И. КУШНИР

ВЕКТОРНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

И. КУШНИР

ВЕКТОРНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

ББК 22.1
М13

В научно-методической литературе почти нет книг о векторных методах решения задач.

Пособие, написанное известным педагогом, специалистом школьной геометрии, включает как векторные задачи, так и задачи классической геометрии, решаемые с помощью векторов.

В книге решены векторные задачи из сборников задач по математике под редакцией М. И. Сканави разных изданий.

Для учащихся школ и техникумов, лицеев и гимназий, классов с углубленным изучением математики, абитуриентов, студентов, учителей и преподавателей вузов.

М $\frac{1602000000-00}{220-94}$

ISBN 5-87168-38-0

Оглавление

1. Предисловие

Векторный и векторно-координатный методы решения задач являются сравнительно новыми темами в школьном курсе геометрии, и овладение ими вызывает трудности не только у учащихся, но и учителей. Это естественно, так как изучается новый язык математики, новая «азбука» общения и, конечно, новые задачи. К ним в первую очередь относятся задачи, условие которых содержит векторы, а следовательно не возникает вопрос: «Как решать задачу: с помощью векторов или без них?»

Вот почему в книге, посвященной векторам, абсолютное большинство задач векторного содержания. Именно такие задачи являются прекрасным материалом для изучения векторного языка.

Возможности векторов широко иллюстрируются в книге при решении традиционных задач классической геометрии. С их помощью они иногда имеют на первый взгляд более лаконичное решение, чем традиционное, а в некоторых случаях выкладки решения с помощью векторов могут показаться слишком громоздкими. Хотим сразу предупредить читателя: такое сравнение неуместно, так как классический и векторный метод — это разные языки математики, и мы учимся говорить на одном из них.

В книге решены все векторные задачи «Сборника задач по математике для поступающих в вузы» под редакцией М. И. Сканави пятого издания и «Сборника конкурсных задач по математике для поступающих в вузы» под редакцией М. И. Сканави четвертого издания: они обозначаются соответственно: СК. V., СК. IV. Кроме этих задач, в книгу включены наиболее «знаменитые» векторные задачи. Некоторые задачи составлены автором.

2. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ.

1. Пусть A, X, C — произвольные точки. Имеет место равенство

$$\overline{AX} + \overline{XC} = \overline{AC} \qquad (2.1)$$

Формулу (2.1) называют «правилом треугольника»

2. Для любых трех точек А, В, Х имеет место формула:

$$\overline{AB} = \overline{XB} - \overline{XA} \qquad (2.2)$$

Формулы (2.1) и (2.2) называют формулами «прокола точкой».

3. Имеются векторы $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, ..., $\overline{a}_n$. Отложим их последовательно так, чтобы начало вектора $\overline{a}_2$ совпало с концом вектора $\overline{a}_1$, начало вектора $\overline{a}_3$ совпало с концом вектора $\overline{a}_2$ ..., начало вектора $\overline{a}_n$ совпало с концом вектора $\overline{a}_{n-1}$. Для того, чтобы полученная ломаная была замкнута, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось векторное равенство

$$\overline{a}_1 + \overline{a}_2 + \overline{a}_3 + \cdots + \overline{a}_n = \overline{0} \qquad (2.3)$$

Формулу (2.3) называют «замкнутым контуром».

4. Два ненулевых вектора называются коллинеарными, если их направления совпадают или противоположны.

Если среди двух векторов имеется хотя бы один нулевой вектор, то такие векторы также будем считать коллинеарными.

Теорема (признак коллинеарности). Необходимым и достаточным условием коллинеарности ненулевого вектора $\overline{a}$ и вектора $\overline{b}$ является существование такого числа α, что

$$\overline{b} = \alpha\overline{a} \qquad (2.4)$$

Доказательство. Необходимость.

Пусть векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны [1]), причем $\overline{a} \neq \overline{0}$. Найдем также число α, что выполняется равенство

$$\overline{b} = \alpha\overline{a} \qquad (1)$$

[1]) Если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ сонаправлены, это обозначается как $\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$. Если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ противоположно направлены, это обозначается $\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}$.

Для этого рассмотрим соотношение

$$|\bar b|:|\bar a| = k$$

Отсюда $|\bar b| = k|\bar a|$.

Если $\bar b \uparrow\uparrow \bar a$, то равенство (1) выполняется при $\alpha = k$. В случае $\bar b \downarrow\uparrow \bar a$ нужно взять $\alpha = -k$. Если $\bar b \neq \bar 0$, то $\alpha \neq 0$.

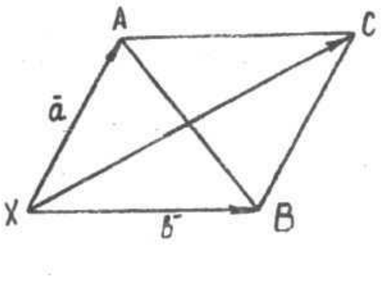


Рис. 2.1

5. Для сложения двух неколлинеарных векторов используется правило параллелограмма (рис. 2.1).

$$\overline{XA} + \overline{XB} = \overline{XC} \qquad (2.5)$$

6. Три ненулевых вектора называются компланарными, если лучи, задающие их направления, лежат на прямых, параллельных некоторой плоскости.

7. Теорема. Если векторы $\bar a$ и $\bar b$ неколлинеарны, то любой вектор $\bar c$, компланарный с векторами $\bar a$ и $\bar b$, можно представить единственным образом в виде

$$\bar c = \alpha\bar a + \beta\bar b \qquad (2.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть векторы $\bar a$, $\bar b$, $\bar c$ компланарны, причем векторы $\bar a$ и $\bar b$ неколлинеарны. Найдем числа α и β, удовлетворяющие равенству (2.6). Построим параллелограмм XACB, в котором $\overline{XA} = \alpha\bar a$, $\overline{XB} = \beta\bar b$ (рис. 2.2). По правилу параллелограмма (2.5) $\overline{XC} = \overline{XA} + \overline{XB}$, или $\overline{XC} = \alpha\bar a + \beta\bar b$, или $\bar c = \alpha\bar a + \beta\bar b$.

8. Если даны неколлинеарные векторы $\bar a$ и $\bar b$, то представление вектора $\bar c$, компланарного с $\bar a$ и $\bar b$, в виде суммы $x\bar a + y\bar b$ называется разложением вектора $\bar c$ по векторам $\bar a$ и $\bar b$.

9. Для произвольной точки X пространства и для некоторого действительного числа к равенство

$$\overline{XC} = к\overline{XA} + (1 - к)\overline{XB} \qquad (2.7)$$

является необходимым и достаточным условием принадлежности точек A, B и C $(A \neq B)$ одной прямой, причем $\overline{BC} = к\overline{BA}$. (2.7а)

Соотношение (2.7) можно записать так: точка C принадлежит прямой AB тогда и только тогда, когда

$$\overline{XC} = a\overline{XA} + b\overline{XB} \qquad (2.8)$$
$$a + b = 1$$

(a, b — действительные числа, X — произвольная точка пространства).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Достаточность. Пусть выполняется равенство (2.7)
Тогда

$$\overline{XC} - \overline{XB} = к(\overline{XA} - \overline{XB})$$

Отсюда $\overline{BC} = к\overline{BA}$, значит, векторы $\overline{BC}$ и $\overline{BA}$ коллинеарны, а точки A, B, C принадлежат одной прямой.

Необходимость. Поскольку точки A, B, C принадлежат одной прямой, то векторы $\overline{BC}$ и $\overline{BA}$ коллинеарны, или $\overline{BC} = к\overline{BA}$. Отсюда $\overline{XC} - \overline{XB} = к(\overline{XA} - \overline{XB})$, или $\overline{XC} = к\overline{XA} + (1 - к)\overline{XB}$.

10. Для произвольной точки пространства X и для некоторых действительных чисел к и l равенство

$$\overline{XD} = к\overline{XA} + l\overline{XB} + (1 - к - l)\overline{XC} \qquad (2.9)$$

есть необходимым и достаточным условием принадлежности точек A, B, C и D одной плоскости. Соотношение (2.9) можно записать иначе:

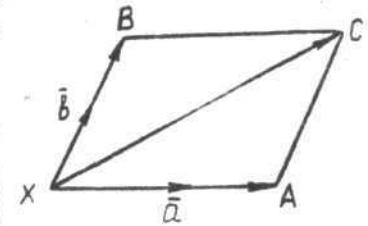


Рис. 2.2

$$\overline{XD} = \alpha_1 \cdot \overline{XA} + \alpha_2 \cdot \overline{XB} + \alpha_3\overline{XC} \qquad (2.10)$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1,$$

где α_1, α_2, α_3 — действительные числа, X — произвольная точка пространства.

Доказательство. Необходимость. Обозначим $\overline{XA} = \bar a$, $\overline{XB} = \bar b$, $\overline{XC} = \bar c$, $\overline{XD} = \bar d$. Поскольку точки A, B, C и D принадлежат одной плоскости, то векторы $\bar d - \bar c$, $\bar a - \bar c$, $\bar b - \bar c$ компланарны, т. е. $\bar d - \bar c = k(\bar a - \bar c) + l(\bar b - \bar c)$, или $\bar d = k\bar a + l\bar b + (1 - k - l)$. $\bar c$

Таким образом,

$$\overline{XD} = к\overline{XA} + l\overline{XB} + (1 - к - l)\overline{XC}.$$

Достаточность докажите самостоятельно.

11. Если точка C делит отрезок AB в отношении $AC : BC = m : n$ (m, n — действительные числа, X — произвольная точка пространства), то

$$\overline{XC} = \frac{n}{m+n}\overline{XA} + \frac{m}{m+n}\overline{XB} \qquad (2.11)$$

Для доказательства этой формулы в соотношениях (2.7) и (2.7а) положим $к = \frac{n}{m+n}$. Получим: $AC : BC = m : n$ и $\overline{XC} = \frac{n}{m+n}\overline{XA} + \frac{m}{m+n}\overline{XB}$.

Другие способы доказательства этой формулы см. стр. 115. Если C — середина отрезка AB, то

$$\overline{XC} = \frac{1}{2}(\overline{XA} + \overline{XB}) \tag{2.12}$$

Доказательство следует из формулы (2.11), если $m = n$.

13. Доказать, что для произвольной точки пространства X и точки M пересечения медиан треугольника ABC (центроида треугольника ABC) выполняется соотношение

$$\overline{XM} = \frac{1}{3}(\overline{XA} + \overline{XB} + \overline{XC}) \tag{2.13}$$

Доказательство приводится на стр. 34.

3. СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ ВЕКТОРОВ. УМНОЖЕНИЕ ВЕКТОРА НА ЧИСЛО. КОЛЛИНЕАРНЫЕ И КОМПЛАНАРНЫЕ ВЕКТОРЫ.

Задача 1.
Если A, B, C — произвольные точки, то

$$\| \overline{AB} | - | \overline{BC} \| \leqslant | \overline{AB} + \overline{BC} | \leqslant | \overline{AB} | + | \overline{BC} |$$

Доказать.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Учитывая формулу (2.1) данное неравенство запишем в виде:

$$\| \overline{AB} | - | \overline{BC} \| \leqslant | \overline{AC} | \leqslant | \overline{AB} | + | \overline{BC} |$$

Получим верное неравенство, так как длина стороны AC треугольника ABC не больше суммы длин двух других его сторон и не меньше их разности. Равенство будет в том и только в том случае, когда векторы $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$ коллинеарны.

Задача 2. (Ск. IV. 15.132). Даны четыре некомпланарных вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{d}$. Вычислить сумму этих векторов, если

$$\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = p\bar{d}, \quad \bar{b} + \bar{c} + \bar{d} = q\bar{a},$$

где p, q — действительные числа

РЕШЕНИЕ

$$\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} - \bar{b} - \bar{c} - \bar{d} = p\bar{d} - q\bar{a},$$

$$\bar{a} - \bar{d} = p\bar{d} - q\bar{a},$$

$$\bar{a}(1 + q) + \bar{d}(-1 - p) = \bar{0}$$

Поскольку векторы $\bar{a}$ и $\bar{d}$ не являются нулевыми, то $1 + q = 0$ и $-1 - p = 0$, значит, $p = q = -1$ и $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = -\bar{d}$, откуда $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + \bar{d} = \bar{0}$.

Задача 3. (Ск. IV. 15.133).

Даны три некомпланарных вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$. Доказать, что векторы $\bar{a} + \bar{b}$, $\bar{b} + \bar{c}$, $\bar{c} - \bar{a}$ компланарны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Воспользуемся условием компланарности трех векторов (формула (2.6)):

$$\bar{a} + \bar{b} = \alpha(\bar{b} + \bar{c}) + \beta(\bar{c} - \bar{a}). \tag{1}$$

Докажем, что можно найти такие α и β, что выполняется соотношение (1):

Имеем

$$\bar{a}(\beta+1)+\bar{b}(1-\alpha)-\bar{c}(\alpha+\beta)=0$$

Сумма трех некомпланарных векторов равна нуль — вектору, если

$$\bar{a}(\beta+1)=\bar{0},\quad \bar{b}(1-\alpha)=\bar{0},$$

$$\bar{c}(a+\beta)=\bar{0},\ \text{имеем}$$

$$\beta+1=0$$

$$1-\alpha=0$$

$$\alpha+\beta=0,$$

откуда $\alpha=1$, $\beta=-1$, а это доказывает утверждение задачи.

