$$

что и требовалось доказать.

Задача 5. Середина отрезка AI принадлежит окружности Эйлера. Найти угол A.

Решение.

Задача аналогична предыдущей: если точка P — середина отрезка AI, то $\angle M_2PM_3 = \angle BIC$, но

$$\angle BIC = 90° + \frac{\angle A}{2},$$

поэтому имеем:

$$\angle A + \left(90° + \frac{\angle A}{2}\right) = 180°,$$

откуда $\angle A = 60°$.

Ответ: 60°.

Задача 6. Середина отрезка AM принадлежит окружности Эйлера. Доказать, что $2a^2 = b^2 + c^2$.

Доказательство.

Аналогично двум предыдущим задачам, если точка P — середина отрезка AM (рис. 203), то

$$\angle M_2PM_3 = \angle BMC \text{ и } \angle M_2PM_3 + \angle A = 180°.$$

Следовательно,

$$\angle M_2MM_3 + \angle A = 180°,$$

то есть точки A, M_2, M, M_3 принадлежат одной окружности.

Пусть N — точка пересечения медианы AM_1 и средней линии M_2M_3. Тогда

$$AN = NM_1 = \frac{m_a}{2},$$

а поэтому

$$NM = AM - AN = $$
$$= \frac{2}{3}m_a - \frac{1}{2}m_a = \frac{1}{6}m_a.$$

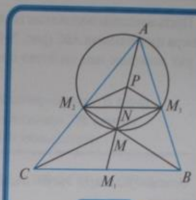

Рис. 203

По теореме о произведении отрезков хорд:

$$AN \cdot NM = M_2N \cdot M_3N,$$

откуда

$$\frac{1}{12}m_a^2 = \frac{1}{16}a^2, \quad 3a^2 = 2\left(b^2 + c^2\right) - a^2,$$

а следовательно,

$$2a^2 = b^2 + c^2,$$

что и требовалось доказать.

Задача 7. Построить треугольник ABC по серединам двух сторон и прямой Эйлера.

Решение.

Центр E окружности Эйлера является центром описанной вокруг треугольника $M_1M_2M_3$ окружности, а центр O окружности, описанной вокруг треугольника ABC, является ортоцентром треугольника $M_1M_2M_3$. Следовательно, прямая Эйлера треугольника ABC является прямой Эйлера треугольника $M_1M_2M_3$. Ясно, что построив треугольник $M_1M_2M_3$, мы построим треугольник ABC. А поэтому задача сводится к следующей: построить треугольник по двум вершинам и прямой Эйлера.

16 *

Пусть известны положения вершин B и C и прямой l — прямой Эйлера треугольника ABC (рис. 204). Построение будет опираться на уже знакомое нам свойство ортоцентра H треугольника ABC:

точка H', симметричная точке H относительно прямой BC, принадлежит описанной вокруг треугольника ABC окружности.

Описанную вокруг треугольника ABC окружность γ мы можем построить.

Действительно, ее центр — точка O — это точка пересечения серединного перпендикуляра к отрезку BC и прямой l, а радиус равен OB (или OC). Отобразим прямую l симметрично относительно прямой BC, получим некоторую прямую l'. Точка H' должна принадлежать и прямой l', и окружности γ. Построив точку H', мы получим вершину A, проведя через H' прямую, перпендикулярную BC, до пересечения с окружностью γ.

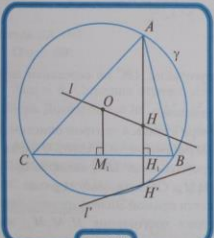

Рис. 204

Итак, если прямая l' не пересекает окружность γ, то задача решений не имеет. Если прямая l' касается ее, то задача имеет единственное решение. Если же прямая l' пересекает окружность γ в двух точках, то имеем два решения.

Что происходит в пространстве (Вариации на темы Эйлера в стереометрии)

Задача 1. В тетраэдре $DABC$ точка O — центр описанной сферы, R — ее радиус, точка O_0 — центр окружности, описанной вокруг треугольника ABC, точка I_0 — центр вписанной в этот треугольник окружности, R_0 и r_0 — радиусы этих окружностей. Доказать, что

$$OI_0^2 = R^2 - 2R_0 r_0.$$

Доказательство.

Поскольку

$$OO_0 \perp ABC$$

(рис. 205), то треугольники OO_0A и OO_0I_0 — прямоугольные. Имеем:

$$OA^2 = OO_0^2 + AO_0^2,$$

$$OI_0^2 = OO_0^2 + O_0I_0^2,$$

откуда

$$OI_0^2 = OA^2 - AO_0^2 + O_0I_0^2 = R^2 - R_0^2 + O_0I_0^2.$$

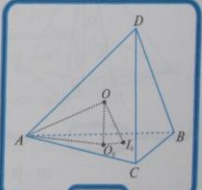

Рис. 205

По формуле Эйлера для треугольника ABC,

$$O_0I_0^2 = R_0^2 - 2R_0 r_0.$$

Следовательно,

$$OI_0^2 = R^2 - 2R_0 r_0.$$

Для правильной треугольной пирамиды справедлив аналог формулы Эйлера — формула Дюранда. Она устанавливает связь между радиусом R описанной сферы, радиусом r вписанной сферы и расстоянием между их центрами (точками O и I, соответственно). А именно:

Задача 2 (Формула Дюранда). Доказать, что в правильной треугольной пирамиде

$$OI^2 = (R+r)(R-3r).$$

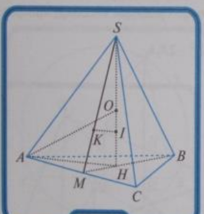

Рис. 206

Доказательство.

Доказательство проведем для случая, когда центр описанной сферы лежит внутри пирамиды.

Пусть $SABC$ — правильная треугольная пирамида, H — центр основания ABC, M — середина AC, K — точка касания вписаной в пирамиду сферы с боковой гранью SAC (рис. 206). Тогда SM — высота боковой грани SAC и $K \in SM$. Ясно, что

$$OI = |R + r - h|,$$

где $h = SH$ — высота пирамиды.

Следовательно,

$$OI^2 = R^2 + r^2 + 2Rr + h^2 - 2h(R+r). \quad (1)$$

Выразим $h^2 - 2h(R+r)$ через R и r.

Пусть $HM = x$ — радиус окружности, вписанной в равносторонний треугольник ABC, тогда $AH = 2x$. Прямоугольные треугольники SKI и SHM подобны, откуда

$$\frac{IK}{HM} = \frac{SI}{SM}.$$

Поскольку $SI = h - r$, $IK = r$, а

$$SM = \sqrt{h^2 + x^2}$$

(из прямоугольного треугольника SHM), то

$$\frac{r}{x} = \frac{h-r}{\sqrt{h^2+x^2}},$$

откуда

$$r^2\left(h^2 + x^2\right) = x^2(h-r)^2, \quad x^2\left(h^2 - 2hr\right) = h^2r^2,$$

поэтому

$$x^2 = \frac{hr^2}{h-2r}. \quad (2)$$

Из прямоугольного треугольника OHA:

$$OH^2 = OA^2 - AH^2 = R^2 - 4x^2,$$

с другой стороны,

$$OH = SH - SO = h - R.$$

Следовательно,

$$(h-R)^2 = R^2 - 4x^2,$$

откуда

$$4x^2 = 2hR - h^2. \quad (3)$$

Из (2) и (3) имеем:

$$\frac{4hr^2}{h-2r}=2hR-h^2,$$

то есть

$$\frac{4r^2}{h-2r}=2R-h, \quad 4r^2=2Rh-4Rr-h^2+2rh,$$

откуда

$$h^2-2h(R+r)=-4Rr-4r^2. \qquad (4)$$

Подставим (4) в (1), имеем:

$$OI^2=R^2+r^2+2Rr-4Rr-4r^2=$$
$$=R^2-2Rr-3r^2=(R+r)(R-3r).$$

что и требовалось доказать.

Следствие. В правильной треугольный пирамиде $R\geq 3r$.

Напомним, что тетраэдр называется равногранным, если все его грани — равные треугольники.

Задача 3. Доказать, что проекция Q вершины D равногранного тетраэдра $DABC$ на грань ABC принадлежит прямой Эйлера треугольника ABC, причем $QO=OH$ (O — центр окружности, описанной вокруг треугольника ABC, H — ортоцентр этого треугольника).

Доказательство.

Докажем сначала простой планиметрический факт: рассмотрим треугольник $A_1B_1C_1$ (рис. 207), середины сторон которого — это вершины треугольника ABC, тогда ортоцентр F треугольника $A_1B_1C_1$ лежит на прямой Эйлера треугольника ABC, причем

$$FO=OH.$$

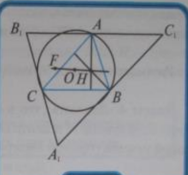

Рис. 207

Действительно, описанная вокруг треугольника ABC окружность является окружностью Эйлера треугольника $A_1B_1C_1$, поскольку она проходит через середины сторон треугольника $A_1B_1C_1$. Следовательно, точка O — центр окружности Эйлера треугольника $A_1B_1C_1$. Точка H является центром описанной окружности вокруг этого треугольника, так как является точкой пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника. Поэтому прямая HO является прямой Эйлера треугольника $A_1B_1C_1$, а следовательно, ей принадлежит и ортоцентр F этого треугольника, причем $FO=OH$.

Перейдем теперь к доказательству начальной задачи. В равногранном тетраэдре $DABC$ проведем высоту DE боковой грани DBC и сделаем развертку этого тетраэдра на плоскость ABC (рис. 208).

Поскольку треугольники ABC, A_1BC, B_1AC, C_1AB равны, то точки A, B, C — середины сторон треугольника $A_1B_1C_1$. Точка E принадлежит стороне BC, причем $A_1E\perp BC$. Поскольку точка Q — проекция вершины D тетраэдра на плоскость ABC, то Q лежит на прямой A_1E. Следовательно, точка Q лежит на высоте A_1H_1 треугольника.

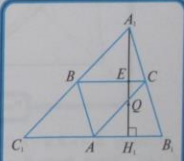

Рис. 208

Аналогично показывается, что точка Q принадлежит двум другим высотам треугольника $A_1B_1C_1$. Поэтому точка Q — ортоцентр этого треугольника,

а тогда, по доказанному выше, точка Q принадлежит прямой Эйлера треугольника ABC, причем $QO=OH$.

Рассмотрим аналог прямой Эйлера в пространстве.

Задача 4. Доказать, что в **ортоцентрическом** тетраэдре **центроид** G, **ортоцентр** H и центр O описанной сферы принадлежат одной прямой (прямой Эйлера), причем $HG=GO$.

Доказательство.

Пусть дан ортоцентрический тетраэдр $DABC$. Рассмотрим описанный параллелепипед $AB_1CD_1A_1BC_1D$ (рис. 209).

Поскольку тетраэдр — ортоцентрический, то

грани параллелепипеда $AB_1CD_1A_1BC_1D$ — ромбы.

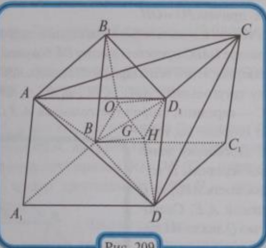

Рис. 209

Поэтому $B_1A=B_1B=B_1C$, а поскольку $OA=OB=OC$, то $OB_1\perp ABC$. Далее, точка H — ортоцентр тетраэдра $DABC$, поэтому $DH\perp ABC$. Следовательно, $OB_1\parallel DH$. Аналогично доказывается, что $OD_1\parallel BH$.

Кроме того, отрезки BD и B_1D_1 равны и параллельны между собой. Поэтому треугольники BHD и D_1OB_1 равны, а отсюда $OD_1=BH$. Следовательно, четырехугольник BOD_1H — параллелограмм, откуда отрезки BD_1 и OH в точке пересечения делятся пополам. Но ведь

центроид тетраэдра является точкой пересечения диагоналей описанного параллелепипеда.

Поэтому центроид G (середина диагонали BD_1) является серединой отрезка OH, что и требовалось доказать.

Сенсационная находка геометрических археологов

Первая задача была известна еще Архимеду (ее так и называют — «задача Архимеда»): «*Сумма квадратов отрезков, на которые точка пересечения делит взаимно перпендикулярные хорды, равна квадрату диаметра окружности*». В немного ином виде эта задача встречается в древней Индии («задача Парамадисвари»): «*Доказать, что во вписанном четырехугольнике, диагонали которого взаимно перпендикулярны, квадратный корень из суммы квадратов длин двух противоположных сторон равен диаметру окружности, описанной вокруг этого четырехугольника*». За двадцать пять столетий своего существования задача (в одном или в другом виде) неоднократно решалась, причем многими способами и ничего необычного сегодня мы бы в ней не увидели, если бы... в журнале «Квант» («Задачник „Кванта“», № 582) не появилась **новая** авторская задача: «*В окружность с центром O вписан четырехугольник с взаимно перпендикулярными диагоналями. Доказать, что расстояние от точки O до стороны четырехугольника равно половине длины противоположной стороны*».

Удивило не только внешнее сходство задач, но и сходство решений в каждом из способов. Действительно, смотрите сами.

Решение задач.

Задача Архимеда:
первый способ.

Пусть AB и CD — взаимно перпендикулярные хорды окружности с центром O и радиусом R (рис. 210). Нужно доказать, что $BC^2 + AD^2 = 4R^2$ (это равносильно утверждению задачи Архимеда). Проведем диаметр CE. Поскольку

$$\angle CBE = 90°,$$

а углы CAB и CEB равны, то

$$\angle ACD = \angle ECB,$$

откуда $AD = BE$.

Тогда, из прямоугольного треугольника CBE:

$$BC^2 + BE^2 = CE^2,$$

или $BC^2 + AD^2 = 4R^2$, что и требовалось доказать.

Задача «Кванта»:
первый способ.

Пусть $ADBC$ — четырехугольник с взаимно перпендикулярными диагоналями, который вписан в окружность с центром O (рис. 211).

Пусть M — середина BC, тогда длина отрезка OM является расстоянием от O до BC. Нужно доказать, что $OM = \frac{1}{2}AD$.

Проведем диаметр CE. Аналогично доказательству задачи Архимеда, имеем: $AD = BE$.

В прямоугольном треугольнике CBE отрезок OM — средняя линия, поэтому

$$OM = \frac{1}{2}BE,$$

что доказывает утверждение.

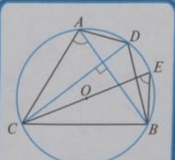

Рис. 210

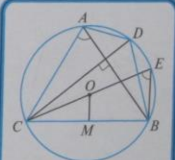

Рис. 211

Задача Архимеда:
второй способ.

В дальнейшем сохраним обозначения первого способа (рис. 212). Проведем хорду AE, параллельную CD. Тогда

$$AE \perp AB,$$

то есть

$$\angle EAB = 90°,$$

откуда EB — диаметр окружности. Поскольку $CEAD$ — вписанная трапеция, то

$$CE = AD.$$

Следовательно, из прямоугольного треугольника ECB:

$$EC^2 + BC^2 = BE^2,$$

то есть

$$AD^2 + BC^2 = 4R^2,$$

что и требовалось доказать.

Задача «Кванта»:
второй способ.

Проведем хорду AE, которая параллельна CD (рис. 213). Из тех же соображений, что и при доказательстве задачи Архимеда имеем, что EB — диаметр окружности.

Отсюда следует, что треугольник ECB — прямоугольный. Пусть M — середина BC ($OM \perp BC$), тогда OM — средняя линия треугольника ECB (поскольку $OE = OB$), а поэтому

$$OM = \frac{1}{2}EC.$$

Но ведь $EC = AD$, откуда

$$OM = \frac{1}{2}AD,$$

что и требовалось доказать.

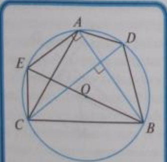

Рис. 212

Рис. 213

Задача Архимеда:
третий способ.

Пусть $\angle ACD = \alpha$ (рис. 214). Тогда $\angle CAB = 90° - \alpha$. Следовательно, из треугольника ACD, по следствию из теоремы синусов, имеем:

$$AD = 2R\sin\alpha,$$

а из треугольника CAB —

$$BC = 2R\sin(90° - \alpha) = 2R\cos\alpha.$$

Поэтому

$$AD^2 + BC^2 = 4R^2\sin^2\alpha + 4R^2\cos^2\alpha = 4R^2.$$

что и требовалось доказать.

Задача «Кванта»:
третий способ.

Пусть $\angle CDB = \alpha$ (рис. 215). Тогда

$$\angle BOM = \frac{1}{2}\angle BOC = \alpha,$$

и значит, из прямоугольного треугольника BMO имеем:

$$OM = OB\cos\alpha = R\cos\alpha.$$

Далее,

$$\angle ACD = 90° - \angle CAB = 90° - \angle CDB = 90° - \alpha,$$

поэтому из треугольника ACD, по следствию из теоремы синусов, имеем, что

$$AD = 2R\sin\angle ACD = 2R\sin(90° - \alpha) = 2R\cos\alpha,$$

то есть $AD = 2OM$, что и требовалось доказать.

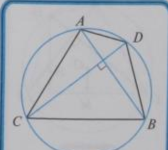

Рис. 214

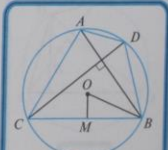

Рис. 215

Задача Архимеда:
четвертый способ.

Пусть H — ортоцентр треугольника BCD (рис. 216). Поскольку $BA \perp CD$, то $H \in BA$ и точка A является точкой пересечения продолжения высоты с описанной окружностью, а поэтому она симметрична точке H относительно стороны CD. Следовательно,

$$AD = DH.$$

По известной формуле геометрии треугольника имеем:

$$DH^2 = 4R^2 - BC^2.$$

Следовательно,

$$AD^2 + BC^2 = 4R^2,$$

что и требовалось доказать.

Задача «Кванта»:
четвертый способ.

Пусть H — ортоцентр треугольника BCD (рис. 217). Тогда (см. доказательство задачи Архимеда)

$$AD = DH.$$

Пусть точка M — середина BC. Используя известный факт геометрии треугольника, получим, что:

$$OM = \frac{1}{2} DH.$$

Следовательно,

$$OM = \frac{1}{2} AD,$$

что и требовалось доказать.

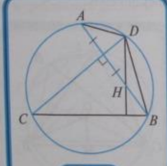

Рис. 216

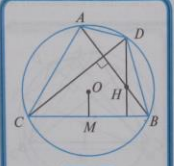

Рис. 217

Возникает сенсационная гипотеза: задача Архимеда и задача «Кванта» — тождественны — это одна и та же задача!

Геометрия треугольника подтверждает это! Действительно,

$$\underbrace{4R^2 - BC^2 = DH^2 = \overbrace{AD^2}_{}}_{\text{задача Архимеда}}\!\!\overbrace{= DH^2 = 4OM^2}^{\text{задача «Кванта»}}.$$

ЗАБАВЫ И ШАЛОСТИ ЦЕНТРОВ ОКРУЖНОСТЕЙ

Сравнение с веселыми и жизнерадостными забавами и шалостями детей или животных всегда интересно. Так случилось, что в геометрии к такой интересной аналогии могут иметь отношение... центры окружностей. Так и представляешь себе, как эти точки прячутся от тебя, причем прячутся так, что найти их очень сложно. Как маленькие дети, центры окружностей любят переодеваться в разные одежды, но взрослым нелегко узнать, кто во что оделся. Итак, в любом возрасте и на любом уровне знаний бывает достаточно сложно понять, что некоторая точка — не просто центр окружности, так или иначе связанной с каким-то треугольником, но и, скажем, ортоцентр треугольника не менее «уважаемого». Такие «забавы» и «шалости» вызывают постоянное удивление неограниченным свойствам треугольника и существованию маленьких тайн геометрии, о которых можно и не догадаться. Эти тайны, даже несмотря на свою «игривость», известны далеко не все. Что же, тем интереснее!

Задача 1. В треугольник ABC вписана окружность, которая касается сторон AC и AB в точках K_2 и K_3, соответственно.

В треугольник AK_2K_3 также вписана окружность. Доказать, что центр этой окружности лежит на окружности, вписанной в треугольник ABC.

Доказательство.

Пусть точка I — центр окружности, вписанной в треугольник ABC (рис. 218). Пусть биссектриса угла A пересечет дугу K_2K_3 в некоторой точке X. Поскольку

$$\angle AIK_2 = 90° - \frac{\angle A}{2} = \angle AIK_3,$$

то

$$\cup XK_2 = \cup XK_3.$$

По теореме об угле между касательной и хордой:

$$\angle AK_2X = \frac{1}{2}\angle K_2IX = \frac{1}{2}\angle K_3IX = \angle XK_2K_3.$$

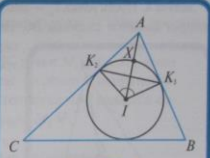

Рис. 218

Следовательно, точка X является точкой пересечения биссектрис треугольника AK_2K_3, что и требовалось доказать.

Задача 2. Доказать (в обозначениях предыдущей задачи), что центр окружности, вписанной в треугольник ABC, принадлежит окружности, описанной вокруг треугольника AK_2K_3.

Доказательство.

Действительно (см. рис. 218), четырехугольник AK_2IK_3 — вписанный, поскольку $\angle AK_2I + \angle AK_3I = 180°$, а следовательно, утверждение задачи доказано.

Обозначим точки пересечения биссектрис углов A, B, C с описанной вокруг треугольника ABC окружностью через W_1, W_2, W_3, соответственно, а точку пересечения биссектрис — через I.

Задача 3. Доказать, что центр окружности, описанной вокруг треугольника BIC, лежит на окружности, описанной вокруг треугольника ABC.

Доказательство.

Из «теоремы трилистника» имеем, что центром окружности, описанной вокруг треугольника BIC, будет точка W_1.

Задача 4. Пусть точка I_a — центр вневписанной окружности, которая касается стороны BC. Доказать, что I_a принадлежит окружности, описанной вокруг треугольника BIC.

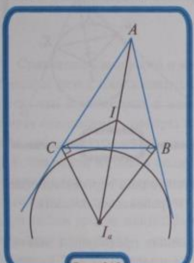

Рис. 219

Доказательство.

Биссектрисы внутреннего и внешнего углов треугольника перпендикулярны, отсюда

$$\angle ICI_a = 90^\circ$$

(рис. 219). Аналогично,

$$\angle IBI_a = 90^\circ.$$

Следовательно, II_a — диаметр окружности, описанной вокруг четырехугольника ICI_aB. Утверждение доказано.

Задача 5. Доказать (в обозначениях предыдущей задачи), что центр окружности, описанной вокруг треугольника AI_aB принадлежит окружности, описанной вокруг треугольника ABC.

Доказательство.

Пусть Q — центр окружности, описанной вокруг треугольника AI_aB. Тогда

$$\angle AQB = 2\angle AI_aB.$$

Но ведь (см. рис. 219)

$$\angle AI_aB = 180^\circ - (\angle I_aAB + \angle I_aBA) =$$
$$= 180^\circ - \left(\frac{\angle BAC}{2} + 90^\circ + \frac{\angle ABC}{2}\right) = \frac{\angle ACB}{2}.$$

Следовательно, $\angle AQB = \angle ACB$, и поэтому точка Q принадлежит окружности, описанной вокруг треугольника ABC.

Читатель уже знаком с таким (кстати — очень простым!) фактом:

> если в треугольнике ABC точки M_1, M_2, M_3 являются серединами сторон, то центр O окружности, описанной вокруг треугольника ABC является ортоцентром треугольника $M_1M_2M_3$.

Рассмотрим несколько задач *«по мотивам»*.

Пусть X — произвольная точка внутри треугольника ABC, X_1, X_2, X_3 — ее проекции на стороны BC, AC, AB.

Задача 6. Доказать, что если точка X является центром окружности, описанной вокруг треугольника $X_1X_2X_3$, то она является центром окружности, вписанной в треугольник ABC.

Доказательство.

Действительно, если

$$XX_1 = XX_2 = XX_3,$$

то точка X равноудалена от сторон треугольника ABC, а следовательно, является его инцентром.

Задача 7. Доказать, что если точка X является центром окружности, вписанной в треугольник $X_1X_2X_3$, то она является ортоцентром треугольника ABC.

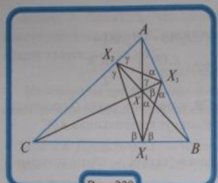

Рис. 220

Доказательство.

Докажем, что точки A, X, X_1 принадлежат одной прямой (рис. 220). Опишем окружности вокруг четырехугольников AX_2XX_3 и BX_1XX_3. Пусть

$$\angle BXX_1 = \alpha,$$
$$\angle BXX_3 = \beta,$$
$$\angle AXX_3 = \gamma.$$

Тогда

$$\angle BX_3X_1 = \alpha, \quad \angle BX_1X_3 = \beta, \quad \angle AX_2X_3 = \gamma.$$

По условию, X_3X — биссектриса угла $X_1X_3X_2$, поэтому

$$\angle X_2X_3A = 90^\circ - \angle X_2X_3X = 90^\circ - \angle X_1X_3X = \angle BX_3X_1 = \alpha.$$

Аналогично,

$$\angle X_2X_1C = \beta, \quad \angle X_1X_2C = \gamma.$$

Тогда из треугольников AX_2X_3, BX_1X_3, CX_1X_2 имеем:

$$\alpha + \gamma + \angle A = 180^\circ, \quad \alpha + \beta + \angle B = 180^\circ, \quad \beta + \gamma + \angle C = 180^\circ.$$

Сложив эти равенства, имеем

$$2(\alpha + \beta + \gamma) + (\angle A + \angle B + \angle C) = 3 \cdot 180^\circ,$$

откуда $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, то есть точки A, X, X_1 лежат на одной прямой. Тогда AX_1 — высота треугольника ABC. Аналогично доказывается, что BX_2 и CX_3 — также высоты треугольника ABC, то есть точка X является его ортоцентром.

Задача 8. Доказать, что если центры окружностей, вписанных в треугольники AX_2X_3, BX_1X_3, CX_1X_2, принадлежат окружности, описанной вокруг треугольника $X_1X_2X_3$, то точка X является центром окружности, вписанной в треугольник ABC.

Доказательство.

Пусть I_1 — центр окружности, вписанной в треугольник AX_2X_3 (рис. 221). Тогда

$$\angle X_2I_1X_3 = 90^\circ + \frac{\angle A}{2}.$$

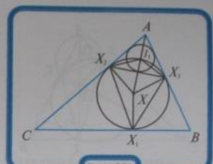

Рис. 221

Поскольку, по условию, четырехугольник $X_1X_2I_1X_3$ вписанный, то

$$\angle X_2X_1X_3 = 180^\circ - \angle X_2I_1X_3 = 90^\circ - \frac{\angle A}{2}.$$

С другой стороны, четырехугольник AX_2XX_3 вписанный, поэтому

$$\angle X_2XX_3 = 180^\circ - \angle A.$$

Следовательно,

$$\angle X_2XX_3 = 2\angle X_2X_1X_3.$$

Аналогично,

$$\angle X_1XX_2 = 2\angle X_1X_3X_2,$$
$$\angle X_1XX_3 = 2\angle X_1X_2X_3,$$

откуда точка X является центром окружности, описанной вокруг треугольника $X_1X_2X_3$. Отсюда следует (см. задачу 6), что точка X является центром окружности, вписанной в треугольник ABC.

Задача 9. Доказать, что если центры окружностей, описанных вокруг треугольников AX_2X_3, BX_1X_3, CX_1X_2, принадлежат окружности, описанной вокруг треугольника $X_1X_2X_3$, то точка X является центром окружности, вписанной в треугольник $X_1X_2X_3$.

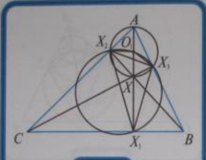

Рис. 222

Доказательство.