Задача 4.

Даны три ненулевых вектора $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, каждые два из которых неколлинеарны. Найти их сумму, если вектор $\bar{a}+\bar{b}$ коллинеарен вектору $\bar{c}$, а вектор $\bar{b}+\bar{c}$ коллинеарен вектору $\bar{a}$.

РЕШЕНИЕ

Учитывая условие и соотношение (2.4), имеем

$$\bar{a}+\bar{b}=\alpha\bar{c},\ \text{или}$$

$$\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}=(\alpha+1)\bar{c}$$

Аналогично

$$\bar{b}+\bar{c}=\beta\bar{a},\ \text{или}$$

$$\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}=(\beta+1)\bar{a}$$

Итак, $(\alpha+1)\bar{c}=(\beta+1)\bar{a}$

Поскольку векторы $\bar{a}$ и $\bar{c}$ неколлинеарны, последнее равенство возможно, если $\alpha=\beta=-1$. При этом $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}=\bar{0}$.

Задача 5. (Ск. IV. 15.134).

Даны три некомпланарных вектора $\bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{c}$. Вычислить значение k, если векторы $\bar{a}+\bar{b}+k\bar{c}$, $\bar{b}+\bar{c}+k\bar{a}$, $\bar{c}+\bar{a}+k\bar{b}$ компланарны.

РЕШЕНИЕ

Запишем условие компланарности векторов $\bar{a}+\bar{b}+k\bar{c}$, $\bar{b}+\bar{c}+k\bar{a}$, $\bar{c}+\bar{a}+k\bar{b}$:

$$\bar{a}+\bar{b}+k\bar{c}+\alpha(\bar{b}+\bar{c}+k\bar{a})+\beta(\bar{c}+\bar{a}+k\bar{b})=\bar{0},$$

или

$$(1+k\alpha+\beta)\bar{a}+(1+\alpha+\beta k)\bar{b}+(\alpha+\beta+k)\bar{c}=\bar{0},$$

что возможно при

$$1+k\alpha+\beta=0 \qquad (1)$$

$$1+\alpha+\beta k=0 \qquad (2)$$

$$\alpha+\beta+k=0 \qquad (3)$$

Сложив (1) и (2) и подставив (3), получим:

$$k^2+k-2=0$$

$$k_1=1,\quad k_2=-2,$$

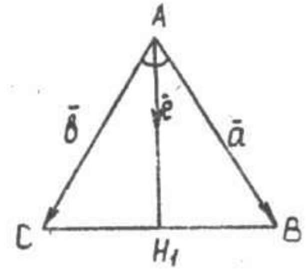


Рис. 3.1

Задача 6.

Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ неколлинеарны. Найти значения α и β, если известно, что векторы

$$\bar{c}=\alpha\bar{a}+\beta\bar{b}\ \text{и}\ \bar{d}=(\beta+1)\bar{a}+(2-\alpha)\bar{b}$$

равны.

Из равенства векторов $\bar{c}$ и $\bar{d}$ следует, что

$$\alpha\bar{a}+\beta\bar{b}=(\beta+1)\bar{a}+(2-\alpha)\bar{b},\ \text{или}$$

$$(\beta+1-\alpha)\bar{a}+(2-\alpha-\beta)\bar{b}=\bar{0}.$$

Поскольку векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ неколлинеарны, то справедливы уравнения:

$$\beta+1-\alpha=0$$

$$2-\alpha-\beta=0,\ \text{откуда}$$

$$\alpha=\frac{3}{2},\quad \beta=\frac{1}{2}.$$

Задача 7. (Ск. V. 17.050)

В треугольнике ABC дано: $\overline{AB}=\bar{a}$, $\overline{AC}=\bar{b}$, $|\bar{a}|=|\bar{b}|=2$, $\angle BAC=60°$ Выразить через $\bar{a}$ и $\bar{b}$ единичный вектор, направленный по высоте треугольника, проведенной из вершины A.

РЕШЕНИЕ

Обозначим $\bar{e}$ — единичный вектор, направленный по высоте AH_1 (рис. 3.1). Поскольку $2\,\overline{AH_1}=\bar{a}+\bar{b}$, то

$$\bar{e}\,|\overline{AH_1}|=\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2}$$

Но $|\overline{AH_1}|=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, значит $\bar{e}=\dfrac{\bar{a}+\bar{b}}{2\sqrt{3}}$

Задача 8. (Ск. IV. 15.135)

Даны три некомпланарных вектора $\bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{c}$. Вычислить значения p и q, при которых векторы $p\bar{a}+q\bar{b}+\bar{c}$, $\bar{a}+p\bar{b}+q\bar{c}$ коллинеарны.

РЕШЕНИЕ

Запишем условие коллинеарности векторов $p\bar{a}+q\bar{b}+\bar{c}$, $\bar{a}+p\bar{b}+q\bar{c}$:

$$a+p\bar{b}+q\bar{c}=\alpha(p\bar{a}+q\bar{b}+\bar{c}), \text{ или}$$

$$(\alpha p-1)\bar{a}+(\alpha q-p)\bar{b}+(\alpha-q)\bar{c}=\bar{0}, \text{ откуда}$$

$$\alpha p=1$$

$$\alpha q=p$$

$$\alpha=q, \text{ имеем}$$

$$p=q=1$$

Задача 9. (Ск. IV. 15.136).

Даны три некомпланарных вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$. Доказать, что векторы $\bar{a}+2\bar{b}-\bar{c}$, $3\bar{a}-\bar{b}+\bar{c}$, $-\bar{a}+5\bar{b}-3\bar{c}$ компланарны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Согласно критерию компланарности трех векторов, достаточно найти три числа α, β и γ, удовлетворяющих условиям

$$\alpha(\bar{a}+2\bar{b}-\bar{c})+\beta(3\bar{a}-\bar{b}+c)+\gamma(-\bar{a}+5\bar{b}-3\bar{c})=\bar{0} \quad (1)$$

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2>0 \quad (2)$$

Условие (2) эквивалентно тому, что по крайней мере одно число α, β или γ не равно нулю.

Преобразуем выражение (1) к виду

$$(\alpha+3\beta-\gamma)\bar{a}+(2\alpha-\beta+5\gamma)\bar{b}+(-\alpha+\beta-3\gamma)\bar{c}=\bar{0}$$

Так как $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ некомпланарны, то

$$\alpha+3\beta-\gamma=0$$

$$2\alpha-\beta+5\gamma=0$$

$$-\alpha+\beta-3\gamma=0$$

Одним из ненулевых решений системы будет тройка чисел

$$\alpha=-2,\quad \beta=1,\quad \gamma=1.$$

А это значит, что утверждение задачи доказано.

Заметим, что

$$(3\bar{a}-\bar{b}+c)+(-\bar{a}+5\bar{b}-3\bar{c})=2(\bar{a}+2\bar{b}-\bar{c}),$$

что также доказывает утверждение задачи. (Мы воспользовались конкретным условием задачи.)

Задача 10.

$ABCDEF$ — правильный шестиугольник. Доказать, что

$$\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{AD}+\overline{AE}+\overline{AF}=3\overline{AD}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Заметим, что $\overline{AE}=\overline{BD}$, $\overline{AF}=\overline{CD}$ (рис. 3.2).

Далее $\overline{AB}+\overline{AE}=\overline{AD}$,

$\overline{AC}+\overline{AF}=\overline{AD}$

Поэтому $\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{AD}+\overline{AE}+\overline{AF}=3\overline{AD}$

Задача 11. (Ск. V.17.033).

Пусть 0 — точка пересечения медиан треугольника ABC и $\overline{AO}=\bar{a}$, $\overline{AC}=\bar{b}$. Разложить $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$ по векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

РЕШЕНИЕ

Сделаем параллельный перенос векторов $\overline{AC}$ и $\overline{AB}$ на вектор $\overline{AO}$ (рис. 3.3). Получим параллелограмм $AFOE$. Поскольку O — точка

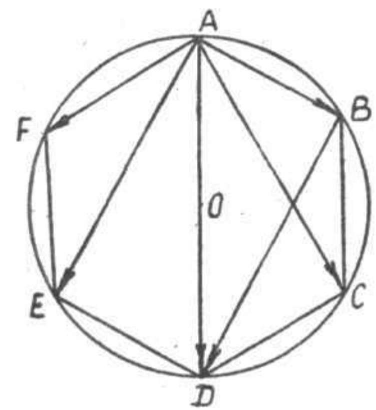


Рис. 3.2

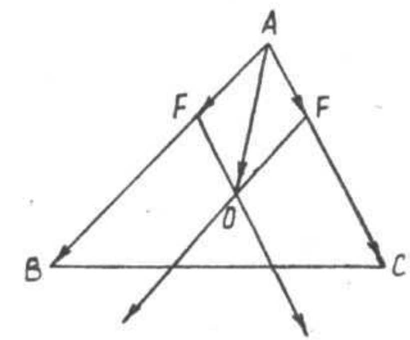


Рис. 3.3

пересечения медиан треугольника ABC, то $\overline{AF}=\frac{1}{3}\overline{AC}$, $\overline{AE}=\frac{1}{3}\overline{AB}$ и

$$\overline{AO}=\frac{1}{3}\overline{AB}+\frac{1}{3}\overline{AC},$$

значит, $\overline{AB}=3\bar{a}-\bar{b}$.

Разложим теперь вектор $\overline{BC}$ по векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

$$\frac{1}{2}\overline{BC}=\overline{AC}-\frac{3}{2}\overline{AO}, \text{ или}$$

$$\overline{BC}=2\bar{b}-3\bar{a}$$

Задача 12. (Ск. V. 17.034).

При каких значениях x векторы $(x^3-1)\bar{a}$ и $2x\bar{a}$ сонаправлены, если $\bar{a}\neq\bar{0}$.

РЕШЕНИЕ

Если векторы $\alpha\bar{a}$ и $\beta\bar{a}$ сонаправлены, то знаки α и β совпадают:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^3-1>0\\2x>0\end{cases}\\ \begin{cases}x^3-1<0\\2x<0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>1\\x<0,\ \text{итак,}\end{array}\right.$$

$x\in(-\infty;\ 0)\cup(1;\ +\infty)$

Задача 13. (Ск. V. 17.035)

При каких m векторы $(m^2-m-2)\bar{b}$ и $m^3\bar{b}$ противоположно направлены, если $\bar{b}\neq\bar{0}$?

Решение: $$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}m^2-m-2>0\\m^3<0\end{cases}\\ \begin{cases}m^2-m-2<0\\m^3>0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m<-1\\0<m<2\end{array}\right.$$

$m\in(-\infty;\ -1)\cup(0;\ 2)$

Задача 14. (Ск. V. 17.036).

При каких значениях x векторы $(5x-x^2)\bar{a}$ и $\bar{a}$ сонаправлены и $|(x-5)\bar{a}|\leqslant|3\bar{a}|$? $(\bar{a}\neq\bar{0})$

РЕШЕНИЕ

$$\begin{cases}5x-x^2>0\\|(x-5)\bar{a}|\leqslant|3\bar{a}|\end{cases}$$

Поскольку решением первого неравенства будет промежуток $(0;\ 5)$, а второго $[2;\ 8]$, то $x\in[2;\ 5)$

Задача 15. (Ск. V. 17.037)

При каких значениях y векторы $(3y^2-11y+6)\bar{p}$ и $(y^2+1)\bar{p}$ противоположно направлены, если $\bar{p}\neq0$

РЕШЕНИЕ

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}3y^2-11y+6>0\\y^2+1<0\end{cases}\\ \begin{cases}3y^2-11y+6<0\\y^2+1>0\end{cases}\end{array}\right.,\quad y\in\left(\frac{2}{3};\ 3\right)$$

Задача 16. (Ск. V. 17.039)

При каких x верно неравенство

$$|(x-2)\bar{a}|>3|\bar{a}|,\ \text{если}\ \bar{a}\neq\bar{0}?$$

РЕШЕНИЕ

$$|x-2|>3,\ \text{или}$$
$$x\in(-\infty;\ -1)\cup(5;\ +\infty)$$

Задача 17. (Ск. V. 17.040)

Пусть K и M — середины сторон BC и CD параллелограмма $ABCD$ и $\overline{AK}=\bar{a}$, $\overline{AM}=\bar{b}$. Выразить векторы $\overline{BD}$ и $\overline{AD}$ через $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

РЕШЕНИЕ

Поскольку $\overline{AK}=\overline{AB}+\overline{BK}$ и $\overline{AM}=2\overline{BK}+\frac{1}{2}\overline{AB}$ (рис. 3.4), то

$$\overline{BK}=\frac{2}{3}\bar{b}-\frac{1}{3}\bar{a}$$
$$\overline{AB}=\frac{4}{3}\bar{a}-\frac{2}{3}\bar{b}$$

Поэтому $\overline{BD}=-\overline{AB}+2\overline{BK}=2(\bar{b}-\bar{a})$

$$\overline{AD}=2\overline{BK}=\frac{4}{3}\bar{b}-\frac{2}{3}\bar{a}$$

Задача 18. (Ск. IV. 15.160)

В окружности с центром O проведены две перпендикулярные хорды AB и CD, пересекающиеся в точке M. Выразить вектор $\overline{OM}$ через $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ и $\overline{OD}$.

РЕШЕНИЕ

Проведем два диаметра окружности, соответственно перпендикулярные хордам AB и CD (рис. 3.5). Точки пересечения диаметров и хорд обозначим K и N. Четырехугольник $OKMN$— прямоугольник, поэтому $\overline{OM}=\overline{OK}+\overline{ON}$. Но $\overline{OK}=\frac{1}{2}(\overline{OA}+\overline{OB})$, $\overline{ON}=\frac{1}{2}(\overline{OC}+\overline{OD})$, поэтому

$$\overline{OM}=\frac{1}{2}(\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}+\overline{OD})$$

Задача 19. (Ск. V. 17.041)

В параллелограмме $ABCD$ (рис. 3.6) дано: $M\in BC$ и $BM:MC=1:2$; $N\in DC$; $DN:NC=1:2$, $\overline{AM}=\bar{a}$, $\overline{AN}=\bar{b}$. Выразить векторы $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{MN}$ и $\overline{BD}$ через $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

РЕШЕНИЕ

$$\overline{AM}=\overline{AB}+\overline{BM}=\overline{AB}+\frac{1}{3}\cdot\overline{BC}$$
$$\overline{AN}=\overline{AD}+\overline{DN}=\overline{BC}+\frac{1}{3}\overline{AB},$$

отсюда

$$\overline{BC}=\overline{AD}=\frac{9}{8}\bar{b}-\frac{3}{8}\bar{a}$$
$$\overline{AB}=\frac{9}{8}\bar{a}-\frac{3}{8}\bar{b},$$

$$\overline{BD} = -\overline{AB} + \overline{BC} = \frac{3}{2}\,\bar{b} - \frac{3}{2}\,\bar{a}$$

$$\overline{MN} = \frac{2}{3}\,\overline{BC} - \frac{2}{3}\,\overline{AB} = \bar{b} - \bar{a}$$

Задача 20. (Ск. V. 17.113)

Дан правильный пятиугольник $ABCDE$. Разложить векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AE}$ по векторам $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$.

РЕШЕНИЕ

Ясно, что $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}$ (рис. 3.7). Так как пятиугольник правильный, то $BC \parallel AD$, значит

$$|\overline{BC}| = \kappa\,|\overline{AD}| \qquad (1)$$

$$\text{и } \overline{AB} = \overline{AC} - \kappa\overline{AD} \qquad (2)$$

Пусть a — длина стороны пятиугольника. Тогда $AD = 2a\cos 36^\circ = \frac{a(\sqrt{5}+1)}{2}$. Спроектируем вершину B на AD. Тогда $AD = BC + 2AF$. Учитывая равенство (1), имеем

$$AD = \kappa AD + 2AF$$

Поскольку $AF = a\sin 18^\circ = \frac{a(\sqrt{5}-1)}{4}$, то $\kappa = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Таким образом, учитывая соотношение (2), имеем

$$\overline{AB} = \overline{AC} + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\,\overline{AD}$$

Аналогично,

$$\overline{AE} = \overline{AD} + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\,\overline{AC}.$$

Задача 21. (Ск. IV. 15.145)

Через середину M медианы CC_1 треугольника ABC (рис. 3.8) проведена прямая AM, пересекающая сторону BC в точке P. Доказать, что $|\overline{CP}| : |\overline{PB}| = 1:2$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Поскольку точка P принадлежит отрезку BC, то

$$\overline{CP} = \alpha\overline{CB}$$

С другой стороны, $\overline{CP} = \overline{CA} + \beta\overline{AM}$, поэтому $\alpha\overline{CB} = \overline{CA} + \beta\overline{AM}$. Но $\overline{AM} = \overline{CM} - \overline{CA} = \frac{1}{2}\,\overline{CC_1} - \overline{CA} = \frac{1}{4}\,(\overline{CA} + \overline{CB}) - \overline{CA} = \frac{1}{4}\,\overline{CB} - \frac{3}{4}\,\overline{CA}.$

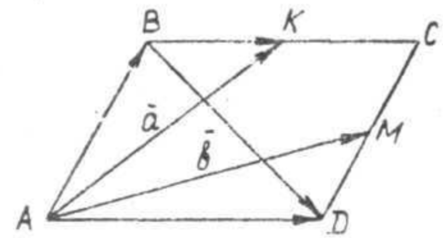


Рис. 3.4

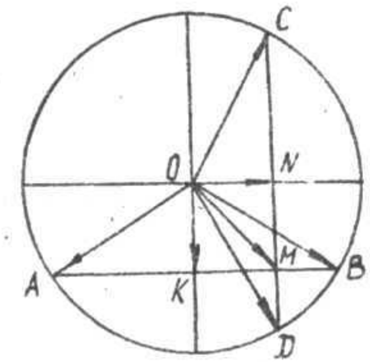


Рис. 3.5

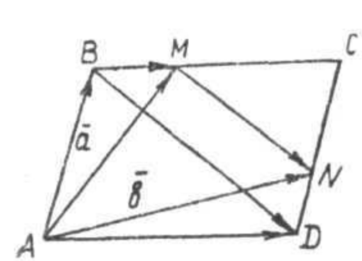


Рис. 3.6

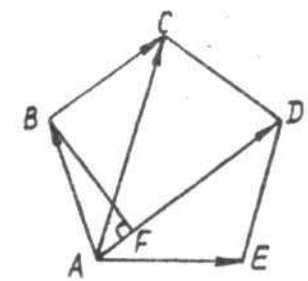


Рис. 3.7

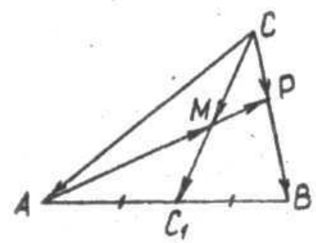


Рис. 3.8

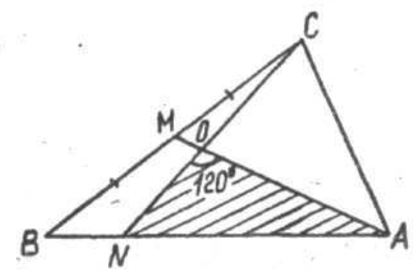


Рис. 3.9

Отсюда

$$\alpha\overline{CB} = \overline{CA} + \beta\left(\frac{1}{4}\overline{CB} - \frac{3}{4}\overline{CA}\right)$$

$$\left(\alpha - \frac{1}{4}\beta\right)\overline{CB} = \left(1 - \frac{3}{4}\beta\right)\overline{CA}.$$

Так как векторы $\overline{CA}$ и $\overline{CB}$ неколлинеарны, то равенство выполняется, если

$$\alpha - \frac{1}{4}\beta = 0 \text{ и}$$

$1 - \frac{3}{4}\beta = 0$, откуда $\alpha = \frac{\beta}{4}$; $\beta = \frac{4}{3}$, $\alpha = \frac{1}{3}$.

Таким образом, $\overline{CP} = \frac{1}{3}\overline{CB}$, и

$$|\overline{CP}| : |\overline{PB}| = 1 : 2$$

Задача 22. (Ск. V. 17.063)

В треугольнике ABC точка N (рис. 3.9) лежит на стороне AB и $AN = 3NB$; медиана АМ пересекается с CN в точке O. Найти AB, если $AM = CN = 7$ см и $\angle NOM = 60°$.

РЕШЕНИЕ

Векторным способом, предложенным в предыдущей задаче, найдем отношение $NO : CO$.

$$NO : CO = 3 : 4.$$

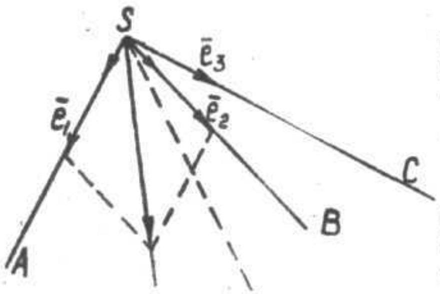


Рис. 3.10

Следовательно, $NO = 3$. Аналогично найдем отношение $MO : OA$ и покажем, что $OA = 6$. Тогда из треугольника OAN следует, что $AN = 3\sqrt{7}$ и $AB = 4\sqrt{7}$.

Задача 23. (Ск. IV. 15.186)

Доказать, что биссектрисы двух плоских углов трехгранного угла и биссектриса угла, смежного с третьим плоским углом, лежат в одной плоскости.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

От вершины данного угла отложим на ребрах единичные векторы $\bar{l}_1, \bar{l}_2, \bar{l}_3$ (рис. 3.10). Рассмотрим грань ASB, ребрам которой принадлежат единичные векторы $\bar{l}_1$ и $\bar{l}_2$. Тогда диагональ ромба, построенного на этих векторах, будет принадлежать биссектрисе угла ASB. Значит, вектор $\bar{l}_1 + \bar{l}_2$ определяет направление биссектрисы. Аналогично, векторы $\bar{l}_1 + \bar{l}_3$ и $\bar{l}_3 - \bar{l}_2$ определяют направление другой биссектрисы и биссектрисы угла, смежного с третьим плоским углом.

Поскольку $\bar{l}_3 - \bar{l}_2 + \bar{l}_1 + \bar{l}_2 = \bar{l}_1 + \bar{l}_3$, то векторы $\bar{l}_3 - \bar{l}_2$, $\bar{l}_1 + \bar{l}_2$ и $\bar{l}_1 + \bar{l}_3$ — компланарны, что доказывает утверждение задачи.

Задача 24.

Площади четырехугольников $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ равны S и S_1 соответственно. Доказать, что если внутри четырехугольника $ABCD$ существует такая точка X, для которой $\overline{XA} = \overline{A_1B_1}$, $\overline{XB} = \overline{B_1C_1}$, $\overline{XC} = \overline{C_1D_1}$, $\overline{XD} = \overline{D_1A_1}$, то $S = 2S_1$,

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Построим параллелограммы $XAMB$ и $A_1B_1C_1N$ на векторах $\overline{XA}$ и $\overline{XB}$ и $\overline{A_1B_1}$, $\overline{B_1C_1}$ (рис. 3.11). Учитывая условия, утверждаем, что эти параллелограммы равны, поэтому

$$S_{AXB} = S_{A_1B_1C_1}.$$

Аналогично

$$S_{BXC} = S_{B_1C_1D_1}, \quad S_{CXD} = S_{C_1D_1A_1},$$
$$S_{DXA} = S_{D_1A_1B_1}, \text{ откуда}$$

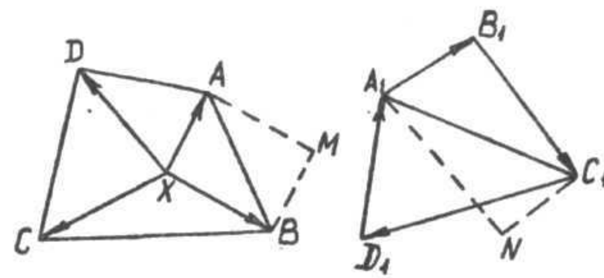


Рис. 3.11

$S = S_{AXB} + S_{BXC} + S_{CXD} + S_{DXA} = (S_{A_1B_1C_1} + S_{A_1D_1C_1}) + (S_{B_1C_1D_1} + S_{B_1A_1D_1}) = 2S_1$, что и требовалось доказать.

Задача 25. (Ск. IV. 15.247)

Даны два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$, не лежащие в одной плоскости; M и N — середины сторон AC и BC, а M_1 и N_1 — середины сторон A_1C_1 и B_1C_1. Доказать, что если $\overline{AB} = \overline{A_1B_1}$, то векторы $\overline{MM_1}$, $\overline{NN_1}$ и $\overline{CC_1}$ компланарны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

$\overline{MM_1} = \frac{1}{2}\overline{AB} + \overline{NN_1} - \frac{1}{2}A_1B_1$ (рис. 3.12). Поскольку по условию $\overline{AB} = \overline{A_1B_1}$, то $\overline{MM_1} = \overline{NN_1}$ а это значит, что векторы $\overline{MM_1}$, $\overline{NN_1}$ и $\overline{CC_1}$ компланарны.

Задача 26. (Ск. V. 17.129)

Дан пятиугольник $ABCDE$. Точки M, N, P и Q — середины его сторон AB, BC, CD, DE. Доказать, что если U и V — середины MP и NQ, то вектор $\overline{UV}$ коллинеарен вектору $\overline{AE}$. Вычислить отношение $AE : UV$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Поскольку $\overline{MU}+\overline{UV}+\overline{VQ}-\overline{MQ}=\bar 0$ (рис. 3.13), то $\overline{UV}= -\frac{1}{2}\overline{MP}+\overline{MQ}-\frac{1}{2}\overline{NQ}=-\frac{1}{2}(\overline{MP}-2\overline{MQ}+\overline{NQ})$.

Поскольку $\overline{MN}+\overline{NM}=\bar 0$, то $\overline{MP}+\overline{PN}+\overline{NQ}+\overline{QM}=\bar 0$, откуда $\overline{MP}+\overline{NQ}=-\overline{PN}+\overline{MQ}$.