Пусть точка O_1 — центр окружности, описанной вокруг треугольника AX_2X_3 (рис. 222). Тогда имеем:

$$\angle X_2O_1X_3 = 2\angle A,$$

но, по условию, четырехугольник $X_1X_2O_1X_3$ — вписанный, откуда

$$\angle X_2X_1X_3 = 180^\circ - 2\angle A. \quad (1)$$

Найдем угол BXC. Имеем:

$$\angle BXC = 180^\circ - \angle XCX_1 - \angle XBX_1 =$$
$$= 180^\circ - (\angle C - \angle XCX_2) - (\angle B - \angle XBX_3) =$$
$$= \angle A + \angle XCX_2 + \angle XBX_3$$

Далее, поскольку четырехугольники CX_2XX_1 и BX_3XX_1 вписанные, то $\angle XCX_2 = \angle XX_1X_2$, $\angle XBX_3 = \angle XX_1X_3$. Тогда

$$\angle BXC = \angle A + \angle XX_1X_2 + \angle XX_1X_3 = \angle A + \angle X_2X_1X_3.$$

Поэтому из (1) имеем:

$$\angle BXC = 180^\circ - \angle A.$$

Аналогично доказывается, что

$$\angle AXC = 180^\circ - \angle B, \quad \angle AXB = 180^\circ - \angle C.$$

Следовательно, точка X является ортоцентром треугольника ABC, а поскольку

высоты являются биссектрисами ортоцентрического треугольника,

то точка X является инцентром треугольника $X_1X_2X_3$, что и требовалось доказать.

Проблема одноименных отрезков

Может ли в школьной геометрии существовать **проблема**?

Или сформулируем иначе — можно ли поставить **проблему**, которая и формулировкой, и методами ее решения относилась бы к школьной геометрии?

Считаю, что наконец-то мне посчастливилось сделать именно это.

«Проблема одноименных отрезков», предлагаемая тебе, дорогой читатель, — это прообраз серьезных математических проблем, поэтому она похожа на них:

- формой постановки;
- сложностью решения;
- исследованием;
- **(едва ли не самое главное!)** азартом поисков.

Но, в отличие от многих других проблем (например, задачи древности — «трисекции угла», «квадратуры круга», «удвоения куба»), проблема одноименных отрезков, во-первых, имеет решение и, во-вторых, понятна каждому, кто любит геометрию. А в-третьих, эта проблема не имеет окончания! Сколько бы не развивать ее, все время рождаются находки и открытия. Этим вопросом можно заниматься всю жизнь и получать удовольствие. Пусть больше будет таких проблем!

Вместо определения. В треугольнике отрезки будем называть *одноименными*, если эти отрезки... определяются одними и теми же словами.

Например, высота треугольника — перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника на противоположную сторону. Следовательно, высоты треугольника — одноименные отрезки. *Наверное, в треугольнике (да и не только в треугольнике) существует бесконечно много троек одноименных отрезков.*

Следовательно, **«проблему одноименных отрезков»** легко сформулировать:

Найти тройки *равных* одноименных отрезков.

Тривиальные случаи:

- отрезки, соединяющие центр вписанной в треугольник окружности с точками касания этой окружности со сторонами треугольника: $IK_1 = IK_2 = IK_3$;
- отрезки, соединяющие центр описанной окружности с вершинами треугольника: $OA = OB = OC$.

Рассмотрим **нетривиальные** случаи.

Задача 1. Равными одноименными отрезками будут отрезки, соединяющие проекции оснований высот треугольника на другие стороны.

Доказательство.

Пусть точка H_1 — основание высоты треугольника ABC, опущенной из точки A (рис. 223), а M_1 и N_1 — проекции этой точки на стороны AC и AB, соответственно. Четырехугольник $AM_1H_1N_1$ вписан в окружность, диаметр которой AH_1. Имеем:

$$M_1N_1 = AH_1 \sin A = \frac{2S}{a}\sin A = \frac{2S}{2R} = \frac{S}{R},$$

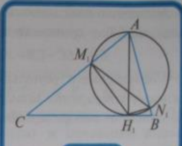

Рис. 223

где S — площадь треугольника ABC, R — радиус описанной окружности, $a = BC$.

Аналогично определяются отрезки M_2N_2 и M_3N_3 и доказывается, что

$$M_2N_2 = M_3N_3 = \frac{S}{R}.$$

Задача 2. Из двух вершин треугольника проведены биссектрисы внешних углов так, что они лежат по одну сторону от прямой, которая проходит через эти вершины. Из третьей вершины на каждую из биссектрис опущен перпендикуляр, основания этих перпендикуляров соединены отрезком. Аналогично определяются еще два отрезка. Доказать, что эти три одноименных отрезка будут равны.

Доказательство.

Пусть l_1 и l_2 — биссектрисы внешних углов при вершинах B и C (рис. 224). Опустим из вершины A перпендикуляры AT_1 и AT_2 на l_1 и l_2, соответственно. Пусть D и E — точки пересечения прямой BC с прямыми AT_1 и AT_2, соответственно. Поскольку BT_1 — биссектриса угла ABD и $AT_1 \perp l_1$, то треугольник ABD — равнобедренный, откуда $BD = AB$, и BT_1 — его медиана, то есть $AT_1 = T_1D$.

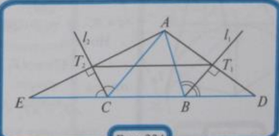

Рис. 224

Аналогично показывается, что $EC = AC$ и $AT_2 = T_2E$. Следовательно, T_1T_2 — средняя линия треугольника AED, причем

$$ED = EC + CB + BD = AC + CB + AB = 2p$$

(p — полупериметр треугольника ABC), то есть $T_1T_2 = p$, что доказывает утверждение задачи (поскольку длина этого отрезка не зависит от выбора вершины треугольника).

Задача 3 (шесть равных одноименных отрезков). Равными одноименными отрезками будут шесть отрезков, каждый из которых соединяет вершину треугольника и точку касания вневписанной окружности с продолжением одной из двух сторон треугольника, выходящих из этой вершины. Доказать.

Доказательство.

Пусть T, T_1, T_2 — точки касания вневписанной окружности со стороной BC и с продолжением сторон AC и AB, соответственно (рис. 225). Пусть

$$x = CT_1 = CT, \quad y = BT_2 = BT.$$

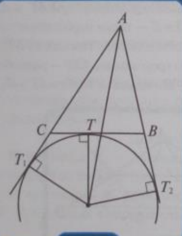

Рис. 225

Тогда

$$AT_1 = b + x, \quad AT_2 = c + y$$

($b = AC, c = AB$), откуда

$$AT_1 + AT_2 =$$
$$= b + x + c + y =$$
$$= b + c + a = 2p$$

($a = BC$, p — полупериметр).

Но ведь

$$AT_1 = AT_2,$$

откуда

$$AT_1 = AT_2 = p,$$

что доказывает утверждение задачи.

Окружность Эйлера дает возможность находить новые тройки равных одноименных отрезков. Например, равными одноименными отрезками будут:

- три отрезка, соединяющие середины сторон и соответственные точки Эйлера: $M_1E_1 = M_2E_2 = M_3E_3$;
- три отрезка, соединяющие середину отрезка OH (центр окружности Эйлера) и основания высот: $EH_1 = EH_2 = EH_3$ (O — центр описанной окружности треугольника, H — ортоцентр треугольника);
- три отрезка, соединяющие середину отрезка OH и середины сторон: $EM_1 = EM_2 = EM_3$;
- три отрезка, соединяющие центр окружности Эйлера и точки Эйлера: $EE_1 = EE_2 = EE_3$.

Задача 4. Пусть X — некоторая точка в плоскости треугольника ABC. Точки A_1, B_1, C_1 — проекции точки X на соответственные высоты треугольника ABC. Доказать, что существует единственная точка X, такая что одноименные отрезки AA_1, BB_1, CC_1 равны.

Доказательство.

Проведем через вершины треугольника ABC прямые, которые будут параллельны противоположным сторонам; обозначим A_0, B_0, C_0 — точки попарного пересечения этих прямых (рис. 226).

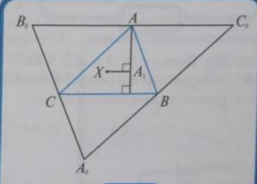

Рис. 226

Тогда длина отрезка AA_1 равна расстоянию от точки X до стороны B_0C_0 треугольника $A_0B_0C_0$. Рассуждая аналогично, получим, что равенство $AA_1 = BB_1 = CC_1$ возможно тогда, и только тогда, когда точка X равноудалена от сторон треугольника $A_0B_0C_0$, то есть является его инцентром. Поскольку инцентр треугольника единственный, то существует единственная точка X, удовлетворяющая условию.

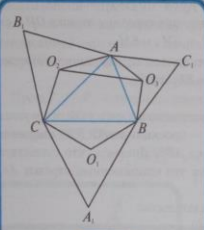

Рис. 227

Задача 5 (задача Наполеона). На сторонах треугольника вне его построены равносторонние треугольники. Доказать, что одноименные отрезки, соединяющие центры этих равносторонних треугольников, равны.

Доказательство.

Пусть точки O_1, O_2, O_3 — центры равносторонних треугольников BCA_1, ACB_1, ABC_1, которые построены на сторонах треугольника ABC (рис. 227). Пусть $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ — стороны треугольника ABC. По формуле длины радиуса описанной вокруг равностороннего треугольника окружности имеем:

$$O_2A = \frac{b}{\sqrt{3}}, \quad O_3A = \frac{c}{\sqrt{3}}.$$

Поскольку

$$\angle O_2AO_3 = \angle O_2AC + \angle A + \angle O_3AB = \angle A + 60^\circ,$$

то из треугольника AO_2O_3 по теореме косинусов:

$$O_2O_3^2 = \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{3} - 2\frac{bc}{3}\cos(A + 60^\circ) =$$
$$= \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{3} - \frac{bc}{3}\cos A + \frac{bc\sqrt{3}}{3}\sin A =$$
$$= \frac{1}{6}\left(b^2 + c^2 + 2\sqrt{3}bc\sin A + b^2 + c^2 - 2bc\cos A\right) =$$
$$= \frac{1}{6}\left(b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}S + a^2\right),$$

где S — площадь треугольника ABC. Аналогично,

$$O_1O_2^2 = \frac{1}{6}\left(a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}S\right),$$
$$O_1O_3^2 = \frac{1}{6}\left(a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}S\right).$$

Следовательно, $O_1O_2 = O_2O_3 = O_1O_3$, что и требовалось доказать.

Задача 6. На сторонах треугольника «внутрь» его построены равносторонние треугольники. Доказать, что три одноименных отрезка, каждый из которых соединяет вершину данного треугольника и противоположную вершину соответственного равностороннего треугольника, равны.

Доказательство.

Пусть ABC_1 — равносторонний треугольник, построенный на стороне AB треугольника ABC (рис. 228).

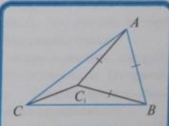

Рис. 228

Предположим, что

$$\angle B \geq 60^\circ.$$

Тогда

$$\angle CBC_1 = \angle B - 60^\circ,$$

и из треугольника CBC_1 имеем:

$$CC_1^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\angle B - 60°) =$$
$$= a^2 + c^2 - ac\cos B - ac\sqrt{3}\sin B =$$
$$= a^2 + c^2 - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2} - 2S\sqrt{3} =$$
$$= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} - 2S\sqrt{3}.$$

Если же $\angle B < 60°$, то $\angle CBC_1 = 60° - \angle B$ и поэтому

$$\cos\angle CBC_1 = \cos(\angle B - 60°).$$

Следовательно, длины данных в условии одноименных отрезков одинаковы.

Полезность вспомогательных построений

При решении геометрических задач существует проверенный, так сказать, стандартный набор вспомогательных построений: это проведение «соединительных» прямых, параллельных или перпендикулярных прямых, вспомогательных окружностей наконец. Большинство из них обычны «за давностью лет», стали «классикой жанра», как, например, проведение через вершину треугольника прямой, параллельной его стороне (одно из доказательств теоремы Чевы) или построение гомотетичного треугольника при доказательстве единственности ортоцентра треугольника (способ, создание которого приписывается К. Гауссу). Если продолжить перечисление классических вспомогательных построений, то нужно вспомнить и вспомогательную окружность, построение которой стало уже нормой при решении олимпиадных задач.

К сожалению, сегодня вряд ли можно выяснить, кто вообще первый сделал вспомогательное построение. Интересно было бы узнать, что за этим стояло — неординарность мышления, талант, очень развитое чувство прекрасного?

А как относиться к ситуации, когда ученик впервые для себя, при доказательстве метрического соотношения «медиана, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы», строит

вспомогательную окружность? Как к случайности? Как к большому опыту? Как к редкосной удаче? Наверное, все это вместе! И прежде всего — игра ума. И закрывать глаза на это не следует. Это можно, да и нужно, называть геометрической остротой ума, геометрической сообразительностью. И, конечно, желательно не прекращать поражаться этому.

Вот почему наряду с аналитическим решением задач (к которому, безусловно, существует заслуженное уважение) существуют и будут существовать так называемые «классические» способы. Они будут приносить эстетическую радость, даже наслаждение. А вопрос: «Для чего?» — будет бесплодным, как в искусстве! Просто в нашем случае это будет **искусство геометрии.**

Предлагаем читателю рассмотреть несколько произведений такого искусства.

Задача 1 (задача Архимеда). В окружность вписан треугольник ABC. Пусть точка T — середина дуги BAC, а точка N — проекция точки T на сторону AC. Доказать, что $CN = AN + AB$.

Доказательство.

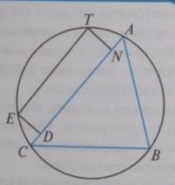

Рис. 229

Проведем хорду TE, которая параллельна AC, и опустим из точки E перпендикуляр ED на AC (рис. 229), получим прямоугольник $ETND$. Так как $\cup EC = \cup TA$ и, по условию, $\cup CT = \cup TB$, то $\cup ET = \cup AB$, откуда $ET = AB$. Но ведь $ET = DN$, а $CD = AN$. Поэтому

$$AN + AB = CD + ET =$$
$$= CD + DN = CN,$$

что и требовалось доказать.

Задача 2. Без применения тригонометрии найти площадь прямоугольного треугольника, если известно, что гипотенуза равна c, а острый угол равен $15°$.

Решение.

Пусть в прямоугольном треугольнике ACB $\angle C = 90°$, $AB = c$, $\angle A = 15°$ (рис. 230). Отобразим этот треугольник симметрично относительно катета AC. Получим равнобедренный треугольник ABB_1, боковые стороны которого равны c, а угол при вершине — $30°$. Проведем его высоту BH. В прямоугольном треугольнике AHB катет BH лежит против угла в $30°$, а следовательно

$$BH = \frac{1}{2}AB = \frac{c}{2}.$$

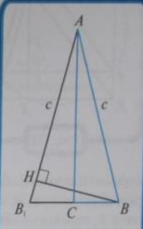

Рис. 230

Поэтому

$$S_{ACB} = \frac{1}{2}S_{ABB_1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot BH\cdot AB_1 = \frac{c^2}{8}.$$

Ответ: $\frac{c^2}{8}$.

Задача 3. В окружность вписан прямоугольник $ABCD$. На дуге AD взята произвольная точка X. Точки X_1, X_2, X_3, X_4 — проекции точки X на прямые AD, AB, CD, BC, соответственно. Доказать, что точка X_1 является ортоцентром треугольника $X_2X_3X_4$.

Доказательство.

Мы уже часто встречались с теоремой про точку, которая симметрична ортоцентру треугольника относительно одной из сторон. Поможет она и в этой задаче. Но вначале дополнительное построение даст нам «выход» на эту теорему.

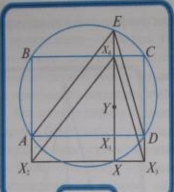

Рис. 231

А именно, продолжим отрезок X_1X_4 до пересечения с данной окружностью в некоторой точке E (рис. 231). Поскольку $XE \| DC$, то

$$XX_1 = EX_4.$$

Отсюда

$$DX_3 = XX_1 = EX_4,$$

и четырехугольник EX_4X_3D — параллелограмм. Аналогично показывается, что четырехугольник EX_4X_2A — параллелограмм. Следовательно, треугольник AED является образом треугольника $X_2X_3X_4$ при параллельном переносе. При этом точка X_1 перейдет в некоторую точку Y, такую что $XX_1 = X_1Y$. Но ведь EX_1 — высота треугольника AED. Поэтому, по упомянутой выше теореме, точка Y — ортоцентр треугольника AED, а следовательно, точка X_1 — ортоцентр треугольника $X_2X_3X_4$.

Задача 4. В треугольнике ABC угол A равен 120°. Пусть AL_1, BL_2, CL_3 — биссектрисы этого треугольника. Доказать, что

$$\angle L_2L_1L_3 = 90°.$$

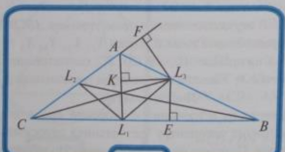

Рис. 232

Доказательство (способ, предложенный И. Ф. Шарыгиным).

Дополнительное построение: из точки L_3 опустим перпендикуляры L_3E, L_3F, L_3K на прямые BC, AC, AL_1, соответственно (рис. 232). Очевидно, что

$$L_3E = L_3F. \qquad (1)$$

Поскольку, по условию, $\angle CAB = 120°$, то

$$\angle CAL_1 = \angle BAL_1 = \angle BAF = 60°,$$

то есть AB — биссектриса угла L_1AF. Следовательно,

$$L_3F = L_3K. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) имеем, что

$$L_3E = L_3K,$$

то есть L_1L_3 — биссектриса угла AL_1B. Аналогично, L_1L_2 — биссектриса угла AL_1C. Поскольку биссектрисы смежных углов перпендикулярны, то $\angle L_2L_1L_3 = 90°$.

Задача 5 (Киевская городская олимпиада, 1997). В треугольнике ABC проведена прямая BD (точка D принадлежит стороне AC) под углом $\angle A + \angle C$ к стороне BC. Пусть AL — биссектриса угла A. Доказать, что DL — биссектриса угла CDB.

Доказательство.

Существует несколько способов решения этой задачи, причем достаточно простых. Мне бы хотелось показать способ, аналогичный решению задачи о биссектрисах ортоцентрического треугольника (!), а также то, как эта аналогия приведет к дополнительным построениям.

Поскольку внешний угол ABN треугольника ABC равен $180° - \angle B$ (рис. 233), а, по условию,

$$\angle CBD = \angle A + \angle C = 180° - \angle B,$$

то

$$\angle ABN = \angle CBD. \qquad (1)$$

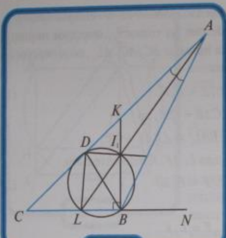

Рис. 233

И тут вступает в действие аналогия: проведем через точку B прямую, которая перпендикулярна BC.

Пусть K — точка пересечения этой прямой с AC. Поскольку

$$\angle CBK = \angle NBK = 90°,$$

то из (1) получим, что

$$\angle KBD = \angle KBA.$$

Итак, если I_1 — точка пересечения прямых AL и BK, то I_1 — точка пересечения биссектрис треугольника ABD. Поэтому DI_1 — биссектриса угла BDA. Этот угол — внешний угол треугольника CDB, поэтому

$$\angle I_1DB = \frac{1}{2}\angle ADB = \frac{1}{2}(\angle C + \angle CBD) = \frac{\angle A}{2} + \angle C. \qquad (2)$$

С другой стороны, из треугольника ALB:

$$\angle ALB = 180° - \angle LAB - \angle LBA =$$

$$= 180° - \frac{\angle A}{2} - (90° + \angle KBA) = 90° - \frac{\angle A}{2} - (90° - \angle ABN) =$$

$$= \frac{\angle A}{2} + \angle C.$$

Следовательно, из (2) следует, что четырехугольник LDI_1B вписан в окружность. Тогда, поскольку $\angle CBK = 90°$, то LI_1 — диаметр этой окружности, а поэтому $\angle LDI_1 = 90°$.

Отсюда, учитывая, что DI_1 — биссектриса угла BDA, получим, что DL — биссектриса угла CDB.

Со следующей задачей также связана небольшая история. Задачу я увидел в книге, которую очень уважаю, — З. А. Скопец, В. А. Жаров «Задачи и теоремы планиметрии» (Учпедгиз, 1962, задача 394, с. 58).

Задача 6. Две окружности касаются внешним образом в точке K. Общая внешняя касательная этих окружностей касается их в точках T_1 и T_2. Доказать, что расстояния от хорд KT_1 и KT_2 до центров соответственных окружностей относятся как кубы длин этих хорд.

Доказательство.

Условие задачи заинтересовало меня: не часто увидишь в планиметрической задаче отношение **кубов** линейных элементов. Но решение задачи, которое предложили авторы книги, разочаровало: ссылки на предыдущую задачу, теорема Стюарта, подобие треугольников — все это делало задачу громоздкой и эстетика условия терялась. Применим дополнительное построение: проведем через точку K внутреннюю касательную к окружностям (рис. 234). Пусть она пересечет отрезок T_1T_2 в некоторой точке A. Пусть O_1 и O_2 — центры данных окружностей, тогда AO_1 — биссектриса угла T_1AK, а AO_2 — биссектриса угла T_2AK. Следовательно,

$$\angle O_1AO_2 = 90°.$$

Пусть E — точка пересечения отрезков AO_1 и KT_1, F — точка пересечения отрезков AO_2 и KT_2.

Ясно, что

$$AO_1 \perp T_1K,$$

то есть длина отрезка O_1E — это расстояние

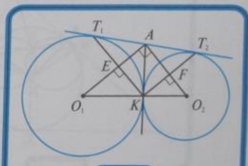

Рис. 234

от O_1 до хорды KT_1. Аналогично, длина отрезка O_2F — это расстояние от O_2 до хорды KT_2. Кроме этого, точки E и F — середины хорд KT_1 и KT_2, то есть

$$\frac{KT_1}{KT_2}=\frac{2KE}{2KF}=\frac{KE}{KF}.$$

Пусть $KE=m$, $KF=n$, тогда $AE=n$, $AF=m$. Из прямоугольных треугольников AKO_1 и AKO_2 имеем:

$$m^2=O_1E\cdot n,\quad n^2=O_2F\cdot m.$$

Отсюда

$$\frac{O_1E}{O_2F}=\frac{m^2}{n}:\frac{n^2}{m}=\frac{m^3}{n^3}=\frac{KE^3}{KF^3}=\frac{KT_1^3}{KT_2^3},$$

что и требовалось доказать.

Задача 7. В треугольнике ABC точка M_1 — середина стороны BC, точка I — центр вписанной окружности, которая касается сторон BC, AC, AB в точках K_1, K_2, K_3, соответственно. Доказать, что отрезки AM_1, IK_1, K_2K_3 пересекаются в одной точке.

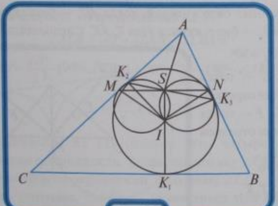

Рис. 235

Доказательство.

Пусть прямая IK_1 пересекает отрезок K_2K_3 в некоторой точке S (рис. 235). Если отрезок K_2K_3 параллелен стороне BC, то треугольник ABC — равнобедренный, и утверждение доказано. В противном случае через точку S проведем прямую, параллельную стороне BC; пусть она пересекает стороны AC и AB в точках M и N, соответственно. Для того, чтобы доказать, что точка S лежит на медиане AM_1, достаточно показать, что

$$MS=SN.$$

Поскольку $IK_1\perp BC$, то $\angle ISM=90°$; но ведь $\angle IK_2M=90°$, поэтому точки S, I, M, K_2 принадлежат одной окружности. Аналогично, точки S, I, N, K_3 принадлежат одной окружности. Тогда

$$\angle SIM=180°-\angle SK_2M=\angle AK_2K_3=\angle AK_3K_2=\angle SIN,$$

откуда IS — высота и биссектриса треугольника IMN, а следовательно, и медиана. Поэтому $MS=SN$, что доказывает утверждение задачи.

Вторая молодость разностного треугольника

Треугольник, длины сторон которого находятся в некоторой взаимной зависимости, всегда обращал на себя внимание геометров. Вспомните хотя бы Пифагоров треугольник со сторонами 3, 4, 5. Но среди таких треугольников есть несомненный лидер — **треугольник, стороны которого образуют арифметическую прогрессию**. С таким треугольником мы уже встречались на страницах этой книги (см. с. 66). Он достаточно полно исследован в литературе (см. примечание на с. 18). В сборнике «У світі математики» (№ 5 за 1974 год) этот треугольник был назван **разностным**. Именно так мы и будем называть его в дальнейшем.

Свойства разностного треугольника разнообразны и интересны. Они не только удовлетворяют самый изысканный вкус, но, что наиболее удивляет, **не заканчиваются**. Следовательно, появляется такое ощущение, что разностный треугольник ожидает «вторая молодость». Напомним читателю некоторые наиболее интересные свойства этого треугольника, а главное, познакомим с новыми свойствами и задачами.

Далее в этом разделе: a, b, c — стороны разностного треугольника ABC:

$$b>a>c,\quad a=\frac{b+c}{2},$$

точка L_1 — основание биссектрисы угла A, W_1 — точка пересечения продолжения биссектрисы AL_1 с описанной вокруг треугольника ABC окружностью, точка I — инцентр треугольника ABC.

Основная теорема о разностных треугольниках такая:

Теорема. Пусть треугольник ABC — разностный, тогда:

- $AI=IW_1$;
- $IL_1=L_1W_1$;
- $MI\parallel BC$ (M — центроид);
- $r=\dfrac{h_a}{3}$

(r — радиус вписанной в треугольник ABC окружности; h_a — высота, опущенная из вершины A).

Задача 1. Пусть точки M_2 и M_3 — середины сторон AC и AB треугольника ABC, точка O — центр описанной окружности. Доказать, что если треугольник ABC — разностный, то точки A, M_2, M_3, O, I принадлежат одной окружности.

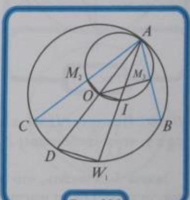

Рис. 236

Доказательство.

Пусть треугольник ABC — разностный (рис. 236). Тогда, по основной теореме,

$$AI=IW_1.$$

Пусть AD — диаметр описанной окружности. Тогда (поскольку $AO = OD$) отрезок OI — средняя линия в треугольнике AW_1D, а тогда $OI \parallel DW_1$. Но $\angle AW_1D = 90°$, поэтому

$$\angle AIO = 90°.$$

С другой стороны,

$$\angle AM_2O = \angle AM_3O = 90°.$$

Следовательно, точки A, M_2, M_3, O, I принадлежат окружности с диаметром AO.

Задача 2. Доказать, что если треугольник ABC — разностный, то прямая MI касается окружности, описанной вокруг треугольника AM_2M_3.

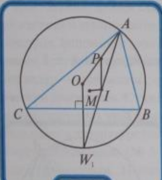

Рис. 237

Доказательство.

Из предыдущей задачи следует, что точка I лежит на окружности γ, описанной вокруг треугольника AM_2M_3, причем центр P этой окружности — середина отрезка AO (рис. 237). Поскольку, по основной теореме, $AI = IW_1$, то отрезок PI — средняя линия треугольника AOW_1, а следовательно, $PI \perp BC$ (поскольку $OW_1 \perp BC$). С другой стороны, по основной теореме, $MI \parallel BC$. Поэтому $PI \perp MI$, а поскольку $I \in \gamma$, то MI — касательная к γ, что и требовалось доказать.

Задача 3. Доказать, что если треугольник ABC — разностный, то точка I будет центром описанной вокруг треугольника $L_1M_2M_3$ окружности.

Доказательство.

Пусть треугольник ABC — разностный (рис. 238). Докажем, что

$$IL_1 = IM_2 = IM_3. \qquad (1)$$

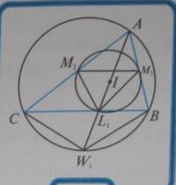

Рис. 238

Действительно, по основной теореме,

$$AI = IW_1.$$

Тогда IM_2 и IM_3 — средние линии в треугольниках AW_1C и AW_1B, то есть

$$IM_2 = \frac{1}{2}W_1C, \quad IM_3 = \frac{1}{2}W_1B.$$

А поскольку $W_1C = W_1B = W_1I$ («теорема трилистника»), то

$$IM_2 = IM_3 = \frac{1}{2}W_1I. \qquad (2)$$

С другой стороны, по основной теореме, $IL_1 = L_1W_1$, откуда

$$IL_1 = \frac{1}{2}W_1I. \qquad (3)$$

Из (2) и (3) получим (1), а следовательно, утверждение доказано.