Поэтому $\overline{UV}=\frac{1}{2}(\overline{PN}+\overline{MQ})$, но $\overline{MP}+\overline{PM}=\bar 0$, значит $\overline{MQ}+\overline{QD}+\overline{DP}+\overline{PN}+\overline{NB}+\overline{BM}=\bar 0$

$\overline{MQ}+\overline{PN}=\overline{DQ}+\overline{BN}+\overline{MB}+\overline{PD}=\overline{PQ}+\overline{MN}=\frac{1}{2}(\overline{AC}+\overline{CE})=$

$$=\frac{1}{2}\overline{AE};\quad \text{Отсюда } \overline{UV}=\frac{1}{4}\overline{AE}.$$

Задача 27. (Ск. IV. 15.249)

Даны два треугольника $A_1A_2A_3$ и $A_4A_5A_6$, не лежащие в одной плоскости. Доказать, что векторы $\overline{MN}$, $\overline{PQ}$ и $\overline{RS}$ компланарны, если M, N, P, Q, R и S являются соответственно серединами отрезков A_1A_2, A_4A_5, A_2A_3, A_6A_5, A_3A_4, A_6A_1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Обозначим (рис. 3.14) $\overline{A_2A_1}=\bar a$, $\overline{A_2A_3}=\bar k$, $\overline{A_6A_5}=\bar c$, $\overline{A_4A_5}=\bar d$, $\overline{A_1A_6}=\bar b$, $\overline{A_3A_4}=\bar e$. Тогда $\overline{MN}=\frac{1}{2}\bar a+\bar b+\bar c-\frac{1}{2}\bar d$. $\overline{MN}=-\frac{1}{2}\bar a+\bar k+\bar e+\frac{1}{2}\bar d$. $\overline{MN}=\frac{1}{2}(\bar b+\bar c+\bar k+\bar e)$ $\overline{MN}\overline{PQ}=\frac{1}{2}\bar k+\bar e+\bar d-\frac{1}{2}\bar c-\frac{1}{2}\bar k$ $\overline{PQ}=-\frac{1}{2}\bar k+\bar a+\bar b+\frac{1}{2}\bar c$, значит $\overline{PQ}=\frac{1}{2}(\bar e+\bar d+\bar a+\bar b)$. Докажем, что $\overline{PQ}-\overline{MN}=\overline{RS}$.

Действительно, $\overline{PQ}-\overline{MN}=\frac{1}{2}(\bar e+\bar d+\bar a+\bar b-\bar b-\bar c-\bar k-\bar e)=\frac{1}{2}(\bar a+\bar d-\bar c-\bar k)$

$$\overline{RS}=-\frac{1}{2}\bar e-\bar k+\bar a+\frac{1}{2}\bar b$$

$\overline{RS}=-\frac{1}{2}\bar b-\bar c+\bar d+\frac{1}{2}\bar e$, значит $\overline{RS}=\frac{1}{2}(\bar a-\bar c-\bar k+\bar d)=\overline{PQ}-\overline{MN}$, что доказывает утверждение задачи.

Задача 28.

Дан параллелограмм $ABCD$. Прямая l пересекает прямые AB, AC и AD соответственно в точках B_1, C_1 и D_1. Доказать, что если $\overline{AB_1}=\alpha_1\overline{AB}$, $\overline{AD_1}=\alpha_2\cdot\overline{AD}$, $\overline{AC_1}=\alpha_3\overline{AC}$, то

$$\frac{1}{\alpha_3}=\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть $\overline{AB}=\bar a$, $\overline{AD}=\bar b$ и $\overline{AC}=\bar a+\bar b$ (рис. 3.15). Тогда $\overline{AB_1}=\alpha_1\bar a$, $\overline{AD_1}=\alpha_2\bar b$, $\overline{AC_1}=\alpha_3(\bar a+\bar b)$

Так как три точки B_1, C_1, D_1 лежат на одной прямой, то $\overline{B_1C_1}=k\overline{B_1D_1}$ (1). Но $\overline{B_1C_1}=\overline{AC_1}-\overline{AB_1}=(\alpha_3-\alpha_1)\bar a+\alpha_3\bar b$,

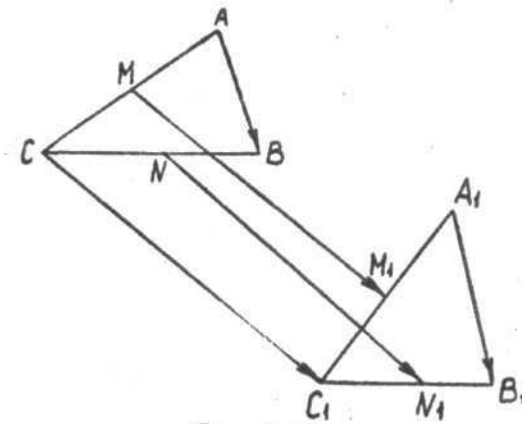


Рис. 3.12

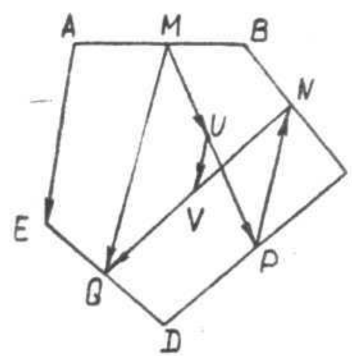


Рис. 3.13

$\overline{B_1D_1}=\overline{AD_1}-\overline{AB_1}=-\alpha_1\bar a+\alpha_2\bar b$. Подставив эти выражения в соотношение (1), получим

$$(\alpha_3-\alpha_1)\bar a+\alpha_3\bar b=k\alpha_2\bar b-k\alpha_1\bar a.$$

На основании единственности разложения вектора по двум неколлинеарным векторам $\bar a$ и $\bar b$ получим систему

$$\begin{cases}\alpha_3-\alpha_1=-k\alpha_1\\ \alpha_3=k\alpha_2\end{cases}$$

Исключив коэффициент k, найдем соотношение между α_1, α_2 и α_3: $\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3=\alpha_1\alpha_2$

Разделив последнее равенство почленно на $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$, имеем

$$\frac{1}{\alpha_3}=\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}$$

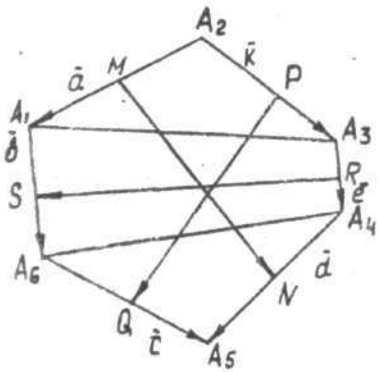


Рис. 3 14

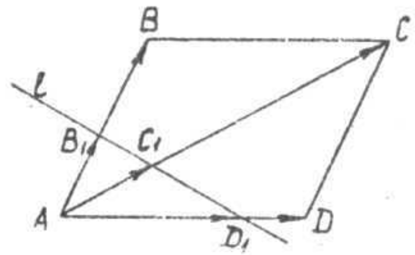


Рис. 3.15

Задача 29.

На сторонах треугольника ABC вне его построены равносторонние треугольники ABC_1, BCA_1 CAB_1. Доказать, что

$$\overline{AA_1}+\overline{BB_1}+\overline{CC_1}=\bar{0}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Поскольку (рис. 3.16) $\overline{AA_1}=\overline{CA_1}-\overline{CA}$, $\overline{BB_1}=\overline{AB_1}-\overline{AB}$, $\overline{CC_1}=\overline{BC_1}-\overline{BC}$, то $\overline{AA_1}+\overline{BB_1}+\overline{CC_1}=(\overline{CA_1}+\overline{AB_1}+\overline{BC_1})-(\overline{CA}+\overline{AB}+\overline{BC})$.

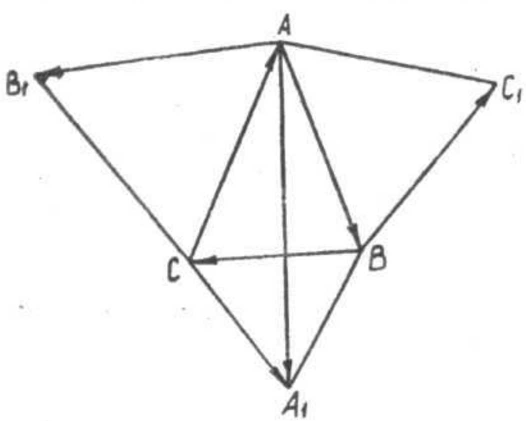


Рис. 3.16

Векторы $\overline{CA_1}$, $\overline{AB_1}$ и $\overline{BC_1}$ могут быть получены соответственно поворотом на 60° векторов $\overline{CB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{BA}$. При этом повороте сумма векторов $\overline{CB}+\overline{AC}+\overline{BA}$ перейдет в сумму векторов $\overline{CA_1}+\overline{AB_1}+\overline{BC_1}$ Но $\overline{CB}+\overline{AC}+\overline{BA}=\bar{0}$, поэтому $\overline{CA_1}+\overline{AB_1}+\overline{BC_1}=\bar{0}$.

Задача 30. (теорема Менелая).

Дан треугольник ABC и прямая a, пересекающая прямую AB в точке M, прямую BC в точке N и прямую AC в точке P. Пусть кроме того $\frac{AM}{MB}=\alpha$, $\frac{BN}{NC}=\beta$, $\frac{CP}{PA}=\gamma$.

Доказать, что $\alpha\cdot\beta\cdot\gamma=1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Поскольку векторы $\overline{AM}$ и $\overline{MB}$ коллинеарны (рис. 3.17), то $\overline{AM}=\alpha_1\overline{MB}$. Аналогично $\overline{BN}=\beta_1\overline{NC}$, $\overline{CP}=\gamma_1\cdot\overline{PA}$, где α_1, β_1, γ_1 — некоторые числа, модуль которых равен α, β, γ. Тогда $\overline{MN}=\overline{MB}+\overline{BN}=\overline{MB}+\beta_1\cdot\overline{NC}$

Поскольку $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=\bar{0}$, то

$$\overline{AM}+\overline{MB}+\overline{BN}+\overline{NC}+\overline{CP}+\overline{PA}=\bar{0},$$

или

$$(1+\alpha_1)\overline{MB}+(1+\beta_1)\overline{NC}+(1+\gamma_1)\cdot\overline{PA}=\bar{0},$$

откуда

$$\overline{PA}=-\frac{1+\alpha_1}{1+\gamma_1}\overline{MB}-\frac{1+\beta_1}{1+\gamma_1}\overline{NC}.$$

Наконец,

$$\overline{PM}=\overline{PA}+\overline{AM}=-\frac{1+\alpha_1}{1+\gamma_1}\overline{MB}-$$

$$-\frac{1+\beta_1}{1+\gamma_1}\overline{NC}+\alpha_1\overline{MB}=\left(\alpha_1-\frac{1+\alpha_1}{1+\gamma_1}\right)\overline{MB}-\frac{1+\beta_1}{1+\gamma_1}\overline{NC}$$

Учитывая коллинеарность векторов $\overline{MN}$ и $\overline{PM}$, имеем

$$k\overline{MB}+k\beta_1\overline{NC}=\left(\alpha_1-\frac{1+\alpha_1}{1+\gamma_1}\right)\overline{MB}-\frac{1+\beta_1}{1+\gamma_1}\overline{NC};$$

$$k=\alpha_1-\frac{1+\alpha_1}{1+\gamma_1}=-\frac{1+\beta_1}{(1+\gamma_1)\beta_1},\text{ откуда}$$

$$\alpha_1\cdot\beta_1\cdot\gamma_1=-1,\text{ тогда }\alpha\cdot\beta\cdot\gamma=1$$

Задача 31. (Ск. V. 17.081)

Даны 3 не нулевых вектора $\bar a$, $\bar b$, $\bar c$, каждые два из которых неколлинеарны. Найти их сумму, если $(\bar a+\bar b)\parallel\bar c$ и $(\bar b+\bar c)\parallel\bar a$.

РЕШЕНИЕ

Первый способ.

По условию векторы $\bar c$ и $\bar a+\bar b$ коллинеарны, а потому

$$\bar c=\alpha(\bar a+\bar b)$$

Аналогично

$$\bar a=\beta(\bar b+\bar c)$$

Выразим вектор $\bar c$ через вектор $\bar b$:

$$\bar c=\alpha(\beta(\bar b+\bar c)+\bar b),\text{ или}$$

$$(1-\alpha\beta)\bar c=\alpha(\beta+1)\bar b,$$

$$(1-\alpha\beta)\cdot\bar c-\alpha(\beta+1)\bar b=\bar{0}.$$

Поскольку векторы $\bar{b}$ и $\bar{c}$ неколлинерны, то

$$\begin{cases} 1-\alpha\beta = 0 \\ \alpha\beta + \alpha = 0, \text{ значит } \alpha = \beta = -1 \text{ и} \end{cases}$$

$$\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = \bar{0}.$$

Второй способ

Пусть векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ имеют общую точку O (рис. 3.18). Поскольку векторы $\bar{b} + \bar{a}$ и $\overline{OC} = \bar{c}$ коллинеарны, а сумма векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ — есть диагональ параллелограмма, то векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ лежат в одной плоскос-

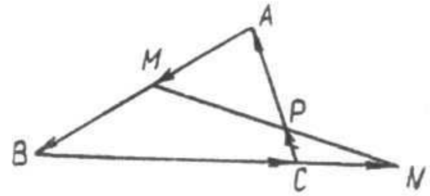


Рис. 3.17

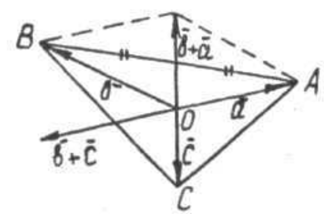


Рис. 3.18

ти и прямая OC делит отрезок AB пополам. Аналогично прямая OA делит отрезок BC пополам, следовательно, точка O — центроид треугольника ABC, в котором отрезки медиан от вершин до точки пересечения совпадают с векторами $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$, следовательно,

$$\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = \bar{0}$$

Задача 32.