Задача 4. Пусть треугольник ABC — разностный. Точка T — проекция точки W_1 на сторону AC. Доказать, что

$$AT = BC.$$

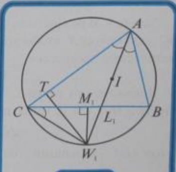

Рис. 239

Доказательство.

Пусть точка M_1 — середина стороны BC (рис. 239). Прямоугольные треугольники ATW_1 и CM_1W_1 подобны, поэтому:

$$\frac{AW_1}{CW_1} = \frac{AT}{CM_1}.$$

Но по основной теореме и «теореме трилистника»:

$$AW_1 = 2IW_1 = 2CW_1.$$

Отсюда

$$AT = 2CM_1 = BC,$$

что и требовалось доказать.

Задача 5. Доказать, что если треугольник ABC — разностный, то

$$CM_2 = CL_1.$$

Доказательство.

Пусть $CL_1 = x$ (см. рис. 239). Тогда

$$\frac{x}{a - x} = \frac{b}{c},$$

откуда

$$xc = ab - xb, \quad x(b + c) = ab.$$

Поскольку треугольник ABC — разностный, то $b + c = 2a$, откуда $2x = b$, то есть $x = CM_2$, что и требовалось доказать.

Задача 6. В разностном треугольнике ABC найти на стороне BC такую точку X, чтобы углы A, M_2XC, B образовывали арифметическую прогрессию.

Решение.

Докажем, что точка L_1 удовлетворяет условию (рис. 240). Пусть $\angle M_2L_1C = \alpha$, тогда, по предыдущей задаче,

$$\angle CM_2L_1 = \alpha.$$

Угол AL_1C — внешний угол треугольника AL_1B, откуда

$$\angle AL_1C = \frac{\angle A}{2} + \angle B.$$

Угол CM_2L_1 — внешний угол треугольника AM_2L_1, откуда

$$\alpha = \frac{\angle A}{2} + \angle AL_1M_2 =$$

$$= \frac{\angle A}{2} + \angle AL_1C - \angle M_2L_1C =$$

$$= \angle A + \angle B - \alpha.$$

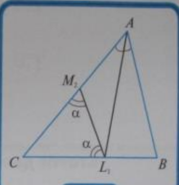

Рис. 240

Следовательно,

$$\alpha = \frac{\angle A + \angle B}{2},$$

что и требовалось доказать.

Задача 7 («Задачник „Кванта"»). В «египетском» треугольнике ABC ($AC = 3$, $BC = 4$, $AB = 5$) найти угол AIM_3.

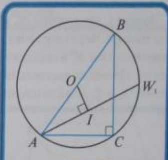

Рис. 241

Доказательство.

Поскольку этот треугольник — разностный, то (см. задачу 1) $\angle AIO = 90°$ (рис. 241). Но ведь $O \equiv M_3$, откуда

$$\angle AIM_3 = 90°.$$

Ответ: 90°.

ВТОРОЕ ДЫХАНИЕ ЗАДАЧИ

Начиналась эта задача, наверное, так...

Задача 1. На стороне BC треугольника ABC взята произвольная точка X. Через эту точку проведены прямые, параллельные сторонам AB и AC и пересекающие их в точках E и D, соответственно. Площади треугольников XEB и XDC равны, соответственно, S_1 и S_2. Найти площадь треугольника ABC.

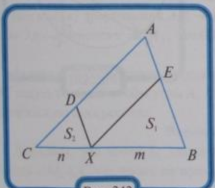

Рис. 242

Решение.

Пусть (рис. 242)

$$XB = m, \quad XC = n.$$

Поскольку треугольники EXB, DCX и ACB подобны, то

$$\frac{S_1}{S} = \frac{m^2}{a^2}, \quad \frac{S_2}{S} = \frac{n^2}{a^2}$$

(S — площадь треугольника ABC, $a = BC$). Отсюда

$$\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}} + \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}} = \frac{m+n}{a} = 1,$$

$$\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} = \sqrt{S},$$

следовательно,

$$S = \left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}\right)^2.$$

Ответ: $\left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}\right)^2$.

Потом точку X «перевели» внутрь треугольника и появилась новая задача.

Задача 2. Через точку X, которая лежит внутри треугольника ABC, проведены прямые, параллельные сторонам. Эти прямые образуют со сторонами три треугольника, площади которых S_1, S_2, S_3. Найти площадь S треугольника ABC.

Решение.

Решение осталось почти таким же: эти прямые разбивают треугольник ABC на три треугольника и три параллелограмма (рис. 243). Пусть сторона BC делится на части, равные k, m, n (см. рисунок), то есть

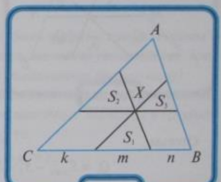

Рис. 243

$$k + m + n = a,$$

тогда

$$\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}} = \frac{m}{a}, \quad \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}} = \frac{k}{a}, \quad \frac{\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}} = \frac{n}{a},$$

откуда

$$\sqrt{S} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}.$$

Ответ: $\left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}\right)^2$.

19 — 4-1664

Эта конфигурация не осталась незамеченной, и сразу же появилась серия задач.

Задача 3. Через точку, лежащую внутри треугольника ABC, проведены три прямые, которые параллельны сторонам треугольника и разбивают его на три треугольника и три параллелограмма. Доказать, что произведение площадей параллелограммов в восемь раз больше произведения площадей треугольников.

Доказательство.

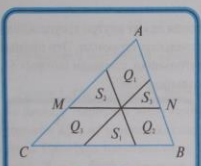

Рис. 244

Обозначим площади параллелограммов — Q_1, Q_2, Q_3, а треугольников (как и раньше) — S_1, S_2, S_3 (рис. 244). Пусть прямая, параллельная BC, пересекает стороны AC и AB в точках M и N, соответственно. Рассмотрим треугольник AMN. По задаче 1 имеем:

$$S_{AMN} = \left(\sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}\right)^2.$$

Отсюда

$$Q_1 = S_{AMN} - S_2 - S_3 = 2\sqrt{S_2 S_3}.$$

Аналогично,

$$Q_2 = 2\sqrt{S_1 S_3}, \quad Q_3 = 2\sqrt{S_1 S_2}.$$

Следовательно,

$$Q_1 Q_2 Q_3 = 8 S_1 S_2 S_3,$$

что и требовалось доказать.

Будем в дальнейшем сохранять обозначения и расположение треугольников в этой конфигурации.

Задача 4. Доказать, что $h_1 + h_2 + h_3 = h_a$, где h_a — высота треугольника ABC, проведенная из вершины A, а h_i — высота треугольника с площадью S_i, причем $h_i \| h_a$ $(i = 1, 2, 3)$.

Доказательство.

В обозначениях задачи 2 имеем:

$$\frac{h_1}{h_a} = \frac{m}{a}, \quad \frac{h_2}{h_a} = \frac{k}{a}, \quad \frac{h_3}{h_a} = \frac{n}{a}.$$

Поскольку $k + m + n = a$, то

$$\frac{h_1 + h_2 + h_3}{h_a} = 1,$$

что и требовалось доказать.

Очевидно, тот факт, что были выбраны именно высоты — не принципиален. Точнее, справедливо такое утверждение (доказательство которого — целиком аналогично предыдущему):

Если e — некоторый линейный элемент в треугольнике ABC, а e_1, e_2, e_3 — соответственные линейные элементы в треугольниках с площадями S_1, S_2, S_3, то

$$e = e_1 + e_2 + e_3.$$

Но поиск метрических соотношений на этом не прекратился!

Пусть данные прямые образуют в пересечении со сторонами треугольника ABC отрезки MN, EF, LK (см. рис. 245). Положим $MN = a_1$, $EF = b_1$, $LK = c_1$, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$.

Задача 5. Доказать, что

$$\frac{a_1}{a} + \frac{b_1}{b} + \frac{c_1}{c} = 2.$$

19*

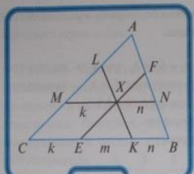

Рис. 245

Доказательство.

Пусть (рис. 245)

$$CE = k, \quad EK = m, \quad BK = n.$$

Тогда

$$MX = k, \quad NX = n,$$

то есть $a_1 = k + n$.

Из подобия треугольников BEF и BCA имеем:

$$\frac{b_1}{b} = \frac{m+n}{a}.$$

Аналогично,

$$\frac{c_1}{c} = \frac{k+m}{a}.$$

Следовательно,

$$\frac{a_1}{a} + \frac{b_1}{b} + \frac{c_1}{c} = \frac{k+n}{a} + \frac{m+n}{a} + \frac{k+m}{a} = \frac{2(k+m+n)}{a} = 2.$$

Утверждение доказано.

Но это еще не все!

Задача 6. Обозначим отрезки, на которые разбиты стороны треугольника ABC данными прямыми, так, как показано на рис. 246. Доказать, что $a_1 b_1 c_1 = a_2 b_2 c_2 = a_3 b_3 c_3$.

Доказательство.

Треугольники XML, KEX и NXF подобны, поэтому

$$\frac{XE}{ML} = \frac{EK}{XM}, \quad \frac{FN}{XL} = \frac{XN}{XM},$$

то есть

$$\frac{b_3}{b_2} = \frac{a_2}{a_1}, \quad \frac{c_2}{c_3} = \frac{a_3}{a_1}.$$

Следовательно,

$$\frac{a_3 c_3}{c_2} = a_1 = \frac{a_2 b_2}{b_3},$$

откуда

$$a_2 b_2 c_2 = a_3 b_3 c_3.$$

Аналогично показывается, что

$$a_1 b_1 c_1 = a_3 b_3 c_3.$$

Утверждение доказано.

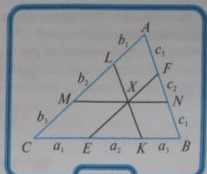

Рис. 246

— *А теперь все?*
— *Нет-нет!*

Задача 7. Пусть точка X является центроидом треугольника ABC. Доказать, что

1) каждая сторона треугольника разбивается данными прямыми на три равные части;

2) отрезки прямых, лежащие внутри треугольника, точкой X делятся пополам;

3) треугольники, образованные прямыми и сторонами, равны между собой.

Доказательство.

Поскольку, по условию, отрезок AX лежит на медиане к стороне BC, а $MN \| BC$ (рис. 247), то $MX = XN$, то есть

$$a_1 = a_3. \qquad (1)$$

Следовательно, второе утверждение доказано.

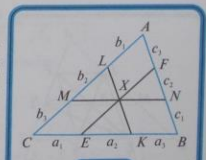

Рис. 247

Но точка X — не просто точка на медиане, а центроид треугольника, поэтому

$$\frac{CE}{BE} = \frac{1}{2},$$

то есть

$$2a_1 = a_2 + a_3. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) имеем, что

$$a_1 = a_2 = a_3.$$

Аналогично показывается, что

$$b_1 = b_2 = b_3, \quad c_1 = c_2 = c_3.$$

Следовательно, и первое утверждение доказано. Равенство треугольников XEK, LMX и FXN по трем сторонами следует из первых двух утверждений.

Кажется, что это простой и неинтересный частный случай, но внезапно...

Задача 8. Пусть точка X является центроидом треугольника ABC. Доказать, что тогда она является центроидом треугольников ELN и MFK и что эти треугольники равны между собой.

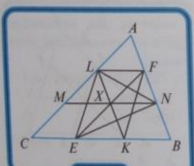

Рис. 248

Доказательство.

По предыдущей задаче,

$$AF = \frac{1}{3}AB, \quad AL = \frac{1}{3}AC$$

(рис. 248). Поэтому $LF \| BC$, откуда следует, что четырехугольник $FLXN$ — параллелограмм ($XN \| BC$, $XL \| FN$). Тогда отрезок XF, а следовательно, и прямая EX, пройдут через середину отрезка LN,

то есть точка X принадлежит медиане треугольника ELN, которая проведена к стороне LN. Аналогично доказывается, что она принадлежит двум другим медианам этого треугольника. Следовательно, точка X является центроидом треугольника ELN. Для другого треугольника доказательство аналогично. Первое утверждение доказано.

Далее, четырехугольник $LFKE$ — параллелограмм, так как по предыдущей задаче

$$LF = BK = KE$$

и $LF \| EK$. Следовательно,

$$LE = FK.$$

Рассуждая аналогично, получим, что треугольники ELN и MFK равны по трем сторонами, что и требовалось доказать.

Но где же второе дыхание задачи? Вот оно — ***начальная конфигурация рождает неравенства!***
И какие!!!

Задача 9. Доказать (в обозначениях задачи 2), что

$$1)\ S_1 + S_2 + S_3 \ge \frac{1}{3}S;$$

$$2)\ \frac{1}{\sqrt{S_1}} + \frac{1}{\sqrt{S_2}} + \frac{1}{\sqrt{S_3}} \ge \frac{9}{\sqrt{S}}.$$

Доказательство.

Из задачи 2 имеем:

$$S = \left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}\right)^2 =$$
$$= S_1 + S_2 + S_3 + 2\sqrt{S_1 S_2} + 2\sqrt{S_1 S_3} + 2\sqrt{S_2 S_3} \le$$
$$\le S_1 + S_2 + S_3 + (S_1 + S_2) + (S_1 + S_3) + (S_2 + S_3) =$$
$$= 3(S_1 + S_2 + S_3),$$

откуда следует первое неравенство. По неравенству Коши:

$$\left(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{S_1}}+\frac{1}{\sqrt{S_2}}+\frac{1}{\sqrt{S_3}}\right)\geq 9,$$

но ведь по задаче 2

$$\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}=\sqrt{S},$$

откуда получаем второе неравенство.

Задача 10. Доказать (в обозначениях задачи 3), что

$$\frac{S_1}{Q_1}+\frac{S_2}{Q_2}+\frac{S_3}{Q_3}\geq\frac{3}{2}.$$

Доказательство.

По неравенству Коши:

$$\frac{S_1}{Q_1}+\frac{S_2}{Q_2}+\frac{S_3}{Q_3}\geq 3\sqrt[3]{\frac{S_1S_2S_3}{Q_1Q_2Q_3}}.$$

Из задачи 3 имеем:

$$Q_1Q_2Q_3=8S_1S_2S_3.$$

Следовательно,

$$\frac{S_1}{Q_1}+\frac{S_2}{Q_2}+\frac{S_3}{Q_3}\geq\frac{3}{2},$$

что и требовалось доказать.

Задача 11. Доказать, что

$$\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}\geq\frac{27}{S}.$$

Доказательство.

Воспользуемся неравенством:

$$3\left(x^2+y^2+z^2\right)\geq\left(x+y+z\right)^2.$$

Тогда из второго неравенства задачи 9 имеем:

$$\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}\geq\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{S_1}}+\frac{1}{\sqrt{S_2}}+\frac{1}{\sqrt{S_3}}\right)^2\geq\frac{1}{3}\cdot\frac{81}{S}=\frac{27}{S},$$

что и требовалось доказать.

Отметим, что все эти неравенства превращаются в равенства, если точка X является центроидом треугольника ABC.

А теперь усложним конфигурацию!

Пусть через произвольную точку X внутри треугольника ABC проведены три прямые, каждая из которых пересекает две стороны треугольника, причем каждую сторону пересекают две прямые.

Эти прямые в пересечении со сторонами образуют три треугольника, площади которых обозначим S_1, S_2, S_3 (рис. 249). Пусть S — площадь треугольника ABC.

Задача 12. Доказать, что

$$\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}\geq\frac{18}{S}.$$

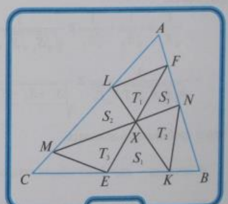

Рис. 249

Доказательство.

Соединим концы отрезков MN, EF, LK, как показано на рис. 249.

Обозначим площади полученных треугольников — T_1, T_2, T_3. Докажем, что

$$S_1S_2S_3=T_1T_2T_3. \quad (*)$$

Действительно,

$$\frac{S_1}{T_1}=\frac{XE\cdot XK}{XL\cdot XF},\quad \frac{S_2}{T_2}=\frac{XM\cdot XL}{XN\cdot XK},\quad \frac{S_3}{T_3}=\frac{XN\cdot XF}{XM\cdot XE}.$$

Перемножив эти равенства, получим (*). Отсюда, по неравенству Коши:

$$\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}\geq\frac{3}{\sqrt[3]{S_1S_2S_3}}=\frac{3}{\sqrt[6]{S_1S_2S_3T_1T_2T_3}}\geq$$

$$\geq\frac{3\cdot 6}{S_1+S_2+S_3+T_1+T_2+T_3}\geq\frac{18}{S},$$

поскольку $S_1+S_2+S_3+T_1+T_2+T_3\leq S$. Неравенство доказано.

Задача 13. Доказать, что

$$\frac{1}{\sqrt{S_1}}+\frac{1}{\sqrt{S_2}}+\frac{1}{\sqrt{S_3}}\geq\frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{S}}.$$

Доказательство.

По неравенству Коши и формуле (*) (см. предыдущую задачу), имеем:

$$\frac{1}{\sqrt{S_1}}+\frac{1}{\sqrt{S_2}}+\frac{1}{\sqrt{S_3}}\geq\frac{3}{\sqrt[3]{\sqrt{S_1}\sqrt{S_2}\sqrt{S_3}}}=\frac{3}{\sqrt[6]{S_1S_2S_3}}=$$

$$=\frac{3}{\sqrt{\sqrt[6]{S_1S_2S_3T_1T_2T_3}}}\geq\frac{3}{\sqrt{\dfrac{S_1+S_2+S_3+T_1+T_2+T_3}{6}}}\geq\frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{S}},$$

что и требовалось доказать.

И наконец — еще более общая конфигурация:

Рассмотрим произвольную точку X внутри треугольника ABC и три произвольных треугольника, каждый из которых имеет

вершину X, а основание лежит на одной из сторон треугольника ABC (рис. 250).

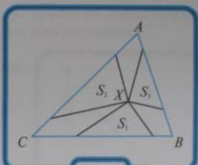

Рис. 250

Пусть площади этих треугольников — S_1, S_2, S_3, а S — площадь треугольника ABC.

Задача 14. Доказать, что

$$\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}\geq\frac{9}{S}.$$

Доказательство.

По неравенству Коши имеем:

$$\left(\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}\right)\left(S_1+S_2+S_3\right)\geq 9,$$

но $S_1+S_2+S_3\leq S$, а следовательно, неравенство доказано.

Вот теперь — все!

Ход с восклицательным знаком

Когда, играя шахматную партию, шахматист делает сильный неожиданный ход, то при анализе этой партии в ее короткой записи после такого хода ставится восклицательный знак — «(!)». Что-то похожее выходит при решении геометрической задачи, когда ход, который выбран для ее решения, настолько удачен, что очень хочется, как в шахматах, при записи задачи после такого хода поставить восклицательный знак.

Что мы можем назвать «сильным ходом» в геометрии? Таким ходом может считаться правильно подобранный метод решения или правильний выбор одного или нескольких вспомогательных элементов, или просто неожиданное применение какой-то известной теоремы, или наоборот — выход на малоизвестную теорему наконец.

Как бы там ни было, чтобы при решении задачи получить в награду восклицательный знак, ход должен быть неожиданным, разумным и эффективным. В этом у тебя, дорогой читатель, есть возможность убедиться на примерах предложенных задач, в каждой из которых ты увидишь восклицательный знак.

Задача 1. В треугольнике две высоты не меньше сторон, к которым они проведены. Найти углы треугольника.

Решение.

Рассмотрим треугольник ABC (рис. 251).

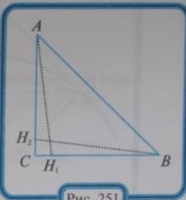

Рис. 251

Пусть $AH_1 = h_a$ и $BH_2 = h_b$ — высоты, $a = BC$, $b = AC$.

По условию,

$$h_a \ge a, \quad h_b \ge b.$$

Но из прямоугольных треугольников AH_1C и BH_2C имеем:

$$h_a \le b \text{ и } h_b \le a \quad \textbf{(!)}$$

Отсюда

$$a \le h_a \le b \le h_b \le a,$$

а следовательно,

$$a = h_a = b = h_b,$$

то есть ACB — прямоугольный равнобедренный треугольник.

Ответ: 90°, 45°, 45°.

Задача 2. Треугольник ABC — равнобедренный: $AB = AC$ и $\angle A = 80°$. Внутри треугольника взята такая точка X, что $\angle XCB = 10°$, $\angle XBC = 30°$. Найти $\angle AXB$.

Решение.

Из треугольника BXC (рис. 252) имеем, что

$$\angle BXC = 140°.$$

Поскольку

$$\angle AXB = 360° - \angle BXC - \angle AXC = 220° - \angle AXC, \tag{1}$$

то достаточно найти $\angle AXC$.

Опишем окружность вокруг треугольника BXC **(!)** Пусть точка O — центр этой окружности.

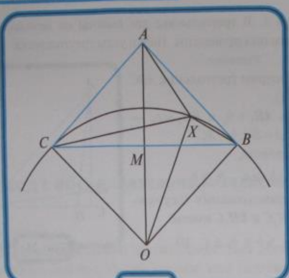

Рис. 252

Тогда

$$\angle XOC = 2\angle XBC = 60° \quad \textbf{(!)}$$

А тогда, поскольку $OC = OX$, то треугольник OCX — равносторонний, то есть

$$XC = OC. \tag{2}$$

Далее,

$$\angle XOB = 2\angle XCB = 20° \quad \textbf{(!)}$$

Тогда

$$\angle BOC = \angle BOX + \angle COX = 80°,$$

а поскольку треугольник BOC — равнобедренный, то

$$\angle COM = \frac{1}{2}\angle BOC = 40°$$

(M — середина BC). С другой стороны,

$$\angle CAM = \frac{1}{2}\angle BAC = 40°.$$

Следовательно, треугольник ACO — равнобедренный, откуда

$$AC = OC. \tag{3}$$

Из (2) и (3) имеем, что

$$AC = XC,$$

то есть треугольник ACX — равнобедренный. Но ведь

$$\angle ACX = \angle ACB - \angle XCB = 50° - 10° = 40°.$$

Поэтому

$$\angle AXC = \frac{1}{2}\left(180° - \angle ACX\right) = 70°,$$

и из (1) имеем, что

$$\angle AXB = 150°.$$

Ответ: 150°.

А можно ли найти более простой путь решения этой задачи? Да, но придется воспользоваться теоремой Чевы в тригонометрической форме!

Задача 3. Треугольник ABC — равнобедренный: $AB = AC$ и $\angle A = 100°$. Внутри треугольника взята така точка X, что $\angle XAC = 20°$, $\angle XCA = 10°$. Найти $\angle AXB$.

Решение.

Поскольку треугольник ABC — равнобедренный, то

$$\angle ACB = \angle ABC = 40°$$

(рис. 253), откуда

$$\angle XCB = 30°,$$
$$\angle XAB = 80°.$$

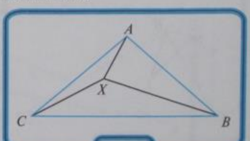

Рис. 253

Пусть $\angle XBA = \alpha$. Тогда, поскольку прямые AX, BX, CX имеют общую точку, то по **теореме Чевы в тригонометрической форме** (!) имеем:

$$\frac{\sin 10^\circ \cdot \sin(40^\circ - \alpha) \cdot \sin 80^\circ}{\sin 30^\circ \cdot \sin\alpha \cdot \sin 20^\circ} = 1,$$

откуда

$$\sin(40^\circ - \alpha) = \frac{\sin 20^\circ}{2\sin 10^\circ \sin 80^\circ} \sin\alpha = \sin\alpha,$$

$$2\cos 20^\circ \sin(20^\circ - \alpha) = 0, \quad \sin(20^\circ - \alpha) = 0,$$

$$\alpha = 20^\circ.$$

Тогда из треугольника AXB:

$$\angle AXB = 180^\circ - \angle XAB - \alpha = 180^\circ - 80^\circ - 20^\circ = 80^\circ.$$

Ответ: 80°.

Задача 4. В прямоугольном треугольнике ACB ($\angle C = 90^\circ$) проведена высота CH. Точки I_1 и I_2 — центры окружностей, вписанных в треугольники AHC и BHC, соответственно. Пусть $I_1I_2 = d$. Найти радиус вписанной в треугольник ACB окружности.

Решение.

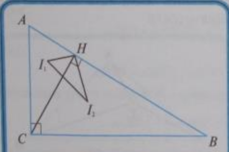

Рис. 254

Пусть r_1, r_2, r — радиусы окружностей, вписанных в треугольники AHC, BHC, ABC, соответственно (рис. 254). Воспользуемся тем, что

$$r_1^2 + r_2^2 = r^2 \ (!)$$

(см. раздел «Театр одной задачи»).

Поскольку треугольники AHC и BHC прямоугольные, то

$$I_1H = r_1\sqrt{2}, \quad I_2H = r_2\sqrt{2}.$$

Но ведь треугольник I_1HI_2 — также прямоугольный, поэтому

$$d^2 = I_1I_2^2 = I_1H^2 + I_2H^2 = 2(r_1^2 + r_2^2) = 2r^2,$$

следовательно,

$$r = \frac{d}{\sqrt{2}}.$$

Ответ: $\frac{d}{\sqrt{2}}$.

Рассмотрим еще одну задачу на ту же конфигурацию.

Задача 5. Доказать (в обозначениях предыдущей задачи), что биссектриса угла C перпендикулярна отрезку I_1I_2.

Доказательство.

Пусть точка I — инцентр треугольника ABC (рис. 255). Следует доказать, что высота треугольника CI_1I_2, проведенная из вершины C, лежит на прямой CI. Докажем более сильное утверждение:

точка I является ортоцентром треугольника CI_1I_2 (!)

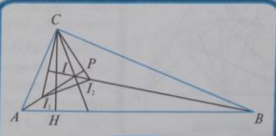

Рис. 255

20 — 4-1664

Но для его доказательства достаточно показать, что

$$I_1I \perp CI_2, \quad I_2I \perp CI_1 \ (!)$$

Имеем

$$\angle I_1CI_2 = \angle I_1CH + \angle HCI_2 =$$

$$= \frac{1}{2}\angle ACH + \frac{1}{2}\angle HCB = \frac{1}{2}\angle C = 45^\circ,$$

а поскольку точка I_1 — инцентр треугольника AHC, то

$$\angle AI_1C = 90^\circ + \frac{\angle AHC}{2} = 135^\circ.$$

Пусть P — точка пересечения прямых AI_1 и CI_2. Угол AI_1C — внешний угол треугольника CPI_1, поэтому

$$\angle CPI_1 = \angle AI_1C - \angle I_1CI_2 = 90^\circ,$$

а следовательно, $I_1I \perp CI_2$. Аналогично можно доказать, что $I_2I \perp CI_1$. Утверждение доказано.

Задача 6. Доказать, что серединный перпендикуляр к отрезку, соединяющему основания двух высот треугольника, проходит через середину противоположной стороны.

Доказательство.

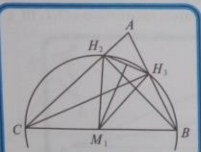

Рис. 256

Пусть BH_2 и CH_3 — высоты треугольника ABC (рис. 256), M_1 — середина стороны BC. Поскольку

$$\angle BH_2C = \angle CH_3B = 90^\circ,$$

то вокруг четырехугольника CH_2H_3B можно описать окружность (!), диаметр которой — BC, а центр — M_1. Следовательно,

$$M_1H_2 = M_1H_3,$$

как радиусы окружности. Поэтому треугольник $M_1H_2H_3$ — равнобедренный, откуда точка M_1 принадлежит серединному перпендикуляру к отрезку H_2H_3, что и требовалось доказать.

Задача 7. В треугольнике ABC провели медиану AM_1 и биссектрису AL_1. Через точку L_1 провели прямую, которая параллельна AC и пересекает отрезок AM_1 в точке P ($\angle C > \angle B$). Доказать, что отрезки CP и AL_1 — перпендикулярны.

Доказательство.

Пусть PC пересекает AL_1 в точке K (рис. 257). Продолжим прямую AL_1 до пересечения с описанной вокруг треугольника ABC окружностью в точке W_1 (!) Рассмотрим трапецию APL_1C: M_1 — точка пересечения продолжений боковых сторон этой трапеции, точка K — точка пересечения диагоналей. Поэтому

прямая M_1K пересекает основание AC в его середине M_2 (!)