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \bar{x}\bar{a} = t_1 \\ \bar{x}\bar{b} = t_2, \end{cases}$$

где t_1 и t_2 — действительные числа, $\bar{a}$, $\bar{b}$ — данные неколлинеарные и ненулевые векторы.

РЕШЕНИЕ

Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ неколлинеарны, поэтому $\bar{x} = k\bar{a} + p\bar{b}$. Из данной системы получаем

$$\begin{cases} (k\bar{a} + p\bar{b})\,\bar{a} = t_1 \\ (k\bar{a} + p\bar{b})\,\bar{b} = t_2, \text{ далее} \end{cases}$$

$$k\,|\bar{a}|^2 + p\,|\bar{a}\cdot\bar{b}| = t_1$$

$$k(\bar{a}\cdot\bar{b}) + p\,|\bar{b}|^2 = t_2,$$

откуда $k = \dfrac{t_1\,|\bar{b}|^2 - t_2\,(\bar{a}\cdot\bar{b})}{|\bar{a}|^2\cdot|\bar{b}|^2 - (\bar{a}\cdot\bar{b})^2}$,

$$p = \frac{t_2\,|\bar{a}|^2 - t_1\,(\bar{a}\cdot\bar{b})}{|\bar{a}|^2\,|\bar{b}|^2 - (\bar{a}\cdot\bar{b})^2} \text{ и}$$

$$\bar{x} = \frac{t_1\,|\bar{b}|^2 - t_2\,(\bar{a}\cdot\bar{b})}{|\bar{a}|^2\,|\bar{b}|^2 - (\bar{a}\cdot\bar{b})^2}\,\bar{a} + \frac{t_2\,|\bar{a}|^2 - t_1\,(\bar{a}\cdot\bar{b})}{|\bar{a}|^2\,|\bar{b}|^2 - (\bar{a}\bar{b})^2}\,\bar{b}$$

Задача 33. (Ск. V. 17.123)

Дан треугольник ABC. (рис. 3.19). Прямая l пересекает прямые BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1. Доказать, что векторы $\overline{AB} + \overline{A_1B_1}$, $\overline{BC} + \overline{B_1C_1}$, $\overline{CA} + \overline{C_1A_1}$ коллинеарны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

По условию $\overline{C_1B} = k\overline{AB}$

$\overline{BA_1} = \alpha\overline{BC}$

$\overline{B_1C} = \beta\overline{CA}$

Тогда $\overline{C_1A_1} = k\overline{AB} + \alpha\cdot\overline{BC}$, $\overline{B_1C_1} = (1-k)\,\overline{AB} + (1+\beta)\,\overline{CA}$

$\overline{A_1B_1} = (1-\alpha)\,\overline{BC} - \beta\overline{CA}$. Следовательно,

$$\overline{AB} + \overline{A_1B_1} = -(1+\beta)\,\overline{CA} - \alpha\overline{BC};$$

$$\overline{BC} + \overline{B_1C_1} = (\beta + k)\,\overline{CA} + k\overline{BC},$$

$$\overline{CA} + \overline{C_1A_1} = (1-k)\,\overline{CA} + (\alpha - k)\,\overline{BC}$$

Но $\overline{AB} + \overline{A_1B_1} + \overline{BC} + \overline{B_1C_1} + \overline{CA} + \overline{C_1A_1} = \bar{0}$ и векторы $\overline{AB} + \overline{A_1B_1}$; $\overline{BC} + \overline{B_1C_1}$, $\overline{CA} + \overline{C_1A_1}$ разлагаются на векторы, отличающиеся коэффициентами. Значит, их сумма есть нуль-вектор, в том случае, когда они коллинеарны.

Задача 34.

Доказать, что биссектрисы внутренних углов треугольника пересекаются в одной точке.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Обозначим $\overline{AB} = \bar{c}$, $\overline{BC} = \bar{a}$, $\overline{CA} = \bar{b}$ (рис. 3.20) Определим векторы $\overline{AL_1}$, $\overline{BL_2}$, $\overline{CL_3}$, которые принадлежат биссектрисам l_a, l_b, l_c и заметим, что $\angle A = (\widehat{-\bar{b}, \bar{c}})$, $\angle B = (\widehat{-\bar{c}, \bar{a}})$, $\angle C = (\widehat{-\bar{a}, \bar{b}})$. Имеем:

$$\overline{AL_1} = \frac{b\bar{c} - c\bar{b}}{b+c}, \quad \overline{BL_2} = \frac{c\bar{a} - a\bar{c}}{a+c}, \quad \overline{CL_3} = \frac{a\bar{b} - b\bar{a}}{a+b}.$$

Обозначим I — точку пересечения биссектрис AL_1 и BL_2 и покажем, что эта точка принадлежит биссектрисе CL_3. Для этого докажем, что вектор $\overline{CI}$ коллинеарен вектору $\overline{CL_3}$. Итак,

$$\overline{CI} = \overline{CA} + \overline{AI}.$$

$$\overline{AI} = t_1\overline{AL_1} = t_1 \frac{b\bar c - c\bar b}{b+c},$$

$$\overline{BI} = t_2\overline{BL_2} = \frac{c\bar a - a\bar c}{a+c}\, t_2,$$

$$\overline{AI} = \overline{AB} + \overline{BI}$$

$$\frac{b\bar c - c\bar b}{b+c}\, t_1 = \bar c + \frac{c\bar a - a\bar c}{a+c}\, t_2 \qquad (1)$$

Поскольку $\bar a + \bar b + \bar c = \bar 0$, то $\bar c = -\bar a - \bar b$. Подставим в равенство (1). Получим

$$\frac{b(-\bar a - \bar b) - c\bar b}{b+c}\, t_1 = (-\bar a - \bar b) + \frac{c\bar a - a(-\bar a - \bar b)}{a+c}\, t_2,$$

или

$$\bar a\left(-\frac{bt_1}{b+c}\right) + \bar b\left(-\frac{ct_1}{b+c} - \frac{bt_1}{b+c}\right) =$$

$$= \bar a\left(-1 + \frac{ct_2}{a+c} + \frac{at_2}{a+c}\right) + \bar b\left(-1 + \frac{at_2}{a+c}\right)$$

или

$$\bar a\left(-\frac{bt_1}{b+c}\right) - \bar b t_1 = \bar a(-1 + t_2) + \bar b\left(-1 + \frac{at_2}{a+c}\right).$$

Значит,

$$\begin{cases} -\dfrac{bt_1}{b+c} = -1 + t_2 \\ -t_1 = -1 + \dfrac{at_2}{a+c} \end{cases}$$

Решив эту систему, получим

$$t_1 = \frac{b+c}{a+b+c} \text{ и } t_2 = \frac{a+c}{a+b+c}$$

Тогда $\overline{AI} = t_1\overline{AL_1} = \dfrac{b\bar c - c\bar b}{a+b+c}$ *и*

$$\overline{CI} = \overline{CA} + \overline{AI} = \frac{a\bar b + b(\bar b + \bar c)}{a+b+c}.$$

Но, тогда

$$\overline{CI} = \frac{a\bar b - b\bar a}{a+b+c}$$

Видим, что $\overline{CI} \parallel \overline{CL_3}$, т. е. точка I принадлежит биссектрисе CL_3.

Задача 35.

Доказать, что биссектриса внутреннего угла треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника.

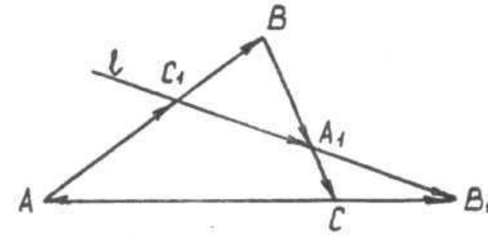


Рис. 3.19

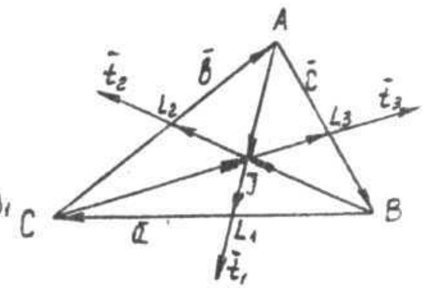


Рис. 3.20

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Обозначим $\overline{BA} = \bar a$, $\overline{BC} = \bar b$ (рис. 3.21), векторы $\dfrac{\bar a}{|\bar a|}$ и $\dfrac{\bar b}{|\bar b|}$ — единичные. Вектор $\dfrac{\bar a}{|\bar a|} + \dfrac{\bar b}{|\bar b|}$ коллинеарен биссектрисе угла ABC (так как, если построить на векторах $\dfrac{\bar a}{|\bar a|}$ и $\dfrac{\bar b}{|\bar b|}$, как на сторонах, параллелограмм, то он будет ромбом, а его диагональ будет принадлежать биссектрисе угла ABC).

Итак, поскольку векторы $\dfrac{\bar a}{|\bar a|} + \dfrac{\bar b}{|\bar b|}$ и $\overline{BD}$ коллинеарны, то

$$\overline{BD} = x\left(\frac{\bar a}{|\bar a|} + \frac{\bar b}{|\bar b|}\right).$$

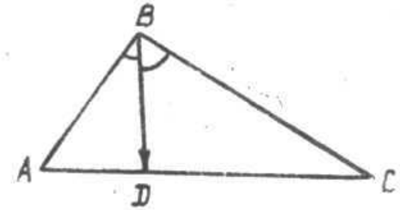


Рис. 3.21

Тогда

$$\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BD} = -\bar a + x\left(\frac{\bar a}{|\bar a|} + \frac{\bar b}{|\bar b|}\right) = \left(\frac{x}{|\bar a|} - 1\right)\bar a + \frac{x}{|\bar b|}\bar b,$$

$$\overline{DC} = \overline{BC} - \overline{BD} = \bar b - x\left(\frac{\bar a}{|\bar a|} + \frac{\bar b}{|\bar b|}\right) = -\frac{x}{|\bar a|}\bar a + \left(1 - \frac{x}{|\bar b|}\right)\bar b$$

Обозначим $AD : DC = \alpha$. Поскольку векторы $\overline{AD}$ и $\overline{DC}$ сонаправлены, то $\overline{AD} = \alpha\overline{DC}$. Подставив вместо $\overline{AD}$ и $\overline{DC}$ их значения, получим:

$$\left(\frac{x}{|\bar a|} - 1\right)\bar a + \frac{x}{|\bar b|}\bar b = -\frac{\alpha x}{|\bar a|}\bar a + \alpha\left(1 - \frac{x}{|\bar b|}\right)\bar b,$$

или

$$\left(\frac{x}{|\bar{a}|}+\frac{\alpha x}{|\bar{a}|}-1\right)\bar{a}+\left(\frac{x}{|\bar{b}|}+\frac{\alpha x}{|\bar{b}|}-\alpha\right)\bar{b}=\bar{0}$$

Значит,

$$\begin{cases}\dfrac{x+\alpha x}{|\bar{a}|}-1=0\\ \dfrac{x+\alpha x}{|\bar{b}|}=\alpha\end{cases}, \text{ отсюда}$$

$\alpha|\bar{b}|=|\bar{a}|$, $\alpha=\frac{|\bar{a}|}{|\bar{b}|}$, т. е. $\frac{AD}{DC}=\frac{AB}{BC}$

4. МЕТОД «ПРОКОЛА»

С помощью некоторой точки X и формул (2.1) и (2.2) всякий вектор можно выразить в виде суммы или разности двух векторов:

$$\overline{AB}=\overline{AX}+\overline{XB}$$
$$\overline{AB}=\overline{XB}-\overline{XA}$$

Выбор точки X для «прокола» диктуется условием задачи и часто зависит от опыта и интуиции решающего. Точку X иногда называют «полюсом».

Задача 1.

Доказать, что средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна полусумме их длин.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

В трапеции $ABCD$ (рис. 4.1) M и N — середины сторон AB и DC.

Пусть X — произвольная точка. Тогда $\overline{MN}=\overline{XN}-\overline{XM}$, $2\overline{XN}=\overline{XD}+\overline{XC}$, $2\cdot\overline{XM}=\overline{XA}+\overline{XB}$, значит, $\overline{MN}=\frac{1}{2}(\overline{XD}+\overline{XC}-\overline{XA}-\overline{XB})=\frac{1}{2}(\overline{XD}-\overline{XA}+\overline{XC}-\overline{XB})=\frac{1}{2}(\overline{AD}+\overline{BC})$, что доказывает утверждение задачи.

Задача 2.