Следовательно,

$$M_1K \parallel AB,$$

откуда

$$\angle M_1KW_1 = \angle BAW_1.$$

С другой стороны,

$$\angle BAW_1 = \angle BCW_1.$$

Отсюда имеем, что четырехугольник W_1M_1KC — вписанный, а значит,

$$\angle CKW_1 = \angle CM_1W_1 = 90^\circ,$$

что и требовалось доказать.

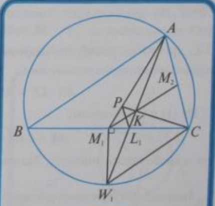

Рис. 257

20*

Задача 8. На стороне BC треугольника ABC ($\angle A > 90^\circ$) найти такую точку X, чтобы $AX = \sqrt{BX \cdot XC}$.

Решение.

Вокруг треугольника ABC опишем окружность с центром O (рис. 258).

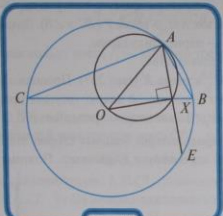

Рис. 258

На отрезке AO как на диаметре построим окружность (!) Если X — точка пересечения этой окружности со стороной BC, то точка X — искомая. Действительно, продолжим AX до пересечения с описанной вокруг треугольника ABC окружностью в некоторой точке E.

Тогда, поскольку $\angle OXA = 90^\circ$, то $OX \perp AE$, откуда

$$AX = XE. \qquad (1)$$

С другой стороны, по теореме о произведениях отрезков хорд, имеем:

$$AX \cdot XE = BX \cdot XC. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) получим:

$$AX = \sqrt{BX \cdot XC},$$

что и требовалось доказать. Задача имеет два решения.

Задача 9. Внутри треугольника ABC взята произвольная точка P. Доказать, что из отрезков $PA \sin A$, $PB \sin B$, $PC \sin C$ можно составить треугольник.

Доказательство.

Из точки P (рис. 259) опустим перпендикуляры на стороны треугольника ABC (!) Пусть точки K, M, N — основания этих перпендикуляров, которые лежат на сторонах BC, AC, AB, соответственно.

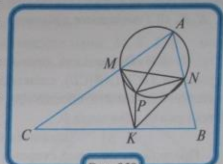

Рис. 259

Тогда четырехугольник $AMPN$ вписан в окружность с диаметром AP. Из треугольника AMN по следствию из теоремы синусов имеем:

$$MN = AP \sin A.$$

Аналогично,

$$KN = BP \sin B, \quad KM = CP \sin C.$$

Следовательно, треугольник KMN удовлетворяет условию задачи. Утверждение доказано.

Задача 10. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон BC, AC, AB в точках K_1, K_2, K_3, соответственно. Пусть t_1, t_2, t_3 — прямые, которые параллельны биссектрисам AL_1, BL_2, CL_3 треугольника ABC и проходят через точки K_1, K_2, K_3, соответственно. Доказать, что прямые t_1, t_2, t_3 пересекаются в одной точке.

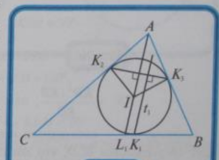

Рис. 260

Доказательство.

Поскольку треугольник AK_2K_3 — равнобедренный (рис. 260), то $AL_1 \perp K_2K_3$. Тогда $t_1 \perp K_2K_3$, откуда имеем, что отрезок прямой t_1,

лежащий внутри треугольника $K_1K_2K_3$, является высотой этого треугольника (!) Рассуждая аналогично, получим, что высоты треугольника $K_1K_2K_3$ лежат на прямых t_1, t_2, t_3, а следовательно, эти прямые имеют общую точку — ортоцентр треугольника $K_1K_2K_3$ (!) Утверждение доказано.

Задача 11. Окружность, проходящая через вершины A, B, D трапеции $ABCD$ ($AB \parallel CD$), касается прямой BC в точке B. Доказать, что окружность, проходящая через вершины B, C, D, касается прямой AD в точке D.

Доказательство.

Продолжим боковые стороны трапеции до пересечения в некоторой точке K (рис. 261).

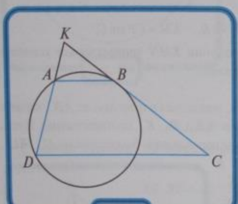

Рис. 261

Тогда, по свойству касательной, имеем:

$$KB^2 = KD \cdot KA \quad (!)$$

Поскольку треугольники KAB и KDC подобны, то

$$\frac{KA}{KD} = \frac{KB}{KC},$$

откуда

$$KA = \frac{KB \cdot KD}{KC}.$$

Следовательно,

$$KB^2 = \frac{KD^2 \cdot KB}{KC}, \text{ или } KD^2 = KC \cdot KB.$$

Поэтому KD — касателньая к окружности, описанной вокруг треугольника BCD, что доказывает утверждение задачи.

Задача 12. Четырехугольник вписан в окружность и описан вокруг окружности. Доказать, что сумма квадратов сторон четырехугольника, образованного точками касания вписанной окружности, вдвое больше квадрата диаметра этой окружности.

Доказательство.

Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник, M, N, L, K — точки касания вписанной окружности со сторонами CD, AB, BC, AD, соответственно (рис. 262).

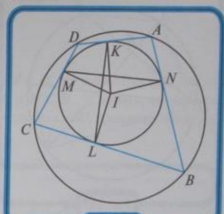

Рис. 262

Докажем, что

$$MN \perp KL \quad (!)$$

Действительно, пусть точка I — центр вписанной окружности, тогда

$$\angle LMN = \frac{1}{2}\angle LIN = \frac{1}{2}\left(180^\circ - \angle NBL\right) = 90^\circ - \frac{\angle B}{2},$$

аналогично,

$$\angle KLM = \frac{1}{2}\angle KIM = 90^\circ - \frac{\angle D}{2}.$$

Поскольку четырехугольник $ABCD$ — вписанный, то

$$\angle B + \angle D = 180^\circ,$$

а поэтому

$$\angle LMN + \angle KLM = 90^\circ,$$

откуда $MN \perp KL$. Следовательно, $MKNL$ — вписанный четырехугольник с перпендикулярными диагоналями. А тогда

$$ML^2 + KN^2 = MK^2 + LN^2 = 4r^2 = d^2, \quad (!)$$

где r — радиус вписанной в четырехугольник $ABCD$ окружности, d — его диаметр (см. раздел «Сенсационная находка геометрических археологов»). Отсюда

$$MK^2 + KN^2 + NL^2 + LM^2 = 2d^2,$$

что и требовалось доказать.

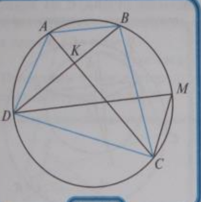

Рис. 263

Задача 13. Противоположные стороны вписанного четырехугольника равны a и b, а угол между диагоналями равен α. Найти радиус окружности, описанной вокруг четырехугольника.

Решение.

Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник, $AB = a$, $CD = b$ (рис. 263). Пусть K — точка пересечения диагоналей, тогда

$$\angle DKC = \alpha \text{ или } \angle DKC = 180^\circ - \alpha.$$

Известно, что

$$\angle DKC = \frac{1}{2}(\smile AB + \smile CD) \quad \textbf{(!)}$$

Возьмем на дуге CBD точку M, такую что

$$\smile CM = \smile AB \quad \textbf{(!)}$$

Тогда

$$\smile DCM = \smile DC + \smile CM = \smile DC + \smile AB = 2\angle DKC,$$

откуда

$$\angle DCM = 180^\circ - \angle DKC.$$

Кроме того, $CM = AB = a$. Следовательно, из треугольника DCM имеем

$$R = \frac{DM}{2\sin\angle DCM} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\angle DKC}}{2\sin\angle DKC},$$

где R — искомый радиус окружности. Поэтому

$$R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 \pm 2ab\cos\alpha}}{2\sin\alpha}.$$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{a^2 + b^2 \pm 2ab\cos\alpha}}{2\sin\alpha}$.

Задача 14. На сторонах AB и BC треугольника ABC вне его построены квадраты ABB_1A_1 и BCC_1B_2. Доказать, что прямая, содержащая высоту BD треугольника ABC, проходит через середину M отрезка B_1B_2.

Доказательство.

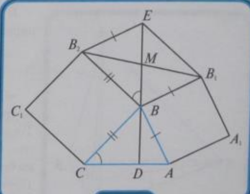

Рис. 264

Требуется доказать (рис. 264), что

$$MB \perp AC \quad \textbf{(!)}$$

Удвоив медиану BM треугольника BB_1B_2 **(!)**, получим точку E:

$$EM = MB.$$

Тогда четырехугольник EB_1BB_2 — параллелограмм, и поэтому $BB_1 = EB_2$,

$$\text{и } \angle EB_2B = \angle ABC \quad \textbf{(!)}$$

(как углы с взаимно перпендикулярными сторонами).

21 — 4-1664

Отсюда, поскольку

$$AB = BB_1, \quad BC = BB_2,$$

то

$$\Delta EB_2B = \Delta ABC$$

(по двум сторонам и углу между ними). Отсюда

$$\angle EBB_2 = \angle DCB,$$

и следовательно, из треугольника BDC имеем, что

$$\angle BDC = 180^\circ - \angle DCB - \angle CBD =$$
$$= 180^\circ - \angle EBB_2 - \angle CBD = \angle CBB_2 = 90^\circ,$$

что и требовалось доказать.

Задача 15. Боковые ребра треугольной пирамиды имеют одинаковую длину l. Два плоских острых угла при вершине пирамиды равны α, а третий угол равен β. Найти объем пирамиды.

Решение.

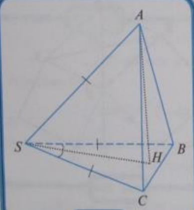

Рис. 265

Пусть $SABC$ — данная пирамида,

$$\angle ASC = \angle ASB = \alpha,$$
$$\angle BSC = \beta.$$

«Положим» пирамиду на грань BSC **(!)** (рис. 265). Тогда проекция H вершины A на эту грань лежит на биссектрисе угла BSC **(!)** Применим формулу «трех косинусов» (см. раздел «Углы в правильной треугольной пирамиде: страсти и находки»):

$$\cos\angle ASC = \cos\angle ASH \cdot \cos\angle HSC,$$

или

$$\cos\alpha = \cos\angle ASH \cdot \cos\frac{\beta}{2},$$

откуда

$$\cos\angle ASH = \frac{\cos\alpha}{\cos\frac{\beta}{2}}.$$

Но ведь

$$AH = AS\sin\angle ASH = l\sin\angle ASH,$$

$$S_{BSC} = \frac{1}{2}SB \cdot SC \cdot \sin\angle BSC = \frac{l^2}{2}\sin\beta.$$

Найдем объем V пирамиды:

$$V = \frac{1}{3}AH \cdot S_{BSC} = \frac{l^3}{6}\sin\beta\sqrt{1 - \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\frac{\beta}{2}}} =$$
$$= \frac{l^3}{3}\sin\frac{\beta}{2}\sqrt{\cos^2\frac{\beta}{2} - \cos^2\alpha}.$$

Ответ: $\dfrac{l^3}{3}\sin\dfrac{\beta}{2}\sqrt{\cos^2\dfrac{\beta}{2} - \cos^2\alpha}$.

21*

Триумф геометрии треугольника

Когда первоклассник или даже дошкольник легко познает геометрическую фигуру, называемую треугольником, он даже не представляет себе, что будет связан с этой фигурой десятилетия. Дело в том, что треугольник не только простейшая геометрическая фигура, но и чудесный пример для развития интеллектуальных, эстетических и даже моральных качеств личности. С первых лет знакомства, благодаря простоте сущности, треугольник не пугает и не отталкивает от изучения, а напротив — заинтересовывает и оставляет возможность для импровизаций.

Треугольник позволяет пройти на начальном уровне путь от настоящей науки, от воодушевления и взволнованных поисков к триумфу. Замена абстракции на продвижение путем, направленным на углубление изучения предмета позволяет получить макет науки, который и называется *геометрией треугольника*. Возможно, именно она и является первой конечной и важнейшей для изучения моделью. Внутри этой конструкции-модели есть все, чего требует развивающийся разум: аксиоматика, последовательность доказательств, четкость, требовательность к себе, честность...

Именно геометрия треугольника — носитель эмоциональных порывов, которые являются родственными радости открытия! Вот почему эту науку не удалось формализировать, и возвращение к ней является настолько существенным и обязательным, как инстинкт самой жизни. Не использовать геометрию треугольника — это значит неисправимо повредить не только будущим математикам, но и любой личности с интеллектуальными и моральными задатками, которые всегда весьма нужны обществу, а сегодня — особенно!

В конце нашей книги рассмотрим несколько задач, которые не являются самыми красивыми и самыми важными из всех, приведенных в книге. Но при решении всех предложенных ниже задач используется *аппарат геометрии треугольника*.

Задача 1. В остроугольном треугольнике ABC известны высота $AH_1 = h$ и расстояние t от вершины A до ортоцентра H. Найти длину биссектрисы AL_1, если она делит отрезок H_1M_1 пополам (M_1 — середина стороны BC).

Решение.

Вокруг треугольника ABC опишем окружность с центром O (рис. 266).

Рис. 266

Пусть продолжение биссектрисы AL_1 пересекает эту окружность в точке W_1.

Поскольку, по условию,

$$M_1L_1 = L_1H_1,$$

то треугольники AH_1L_1 и $W_1M_1L_1$ равны, откуда

$$M_1W_1 = AH_1 = h,$$

$$AL_1 = W_1L_1.$$

Тогда, поскольку треугольник AOW_1 — равнобедренный, то $OL_1 \perp AW_1$, то есть треугольник OL_1W_1 — прямоугольный.

Отсюда

$$W_1L_1 = \sqrt{OW_1 \cdot W_1M_1} = \sqrt{(OM_1 + M_1W_1) \cdot W_1M_1},$$

а поскольку

$$OM_1 = \frac{1}{2}AH = \frac{t}{2}, \text{ то } AL_1 = W_1L_1 = \sqrt{\left(\frac{t}{2} + h\right)h}.$$

Ответ: $\sqrt{\left(\frac{t}{2} + h\right)h}.$

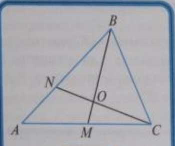

Рис. 267

Задача 2. В треугольнике ABC точка M лежит на стороне AC, а точка N — на стороне AB, причем $AN:NB = 2:3$. Отрезки CN и BM пересекаются в точке O, причем $BO:OM = 5:2$. Найти $CO:ON$.