Пусть A, B, C — произвольные точки прямой. K, L, M — середины отрезков AB, AC, BC. Доказать, что $KL=BM$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть X — произвольная точка. Тогда

$$2\overline{XK}=\overline{XA}+\overline{XB}$$
$$2\overline{XL}=\overline{XA}+\overline{XC}$$
$$2\overline{XM}=\overline{XC}+\overline{XB}$$
$$\overline{KL}=\overline{XL}-\overline{XK}=\frac{1}{2}(\overline{XC}-\overline{XB})$$
$$\overline{BM}=\overline{XM}-\overline{XB}=\frac{1}{2}(\overline{XC}+\overline{XB})-\overline{XB}=$$
$$=\frac{1}{2}(\overline{XC}-\overline{XB}),\text{ следовательно, } KL=BM$$

Задача 3.

В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) вектор $\bar{p} = \overline{AC} + \overline{BD}$ коллинеарен вектору $\overline{AD}$. Доказать.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

«Проколем» вектор $\overline{AC}$ точкой B, а вектор $\overline{BD}$ точкой A (рис. 4.2):

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$$
$$\overline{BD} = \overline{AD} - \overline{AB}$$

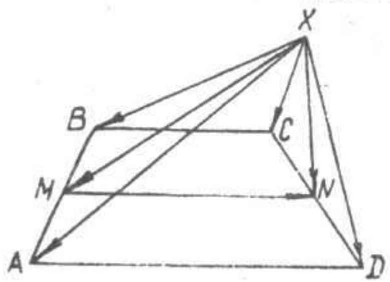


Рис. 4.1

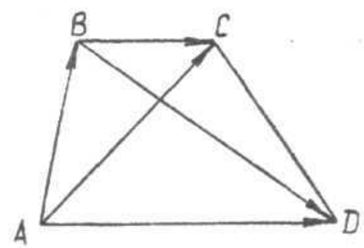


Рис. 4.2

Поскольку векторы $\overline{BC}$ и $\overline{AD}$ коллинеарны, то $\overline{BC} = \alpha\overline{AD}$ и $\bar{p} = \overline{AC} + \overline{BD} = \overline{AB} + \alpha \cdot \overline{AD} + \overline{AD} - \overline{AB} = (\alpha + 1) \cdot \overline{AD}$, что доказывает утверждение задачи.

Задача 4.

Какой вид имеет четырехугольник $ABCD$, если

$$\overline{AB} \cdot \overline{AD} + \overline{BA} \cdot \overline{BC} + \overline{CB} \cdot \overline{CD} + \overline{DC} \cdot \overline{DA} = 0?$$

РЕШЕНИЕ

$\overline{AB} \cdot \overline{AD} + \overline{BA} \cdot \overline{BC} + \overline{CB} \cdot \overline{CD} + \overline{DC} \cdot \overline{DA} = \overline{AB}\,(\overline{AD} + \overline{CB}) + \overline{CD}$ $(\overline{AD} + \overline{CB}) = (\overline{AD} + \overline{CB})\,(\overline{AB} + \overline{CD})$, но $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{DB} + \overline{CB} + \overline{BD} = \overline{AD} + \overline{CB}$, т. е. имеем $(\overline{AD} + \overline{CB})^2 = 0$, отсюда $\overline{AD} = \overline{BC}$. Значит, $ABCD$ — параллелограм.

Задача 5.

Точки M_1 и M_2 — середины отрезков A_1B_1 и A_2B_2 соответственно. Докажите, что

$$\overline{M_1M_2} = \frac{1}{2}\,(\overline{A_1A_2} + \overline{B_1B_2})$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

$$\overline{M_1M_2} = \overline{XM_2} - \overline{XM_1} = \frac{1}{2}\,(\overline{XA_2} + \overline{XB_2}) - \frac{1}{2}\,(\overline{XA_1} + \overline{XB_1}) =$$
$$= \frac{1}{2}\,(\overline{XA_2} - \overline{XA_1}) + \frac{1}{2}\,(\overline{XB_2} - \overline{XB_1}) = \frac{1}{2}\,(\overline{A_1A_2} + \overline{B_1B_2})$$

Задача 6. (Ск. V. 17.084)

Доказать, что для любых четырех данных точек A, B, C и D имеет место равенство

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AC} \cdot \overline{DB} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} = 0$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

$$\overline{AB}\,(\overline{CA} + \overline{AD}) + \overline{AC}\,(\overline{DA} + \overline{AB}) + \overline{AD}\,(\overline{BA} + \overline{AC}) = \overline{AB}$$
$$\overline{CA} + \overline{AD} \cdot \overline{AB} + \overline{AC} \cdot \overline{DA} + \overline{AC} \cdot \overline{AB} + \overline{AD} \cdot \overline{BA} + \overline{AD} \cdot \overline{AC} = 0$$

Задача 7.

$DABC$ — тетраэдр. Доказать, что $\overline{AD} + \overline{BC} = \overline{BD} + \overline{AC}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

$\overline{AD} + \overline{BC} = \overline{BD} + \overline{AC}$ равнозначно $\overline{AD} - \overline{BD} = \overline{AC} - \overline{BC}$.

Но $\overline{AD} - \overline{BD} = \overline{AB}$, $\overline{AC} - \overline{BC} = \overline{AB}$. Поэтому

$$\overline{AD} - \overline{BD} = \overline{AC} - \overline{BC}, \quad \overline{AB} = \overline{AB}.$$

Задача 8.

Пусть M принадлежит отрезку AB и $AM : MB = m : n$. Пусть X — произвольная точка. Доказать, что

$$\overline{XM} = \frac{n}{m+n}\,\overline{XA} + \frac{m}{m+n}\,\overline{XB} \qquad (4.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

$$\overline{XM} = \overline{XA} + \overline{AM} = \overline{XA} + \frac{m}{m+n}\,(\overline{AX} + \overline{XB}) = \overline{XA} - \frac{m}{m+n}\,\overline{XA} +$$
$$+ \frac{m}{m+n}\,\overline{XB} = \frac{n}{m+n}\,\overline{XA} + \frac{m}{m+n}\,\overline{XB}$$ (рис. 4.3)

Задача 9.

Если точки M и N принадлежат отрезкам AB и CD и $AM : MB = CN : ND = m : n$, то

$$\overline{MN} = \frac{n}{m+n}\,\overline{AC} + \frac{m}{m+n}\,\overline{BD}. \qquad (4.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

По формуле (4.1), (рис. 4.4)

$$\overline{MN} = \frac{m}{m+n}\,\overline{MD} + \frac{n}{m+n}\,\overline{MC} =$$
$$= \frac{m}{m+n}\,(\overline{MB} + \overline{BD}) + \frac{n}{m+n}\,(\overline{MA} + \overline{AC}) =$$
$$= \frac{m}{m+n}\,\overline{BD} + \frac{n}{m+n}\,\overline{AC} + \frac{1}{m+n}\,(m\overline{MB} + n\overline{MA}).$$

Выражение в скобках равно $\bar{0}$, значит, утверждение задачи доказано.

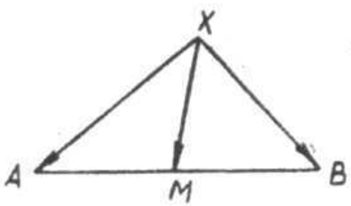


Рис. 4.3

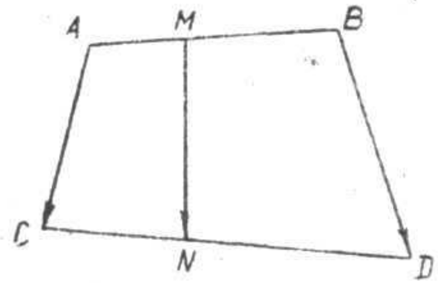


Рис. 4.4

Задача 10. (Ск. IV. 15.172)

Точки A_1, B_1, C_1 — середины сторон BC, CA и AB треугольника ABC. Через точку M проведены прямые MA_1, MB_1, MC_1. Доказать, что прямые p, q, r, проведенные через A, B и C паралельно соответственно MA_1, MB_1, MC_1, пересекаются в одной точке.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Обозначим прямые $MB_1 = m$, $MA_1 = n$, $MC_1 = l$.

Докажем, что $m \parallel KB$, K — точка пересечения прямых p и r.

$$\overline{KB} = \overline{MB} - \overline{MK}$$

Но $\overline{MK} = \overline{MC} + \overline{CK} = \overline{MC} + \alpha\overline{MC_1} = \overline{MC} + \frac{\alpha}{2}\overline{MA} + \frac{\alpha}{2}\overline{MB}$

С другой стороны,

$$\overline{MK} = \overline{MA} + \overline{AK} = \overline{MA} + \beta\overline{MA_1} =$$
$$= \overline{MA} + \frac{\beta}{2}\cdot\overline{MC} + \frac{\beta}{2}\overline{MB}, \text{ отсюда}$$

$$\overline{MC} + \frac{\alpha}{2}\cdot\overline{MA} + \frac{\alpha}{2}\cdot\overline{MB} = \overline{MA} + \frac{\beta}{2}\overline{MC} + \frac{\beta}{2}\overline{MB}.$$

Учитывая, что $\overline{MB} = \overline{MA} + \overline{AB}$, имеем:

$$1 = \frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{2}, \quad \alpha = \beta = 2$$

и

$$\overline{MK} = \overline{MC} + \overline{MA} + \overline{MB},$$
$$\overline{KB} = \overline{MB} - \overline{MC} - \overline{MA} - \overline{MB} = -2\overline{MB_1}$$

или $\overline{BK} = 2\overline{MB_1}$, а это значит, что прямые BK и MB_1 — параллель-

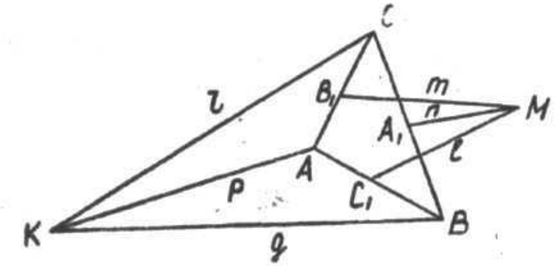


Рис. 4.5

ны, т. е. прямая q проходит через точку пересечения прямых r и p (точку K).

Задача 11.

Даны n точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Докажите, что существует единственная точка X, что

$$\overline{XA_1} + \overline{XA_2} + \cdots + \overline{XA_n} = \overline{0}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Единственность. Допустим, что для двух точек X_1 и X_2 выполняются равенства:

$$\overline{X_1A_1} + \overline{X_1A_2} + \cdots + \overline{X_1A_n} = \overline{0} \text{ и } \overline{X_2A_1} + \overline{X_2A_2} +$$
$$+ \cdots + \overline{X_2A_n} = \overline{0}$$

Почленно вычитая, получим,

$$\overline{X_1A_1} - \overline{X_2A_1} = \overline{X_1X_2},$$
$$\overline{X_1A_2} - \overline{X_2A_2} = \overline{X_1X_2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\overline{X_1A_n} - \overline{X_2A_n} = \overline{X_1X_2}, \text{ следовательно,}$$
$$n\overline{X_1X_2} = \overline{0} \text{ и } X_1 \equiv X_2$$

Существование. Выберем произвольную точку O и положим $\overline{OX} = \frac{1}{n}(\overline{OA_1} + \cdots + \overline{OA_n})$

Имеем

$$\overline{XA_1} = \overline{XO} + \overline{OA_1}$$
$$\overline{XA_2} = \overline{XO} + \overline{OA_2}$$
$$\overline{XA_n} = \overline{XO} + \overline{OA_n}, \text{ получим}$$
$$\overline{XA_1} + \overline{XA_2} + \cdots + \overline{XA_n} = \overline{0}.$$

Задача 12.

Доказать, что если M — точка пересечения медиан треугольника ABC, X — произвольная точка пространства, то

$$\overline{XM} = \frac{1}{3}(\overline{XA} + \overline{XB} + \overline{XC})$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть M_3 — середина отрезка AB треугольника ABC. По свойству медиан треугольника ABC:

$$\overline{MM_3} = \frac{1}{3}\overline{CM_3}$$

Поскольку $\overline{MM_3} = \overline{XM_3} - \overline{XM} = \frac{1}{3}(\overline{XM_3} - \overline{XC})$

отсюда $\overline{XM} = \frac{1}{3}\overline{XC} + \frac{2}{3}\overline{XM_3}$

Но $\overline{XM_3} = \frac{1}{2}(\overline{XA} + \overline{XB})$, тогда

$$\overline{XM} = \frac{1}{3}\overline{XC} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(\overline{XB} + \overline{XA}) = \frac{1}{3}(\overline{XA} + \overline{XB} + \overline{XC}).$$

Задача 13.

В плоскости прямоугольника $ABCD$ взята точка X. Доказать, что $\overline{XA}\cdot\overline{XC} = \overline{XB}\cdot\overline{XD}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

$$\overline{XA} = \overline{XD} + \overline{DA} \text{ (рис. 4.6)}$$

$$\overline{XC} = \overline{XB} + \overline{BC}$$

$$\overline{XA}\cdot\overline{XC} = (\overline{XD} + \overline{DA})(\overline{XB} + \overline{BC}) =$$

$$= \overline{XD}\cdot\overline{XB} + \overline{XD}\cdot\overline{BC} + \overline{DA}\cdot\overline{XB} + \overline{DA}\cdot\overline{BC}.$$

Осталось доказать, что

$$\overline{XD}\cdot\overline{BC} + \overline{DA}\cdot\overline{XB} + \overline{DA}\cdot\overline{BC} = 0$$

$$-\overline{XD}\cdot\overline{DA} + \overline{DA}\cdot\overline{XB} + \overline{DA}\cdot\overline{BC} = 0.$$

$$\overline{DA}(\overline{XB} + \overline{BC} - \overline{XD}) = 0$$

$$\overline{DA}(\overline{XB} + \overline{AX}) = 0$$

$$\overline{DA}\cdot\overline{AB} = 0,$$

получим очевидное равенство, а это доказывает утверждение задачи.