Решение.

Прямая AC пересекает продолжение сторон треугольника BON в точках A, M, C (рис. 267). Применим теорему Менелая к этой конфигурации, имеем:

$$\frac{BA}{AN} \cdot \frac{NC}{CO} \cdot \frac{OM}{MB} = 1.$$

Тогда, поскольку

$$\frac{BA}{AN} = \frac{BN + AN}{AN} = \frac{BN}{AN} + 1 = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2},$$

$$\frac{MB}{OM} = \frac{MO + OB}{OM} = 1 + \frac{OB}{OM} = 1 + \frac{5}{2} = \frac{7}{2},$$

то $\frac{NC}{CO} = \frac{7}{5}$, откуда

$$\frac{ON}{CO} = \frac{CN - CO}{CO} = \frac{CN}{CO} - 1 = \frac{7}{5} - 1 = \frac{2}{5},$$

то есть $CO:ON = 5:2$.

Ответ: 5:2.

Задача 3. Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность с центром O. Построен ортоцентрический треугольник $H_1H_2H_3$. Прямые OA, OB, OC пересекают соответственные стороны ортоцентрического треугольника в точках Q_1, Q_2, Q_3. Доказать, что $Q_1H_2 + Q_2H_3 + Q_3H_1 = MN$, где MN — отрезок, соединяющий проекции основания одной из высот треугольника ABC на две его стороны.

Доказательство.

Пусть M и N — проекции точки H_1 на стороны AC и AB (рис. 268).

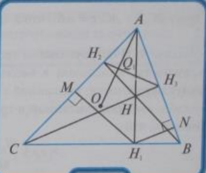

Рис. 268

Напомним, что

$$MN = AH_1 \sin A = \frac{S}{R},$$

где S — площадь треугольника ABC, R — радиус описанной окружности. И такую же длину имеют отрезки, соединяющие проекции оснований двух других высот треугольника. Напомним также, что

$$AO \perp H_2H_3, \quad \angle AH_2H_3 = \angle B.$$

Следовательно,

$$Q_1H_2 = AH_2 \cos \angle AH_2Q_1 =$$
$$= AB \cos A \cos B = 2R \sin C \cos A \cos B.$$

Аналогично,

$$Q_2H_3 = 2R\sin A\cos B\cos C,$$
$$Q_3H_1 = 2R\sin B\cos A\cos C.$$

Отсюда

$$Q_1H_2 + Q_2H_3 + Q_3H_1 =$$
$$= 2R\sin A\sin B\sin C\left(\operatorname{ctg} A\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} A\operatorname{ctg} C + \operatorname{ctg} B\operatorname{ctg} C\right)$$

Но

$$\operatorname{ctg} A\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} A\operatorname{ctg} C + \operatorname{ctg} B\operatorname{ctg} C = 1,$$

откуда

$$Q_1H_2 + Q_2H_3 + Q_3H_1 = 2R\sin A\sin B\sin C =$$
$$= 2R\cdot\frac{a}{2R}\cdot\frac{b}{2R}\cdot\frac{c}{2R} = \frac{abc}{4R^2} = \frac{S}{R} = MN$$

(где $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$), что и требовалось доказать.

Задача 4. В остроугольном треугольнике ABC r_L — радиус окружности, вписанной в **биссектральный треугольник**, r_K — радиус окружности, вписанной в треугольник, образованный точками касания вписанной в треугольник ABC окружности. Доказать, что

$$r_L r_K \le \frac{Rl_a l_b l_c}{8p^2},$$

где R — радиус описанной вокруг треугольника ABC окружности, p — полупериметр треугольника ABC, l_a, l_b, l_c — биссектрисы треугольника.

Доказательство.

Пусть $AL_1 = l_a$, $BL_2 = l_b$, $CL_3 = l_c$ — биссектрисы треугольника ABC, S_L — площадь треугольника $L_1L_2L_3$, p_L — его полупериметр; K_1, K_2, K_3 — точки касания вписанной в треугольник ABC окружности со сторонами BC, AC, AB, соответственно, S_K — площадь треугольника $K_1K_2K_3$, p_K — его полупериметр (рис. 269).

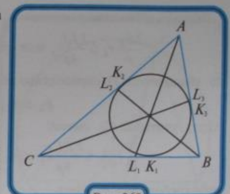

Рис. 269

Справедлива формула Чезаро:

$$S_L = \frac{l_a l_b l_c}{4p},$$

откуда

$$p_L r_L = \frac{l_a l_b l_c}{4p}. \qquad (1)$$

Пусть p_H — полупериметр ортоцентрического треугольника $H_1H_2H_3$. Тогда

$$p_H = \frac{S}{R}, \qquad (2)$$

где S — площадь треугольника ABC, и

среди всех треугольников, которые вписаны в остроугольный треугольник, ортоцентрический имеет наименьший периметр.

В частности

$$p_H \le p_L. \qquad (3)$$

Из (1), (2), (3) имеем, что

$$\frac{S}{R}r_L \le \frac{l_a l_b l_c}{4p}.$$

Пусть r — радиус вписанной в треугольник ABC окружности, тогда

$$\frac{pr}{R}r_L \le \frac{l_a l_b l_c}{4p}. \qquad (4)$$

Мы уже встречались с формулой для площади треугольника $K_1K_2K_3$:

$$S_K = \frac{pr^2}{2R}.$$

Тогда из (4) имеем:

$$\frac{2S_K}{r}r_L \le \frac{l_a l_b l_c}{4p}, \text{ или } p_K r_K r_L \le \frac{l_a l_b l_c r}{8p}.$$

Но, аналогично (3), справедливо неравенство

$$p_H \le p_K,$$

откуда, учитывая (2), имеем:

$$\frac{S}{R}r_K r_L \le \frac{l_a l_b l_c r}{8p}, \text{ или } r_L r_K \le \frac{Rl_a l_b l_c}{8p^2},$$

что и требовалось доказать.

Задача 5. Радиус вневписанной окружности, которая касается стороны BC треугольника ABC, равен r_a. Доказать, что $AH + r_a = 2R + r$, где H — ортоцентр треугольника ABC, R — радиус описанной окружности, r — радиус вписанной окружности.

Доказательство.

Пусть O — центр описанной окружности, W_1 — точка пересечения продолжения биссектрисы угла A с этой окружностью, M_1 — середина BC (рис. 270). Пусть данная вневписанная окружность касается стороны BC в точке T_1, а вписанная окружность — в точке K_1, точки I_a и I — соответственные центры этих окружностей. Пусть P — точка пересечения отрезков OW_1 и IT_1. Известно, что

$$IW_1 = I_aW_1.$$

Тогда, поскольку $OW_1 \parallel I_aT_1$, то PW_1 — средняя линия в треугольнике IT_1I_a, откуда

$$PW_1 = \frac{1}{2}I_aT_1 = \frac{r_a}{2} \text{ и } T_1P = PI.$$

Следовательно, PM_1 — средняя линия в треугольнике IK_1T_1, откуда

$$PM_1 = \frac{1}{2}IK_1 = \frac{r}{2}.$$

Тогда

$$OM_1 = OW_1 - M_1W_1 =$$
$$= R - \left(PW_1 - PM_1\right) =$$
$$= R - \frac{r_a}{2} + \frac{r}{2}.$$

Осталось воспользоваться равенством

$$AH = 2OM_1.$$

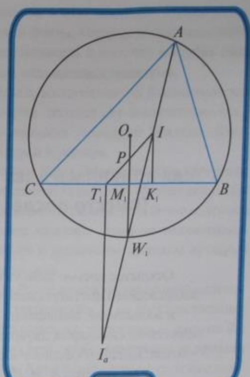

Рис. 270

Задача 6. Пусть BL_2, CL_3 — биссектрисы треугольника ABC. Доказать, что если центр O описанной вокруг треугольника ABC окружности принадлежит отрезку L_2L_3, то $r_a = R$ (r_a — радиус вневписанной окружности, которая касается стороны BC, R — радиус описанной окружности).

Доказательство.

Поскольку точка O принадлежит отрезку L_2L_3, то

$$AH = R + r, \qquad (1)$$

где H — ортоцентр треугольника ABC, r — радиус вписанной окружности (см. с. 201). С другой стороны, из предыдущей задачи имеем, что

$$AH + r_a = 2R + r. \qquad (2)$$

Вычитая из равенства (2) равенство (1), получим, что

$$r_a = R,$$

что и требовалось доказать.

Как появилась идея этой книги (Вместо послесловия)

Открытое письмо заместителя директора Закарпатского института методики преподавания и воспитания, повышения квалификации педагогических кадров, двукратного Соросовского учителя, кандидата физико-математических наук, доцента *В. М. Петечука*

Глубокоуважаемый господин Кушнир!

Мои наблюдения и соображения по поводу преподавания математики в школе призывают обратиться к Вам с просьбой и советом **о написании книги**, так сказать, нового поколения. Книги, которая должна поднять мотивацию изучения геометрии на новую ступень.

Десятилетия знакомства с Вами, как по Вашим публикациям, так и личного, лекции и семинары, которые Вы неоднократно проводили в Закарпатье, восхищение Вашим энтузиазмом и стоицизмом на славной ниве школьной геометрии позволяют мне надеяться, что **именно Ваша книга может вернуть преподаванию геометрии былую славу**. Славу надежного помощника учителя

в воспитании интеллектуального слоя общества. Нужно только (только!) найти такие слова и факты, которые убедят педагогическую и ученическую общественность в том, что **мы губим самое важное, самое существенное, недооценивая геометрию**.

Целое поколение учителей, воспитанное на Колмогоровской школе конструкции геометрии, сегодня уже недостаточно представляют педагогическую ценность геометрии Эвклида—Киселева, а может даже — геометрии Кушнира.

Ведь именно разработанные Вами «Метод базисных треугольников», «Метод вспомогательного элемента», «Метод вспомогательных точек», пропаганда работ Л. Эйлера, доведение до уровня теории точки W, прекрасное название «теорема трилистника» и многое-многое другое были с уважением приняты лучшими учителями-практиками и учеными.

Уже десять лет собираю Ваши книги по школьной математике, изданные в разных издательствах — от государственных до частных. Каждый раз, открывая их, убеждаюсь — именно **Вы знаете, что нужно сделать для того, чтобы утраченное не пропало совсем, а новое не потерялось**. Хотелось бы получить от Вас даже не новый учебник или пособие для учителя, а именное **книгу**, которая бы стала идеологической программой возвращения геометрии в школу и не только на методическом, но и на гуманитарном уровне способствовала бы этому возвращению.

Итак, по моему мнению, **пришло время показать, что именно утрачено в геометрии и как все это вернуть**. Уверен в успехе!

С глубоким уважением,
Василий Петечук,
г. Ужгород.

Содержание

Кушнир, Исаак

К 96 Возвращение утраченной геометрии. — Киев: Факт, 2004. — 328 с.

ISBN 966-8408-65-9

Геометрия — одна из немногих наук, которой можно восторгаться всю жизнь. По достаточно печальным причинам она стала исчезать из школьных учебников. Потери от этого едва ли не тотального исчезновения заметны уже сегодня. Автор этой книги — известный в Украине и за ее пределами специалист по школьному математическому образованию Исаак Кушнир — непринужденно объясняет, что нужно сделать для того, чтобы утраченное не пропало вовсе, а новое не потерялось. Эта книга — не новый учебник или помощник для учителя. Ее можно считать идеологической программой возвращения геометрии в школу. Книга не только на методическом, но и на гуманитарном уровне способствует этому возвращению.

УДК 514

ББК 22.151

Исаак КУШНИР

ВОЗВРАЩЕНИЕ УТРАЧЕННОЙ ГЕОМЕТРИИ

Киев, Факт, 2004, 328 с.

Редактор *Леонид Финкельштейн*

Корректор *Инна Киселева*

Технический редактор *Оксана Кравцова*

Макетирование обложки *Иннокентия Вырового*

Верстка и макетирование *Дмитрия Финкельштейна*

ООО «Издательство „Факт“»

Регистрационное свидетельство

ДК № 1284 от 19.03.2003

04080, Украина, Киев-80, а/я 76

Тел./факс: (044) 417 1366, 416 8754

E-mail: office@fact.kiev.ua

Отдел сбыта: (044) 463 6887

E-mail: sbyt@fact.kiev.ua

www.fact.kiev.ua

Отпечатано с готовых форм на АО «Випол»

г. Киев, ул. Волынская, 60

Тираж 1 000 экз.

Сдано в производство 17.03.2004. Подписано в печать 26.08.2004. Формат 60 × 84/16. Печать офсетная. Бумага офсетная № 1. Гарнитура «Ньютон». Усл. печ. л. 19,1. Уч.-изд. л. 17,2. Зам. № 4-1664

Модернисты... были доведены своими философскими идеями до того, чтобы, с одной стороны, отбросить такую идеальную основу для обучения поискам, такой неисчерпаемый колодец упражнений, который дает эвклидова геометрия, а с другой стороны заменить его общими вопросами множественных логических структур, то есть материалом беднейшим, пустейшим, наиболее разочаровывающим по отношению к любой интуиции, которая только существует.

Рене Том
(один из самых знаменитых французских математиков современности, лауреат премии Филдса)

Эвклидову геометрию следует вернуть в школьные программы, отведя ей то место, которое она имела до модернизации. Активизировать также внимание к роли этого предмета в привлечении школьников к математической теории.

Из выводов V Международного конгресса математическогго образования (ICME), г. Аделаида (Австралия), 1984 год

Десятилетия знакомства с Вами... восхищение Вашим энтузиазмом и стоицизмом... позволяют мне надеяться, что именно Ваша книга может вернуть преподаванию геометрии былую славу... надежного помощника учителя в воспитании интеллектуального слоя общества. Целое поколение учителей, воспитанное на Колмогоровской школе конструкции геометрии, сегодня уже недостаточно представляют педагогическую ценность геометрии Эвклида—Киселева, а может даже — геометрии Кушнира.

Из письма Исааку Кушниру заместителя директора Закарпатского ИМПВПКKПК, кандидата физико-математических наук, доцента В. М. Петечука