Задача 14. (Ск. V. 17.115)

В квадрат вписана окружность. Доказать, что сумма квадратов расстояний любой точки окружности до вершин квадрата не зависит от выбора этой точки.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть O — центр квадрата $ABCD$ (рис. 4.7), а X — произвольная точка окружности.

Имеем

$$\overline{XB} = \overline{OB} - \overline{OX}$$

$$\overline{XC} = \overline{OC} - \overline{OX}$$

$$\overline{XD} = \overline{OD} - \overline{OX}$$

$$\overline{XA} = \overline{OA} - \overline{OX}$$

$$XB^2 + XC^2 + XD^2 + XA^2 = OB^2 + OC^2 + OD^2 + OA^2 + 4OX^2 -$$

$$- 2\overline{OX}(\overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD} + \overline{OA}) = 4OB^2 + 4OX^2 = 4\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 4R^2,$$

где a — сторона квадрата, R — радиус окружности, поскольку $R = \frac{a}{2}$, то искомая сумма равна $3a^2$.

Задача 15. (Ск. V. 17.116)

Около квадрата описана окружность. Доказать, что сумма квадратов расстояний точек окружности до вершин квадрата не зависит от выбора этих точек. Найти эту сумму.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть X — произвольная точка окружности, описанной около квадрата ABCD (рис. 4.8). Тогда

$$\overline{AC} = \overline{XC} - \overline{XA}$$

$$\overline{BD} = \overline{XD} - \overline{XB}$$

$$\overline{AC}^2 = \overline{XC}^2 + \overline{XA}^2 - 2\overline{XC}\cdot\overline{XA}$$

Поскольку $\angle AXC = 90°$, то

$$AC^2 = XC^2 + XA^2$$

Аналогично, $XB^2 + XD^2 = BD^2$. Итак,

$$XA^2 + XB^2 + XC^2 + XD^2 = AC^2 + BD^2 = 4a^2,$$

где a — сторона квадрата.

Задача 16. (Ск. IV. 15.234)

Дан куб $ABCD\ A_1B_1C_1D_1$. Прямая l, проходящая через центр куба, перпендикулярна плоскости граней $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ и пересекает их соответственно в точках M и M_1. Точка Р делит отрезок MM_1 в отношении k ($\overline{MP} = k\overline{PM_1}$). Найти значение k, при котором выполняется равенство

$$\overline{PA_1} + \overline{PB_1} + \overline{PC_1} + \overline{PD_1} + \overline{PM} = \overline{0}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

$$\overline{PA} + \overline{PC} = \overline{PB} + \overline{PD} = 2\overline{PM} \text{ (рис. 4.9)}.$$

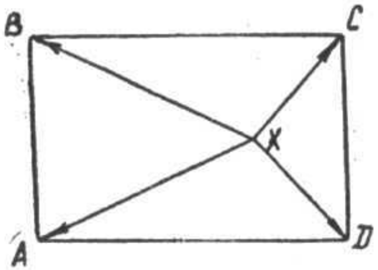


Рис. 4.6

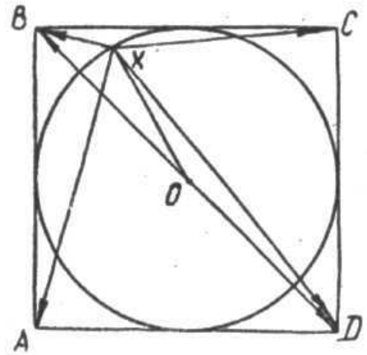


Рис. 4.7

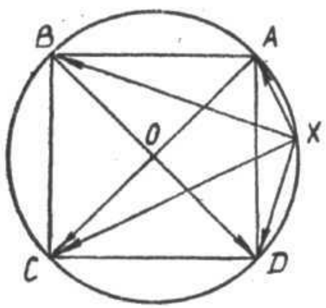


Рис. 4.8

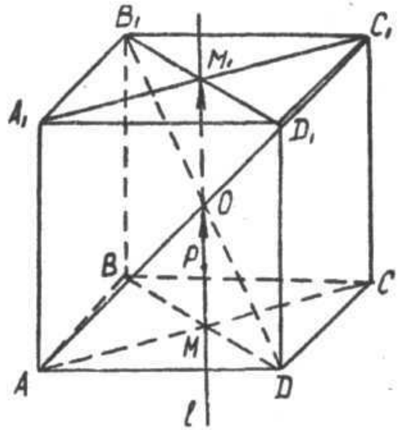


Рис. 4.9

Запишем сумму векторов $\overline{PA_1}$, $\overline{PB_1}$, $\overline{PC_1}$, $\overline{PD_1}$, $\overline{PM}$ применяя «прокол».

$$\overline{PA_1}+\overline{PB_1}+\overline{PC_1}+\overline{PD_1}+\overline{PM}=$$
$$=\overline{AA_1}+\overline{PA}+\overline{BB_1}+\overline{PB}+\overline{CC_1}+\overline{PC}+\overline{DD_1}+\overline{PD}+\overline{PM}=$$
$$=4\overline{AA_1}+4\overline{PM}+\overline{PM}=4(k+1)\,\overline{PM_1}-5k\overline{PM_1}=\bar{0}$$

при $4k+4=5k$, $k=4$.

5. МЕТОД «ЗАМКНУТОГО КОНТУРА».

Пусть даны n векторов

$$\bar{a}_1,\ \bar{a}_2,\ \bar{a}_3,\ \ldots,\ \bar{a}_n$$

Для того, чтобы ломаная, составленная из этих векторов, была замкнута, необходимо и достаточно, чтобы сумма всех этих векторов («замкнутый контур») равнялась нулю:

$$\bar{a}_1+\bar{a}_2+\bar{a}_3+\ldots+\bar{a}_n=0$$

Задача 1.

Доказать, что можно построить треугольник, стороны которого равны медианам данного треугольника.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть M_1, M_2, M_3 — середины сторон BC, AC, AB треугольника ABC (рис. 5.1).

Имеем

$$\overline{AM_1}=\overline{AB}+\overline{BM_1}$$
$$\overline{BM_2}=\overline{BC}+\overline{CM_2}$$
$$\overline{CM_3}=\overline{CA}+\overline{AM_3}$$

Сложим равенства почленно, получим

$$\overline{AM_1}+\overline{BM_2}+\overline{CM_3}=\overline{AB}+\overline{BM_1}+\overline{BC}+\overline{CM_2}+$$
$$+\overline{CA}+\overline{AM_3}=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}+\frac{1}{2}\overline{AB}+\frac{1}{2}\overline{BC}+\frac{1}{2}\overline{CA}=$$
$$=\frac{3}{2}(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA})=\frac{3}{2}\cdot\bar{0}=\bar{0}$$

Итак, $\overline{AM_1}+\overline{BM_2}+\overline{CM_3}=\bar{0}$, а это значит, что утверждение задачи доказано.

Задача 2. (Ск. IV. 15.137)

Даны два отрезка AB и CD. Точка $M\in AB$ и точка $N\in CD$ делят отрезки AB и CD соответственно на отрезки, отношение которых равно k. Выразить вектор $\overline{MN}$ через векторы $\overline{AC}$ и $\overline{BD}$.

РЕШЕНИЕ

Задача может быть решена с помощью формулы (2.11) и «прокола» вектора. Решим ее с помощью «замкнутого контура».

Рассмотрим четырехугольники $NMAC$ и $NMBD$ (рис. 5.2)

$$\overline{MN} = \overline{MA} + \overline{AC} + \overline{CN}, \text{ также}$$

$$\overline{MN} = \overline{MB} + \overline{BD} + \overline{DN}.$$

Положим $k = \frac{m}{n}$. Тогда

$$\frac{1}{m}\overline{MN} = \frac{1}{m}\overline{MA} + \frac{1}{m}\overline{AC} + \frac{1}{m}\overline{CN},$$

$$\frac{1}{n}\overline{MN} = \frac{1}{n}\overline{MB} + \frac{1}{n}\overline{BD} + \frac{1}{n}\overline{DN},$$

$$\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)\overline{MN} = \frac{1}{m}\overline{MA} + \frac{1}{n}\overline{MB} + \frac{1}{m}\overline{AC} + \frac{1}{n}\overline{BD} +$$

$$+ \frac{1}{m}\overline{CN} + \frac{1}{n}\overline{DN}$$

Поскольку

$$|\overline{MA}| = \frac{mAB}{m+n}, \quad |\overline{MB}| = \frac{nAB}{m+n},$$

то $\frac{1}{m}\overline{MA} + \frac{1}{n}\overline{MB} = \bar{0}$

Аналогично,

$$\frac{1}{m}\overline{CN} + \frac{1}{n}\overline{DN} = \bar{0}$$

$$\overline{MN} = \frac{n}{m+n}\overline{AC} + \frac{m}{m+n}\overline{BD} = \frac{1}{1+k}\overline{AC} + \frac{k}{1+k}\overline{BD}.$$

Задача 3.

На сторонах произвольного треугольника ABC вне треугольника построены произвольные параллелограммы: ABB_1A_1, BCC_1B_2, CAA_2C_2. Доказать, что из отрезков A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 можно составить треугольник.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Рассмотрим замкнутый контур $A_1B_1B_2C_1C_2A_2$ (рис. 5.3)

Имеем

$$\overline{A_1B_1} + \overline{B_1B_2} + \overline{B_2C_1} + \overline{C_1C_2} + \overline{C_2A_2} + \overline{A_2A_1} = \bar{0}$$

Так как векторы $\overline{AB}$ и $\overline{A_1B_1}$, $\overline{BC}$ и $\overline{B_2C_1}$, $\overline{CA}$ и $\overline{C_2A_2}$ попарно равны и $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} = \bar{0}$, то

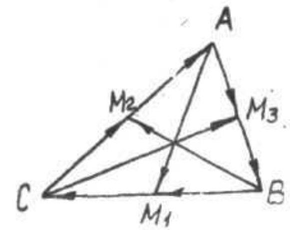


Рис. 5.1

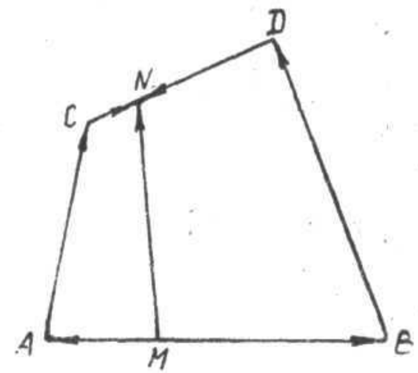


Рис. 5.2

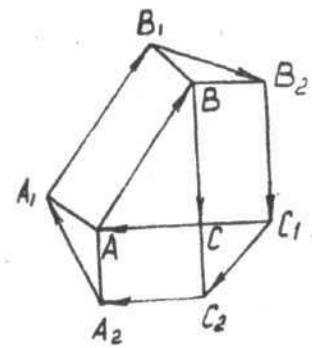


Рис. 5.3

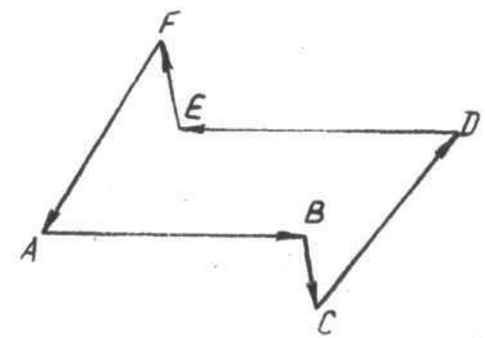


Рис. 5.4

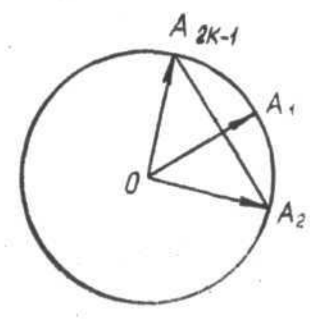


Рис. 5.5

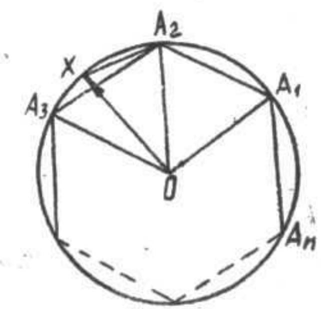


Рис. 5.6

$\overline{B_1B_2} + \overline{C_1C_2} + \overline{A_2A_1} = \overline{0}$, а это векторное равенство устанавливает, что если векторы $\overline{B_1B_2}$, $\overline{C_1C_2}$, $\overline{A_1A_2}$ неколлинеарны, то из них можно составить треугольник, если же коллинеарны, треугольник составить нельзя.

Задача 4.

Дана замкнутая неплоская ломаная с шестью звеньями. Доказать, что если противолежащие звенья ломаной попарно параллельны, то длины их попарно равны.

РЕШЕНИЕ

Согласно условию задачи имеем:

$$\overline{DE} = k\overline{AB}, \quad \overline{EF} = l\overline{BC}, \quad \overline{FA} = m\overline{CD} \quad \text{(рис. 5.4)}$$

Рассмотрим «замкнутый контур».

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE} + \overline{EF} + \overline{FA} = \overline{0}$$

Отсюда получаем:

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + k\overline{AB} + l\overline{BC} + m\overline{CD} = \overline{0},$$

или

$$(k+1)\,\overline{AB} + (l+1)\,\overline{BC} + (m+1)\,\overline{CD} = \overline{0}$$

Векторы $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ некомпланарны (иначе данная ломаная была бы плоской), следовательно, коэффициенты в разложении нулевого вектора по векторам $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ равны нулю:

$$k = -1, \; l = -1, \; m = -1$$

Задача 5. (Ск. IV. 15.39)

Дан правильный n-угольник $A_1A_2 \dots A_n$, точка O — его центр. Доказать, что $\overline{OA_1} + \overline{OA_2} + \dots + \overline{OA_n} = \overline{0}$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

1) Если $n = 2k$, то вершины A_i $(i = 1, 2 \dots k)$ и A_{i+k} симметричны относительно центра 0, поэтому

$$\overline{OA_i} = -\overline{OA_{i+k}}$$

и

$$\overline{S} = \overline{OA_1} + \overline{OA_2} + \dots + \overline{OA_{2k}} = \overline{0}$$

2) Если $n = 2n - 1$, то вершины A_2 и A_{2k-1}, A_3 и A_{2k-2} и т. д. симметричны относительно прямой OA_1 (рис. 5.5). Поэтому векторы, равные суммам векторов $\overline{OA_2}$ и $\overline{OA_{2k-1}}$, $\overline{OA_3}$ и $\overline{OA_{2k-2}}$ и т. д., коллинеарны вектору OA_1.

$$\overline{OA_2} + \overline{OA_{2k-1}} = \alpha_2\overline{OA_1}$$

$$\overline{OA_3} + \overline{OA_{2k-2}} = \alpha_3\overline{OA_1}$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$\overline{OA_k} + \overline{OA_{k+1}} = \alpha_k\overline{OA_1}$$

Поэтому

$$\overline{S} = \overline{OA_1} + \overline{OA_2} + \overline{OA_3} + \cdots + \overline{OA_{2k-1}} =$$
$$= \overline{OA_1} + (\overline{OA_2} + \overline{OA_{2k-1}}) + (\overline{OA_3} + \overline{OA_{2k-2}}) + \cdots +$$
$$+ (\overline{OA_k} + \overline{OA_{k+1}}) = \overline{OA_1} + (\alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_k)\,\overline{OA_1} = \alpha\overline{OA_1}$$

Аналогично можно показать, что

$$\overline{OA_1} + \overline{OA_2} + \cdots + \overline{OA_{2k-1}} = \beta\overline{OA_2},$$

следовательно, $\alpha\overline{OA_1} = \beta\overline{OA_2}$.

Но векторы $\overline{OA_1}$ и $\overline{OA_2}$ неколлинеарны, поэтому

$$\alpha = \beta = 0 \text{ и } \overline{S} = \overline{0}$$

Задача 6. (Ск. IV, 15.161)

В окружность вписан правильный n-угольник. Доказать, что сумма квадратов всех его сторон и всех его диагоналей равна n^2R^2, где R — радиус окружности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть $A_1A_2 \dots A_n$ — правильный многоугольник. O — центр окружности. Найдем сумму квадратов расстояний от одной из вершин (например A_1) до других вершин: $A_1A_2^2$, $A_1A_3^2$, … $A_1A_n^2$. Рассмотрим векторы $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_1A_3}$, …, $\overline{A_1A_n}$. «Проколем» их точкой O:

$$\overline{A_1A_2} = \overline{OA_2} - \overline{OA_1},$$
$$\overline{A_1A_3} = \overline{OA_3} - \overline{OA_1},$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\overline{A_1A_n} = \overline{OA_n} - \overline{OA_1}$$

Тогда

$$A_1A_2^2 + A_1A_3^2 + \dots + A_1A_n^2 = 2\,(n-1)\,R^2 -$$
$$- 2\,(\overline{OA_1} + \overline{OA_2} + \dots + \overline{OA_n} - \overline{OA_1})\,\overline{OA_1} =$$
$$= 2\,(n-1)\,R^2 + 2OA_1^2 = 2nR^2 - 2R^2 + 2R^2 = 2nR^2$$

Аналогично для каждой из точек A_2, A_3 … A_n сумма квадратов расстояний до остальных вершин также равна $2nR^2$. Поскольку каждое расстояние считается дважды, то искомая сумма равна

$$\frac{2nR^2 \cdot n}{2} = n^2R^2.$$

Задача 7. (Ск. IV, 15.233)

В окружность радиуса R вписан правильный n-угольник. Доказать, что сумма квадратов расстояний любой точки окружности до вершин многоугольника равна $2nR^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть X — некоторая точка описанной около правильного n-угольника $A_1A_2A_3 \dots A_n$ окружности (рис. 5.6).

$$\overline{XA_1} = \overline{OA_1} - \overline{OX}$$
$$\overline{XA_2} = \overline{OA_2} - \overline{OX}$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\overline{XA_n} = \overline{OA_n} - \overline{OX}$$

Учитывая, что $|OA_1| = |OA_2| = \cdots = |OA_n| = R$, имеем

$$XA_1^2 + XA_2^2 + \cdots + XA_n^2 = nR^2 + nR^2 -$$
$$- 2\overline{OX}\,(\overline{OA_1} + \overline{OA_2} + \cdots + \overline{OP_n})$$

Учитывая задачу 5, имеем, что

$$\overline{OA_1} + \overline{OA_2} + \overline{OA_3} + \cdots + \overline{OA_n} = \overline{0}, \text{ и}$$
$$XA_1^2 + XA_2^2 + XA_3^2 + \cdots + XA_n^2 = 2nR^2.$$

Задача 8.

В правильной n — угольной пирамиде с вершиной S и основанием $A_1A_2 \dots A_n$ высота равна H. Найти

$$|\overline{SA_1} + \overline{SA_2} + \cdots + \overline{SA_n}|$$

РЕШЕНИЕ

[Пусть O — центр многоугольника $A_1A_2 \dots A_n$]

$$\overline{SA_i} = \overline{SO} + \overline{OA_i}, \text{ значит,}$$
$$|\overline{SA_1} + \overline{SA_2} + \cdots + \overline{SA_n}| = |\overline{SO} \cdot n + (\overline{OA_1} + \overline{OA_2} + \cdots +$$
$$+ \overline{OA_n}| = nH.$$

Задача 9. (Ск. IV, 15.143)

Дан треугольник ABC (рис. 5.7) На прямых BC, CA, AB даны соответственно пары точек (A_1A_2), (B_1, B_2), (C_1, C_2) такие, что

$$\overline{A_1A_2} + \overline{B_1B_2} + \overline{C_1C_2} = \overline{0}$$

Доказать, что

$$\frac{BC}{A_1A_2} = \frac{CA}{B_1B_2} = \frac{AB}{C_1C_2}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = \overline{0}$$

Пусть

$$\overline{A_1A_2} = m\overline{BC}$$
$$\overline{B_1B_2} = p\overline{CA}$$
$$\overline{C_1C_2} = k\overline{AB}$$
$$\overline{A_1A_2} + \overline{B_1B_2} + \overline{C_1C_2} = k\overline{AB} + p\overline{CA} + m\overline{BC} = \overline{0} \qquad (1)$$
$$\left[\overline{AB} + \frac{p}{k}\,\overline{CA} + \frac{m}{k}\,\overline{BC} = \overline{0}\right]$$
$$\text{и } \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = \overline{0}$$

Отсюда $k = p = m$, что доказывает утверждение задачи.

Задача 10.

Даны неперпендикулярные скрещивающиеся прямые a и b. На прямой a взяты точки A_1, A_2, A_3, из этих точек проведены перпендикуляры A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 прямой b. Докажите, что

$$\frac{A_1A_2}{A_2A_3} = \frac{B_1B_2}{B_2B_3}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть a и b — данные прямые (рис. 5.8) По правилу многоугольника имеем

$$\overline{A_1A_2} = \overline{A_1B_1} + \overline{B_1B_2} + \overline{B_2A_2} \qquad (1)$$
$$\overline{A_2A_3} = \overline{A_2B_2} + \overline{B_2B_3} + \overline{B_3A_3} \qquad (2)$$

Обе части равенств (1) и (2) умножим на единичный вектор $\overline{p}$, сонаправленный с вектором $\overline{B_1B_2}$.

$$\overline{A_1A_2} \cdot \overline{p} = \overline{B_1B_2} \cdot \overline{p}, \text{ отсюда}$$
$$|\overline{A_1A_2}| \cos\varphi = |\overline{B_1B_2}|, \text{ также } [(\varphi \text{ — угол между прямыми } a \text{ и } b)]$$
$$\overline{A_2A_3} \cdot p = \overline{B_2B_3} \cdot p, \quad |\overline{A_2A_3}| \cos\varphi = |\overline{B_2B_3}|,$$

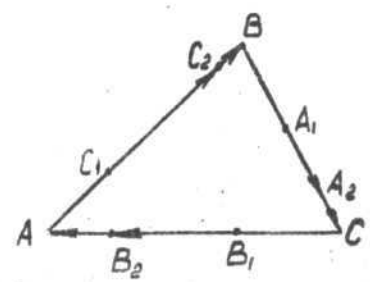


Рис. 5.7

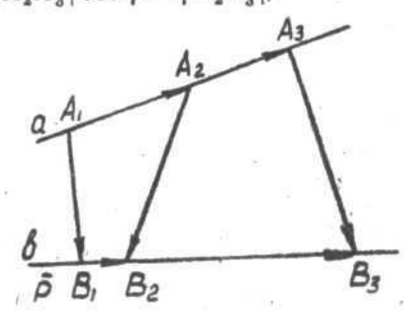


Рис. 5.8

значит

$$\frac{A_1A_2}{A_2A_3} = \frac{B_1B_2}{B_2B_3}$$

Задача 11.

На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC даны соответственно точки A_1, B_1 и C_1 такие, что

$$\overline{AC_1} = k\overline{AB}, \quad \overline{BA_1} = k\overline{BC}, \quad \overline{CB_1} = k\overline{CA}$$

Вычислить сумму векторов $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$, $\overline{CC_1}$

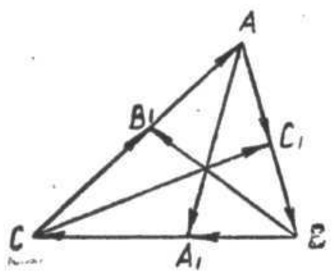


Рис. 5.9

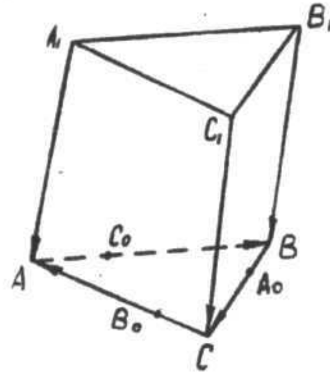


Рис. 5.10

РЕШЕНИЕ

$$\overline{AA_1} = \overline{AB} + \overline{BA_1} = \overline{AB} + k\overline{BC} \text{ (рис. 5.9)}$$
$$\overline{BB_1} = \overline{BC} + \overline{CB_1} = \overline{BC} + k\overline{CA}$$
$$\overline{CC_1} = \overline{CA} + \overline{AC_4} = \overline{CA} + k\overline{AB}$$

Тогда

$$\overline{AA_1} + \overline{BB_1} + \overline{CC_1} = (1 + k)(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA})$$

Учитывая, что $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = \overline{0}$, получим $\overline{AA_1} + \overline{BB_1} + \overline{CC_1} = \overline{0}$.

Задача 12.

Дана треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Точки A_0, B_0, C_0 делят стороны BC, CA, AB в равных отношениях k. Докажите, что сумма векторов $\overline{A_1A_0} + \overline{B_1B_0} + \overline{C_1C_0}$ не зависит от k.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Имеем (рис. 5.10)

$$\overline{A_1A_0} = \overline{A_1A} + \overline{AA_0}$$

$$\overline{B_1B_0} = \overline{B_1B} + \overline{BB_0}$$
$$\overline{C_1C_0} = \overline{C_1C} + \overline{CC_0}$$

Коме того, $\overline{AA_0} = \overline{AB} + k\overline{BC}$, $\overline{BB_0} = \overline{BC} + k\overline{CA}$, $\overline{CC_0} = \overline{CA} + k\overline{AB}$ Учитывая, что $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = \overline{0}$, получим $\overline{A_1A_0} + \overline{B_1B_0} + \overline{C_1C_0} = 3\overline{A_1A}$.

Задача 13. (Ск. IV, 15.159)

Дан четырехугольник $ABCD$. Доказать, что точки пересечения медиан треугольников ABC, BCD, CDA, DAB являются вершинами четырехугольника, гомотетичного данному. Найти коэффициент гомотетии.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

По правилу многоугольника (рис. 5.11)

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} = \overline{0}$$

$$\overline{M_1M_4} + \overline{M_4M_3} + \overline{M_3M_2} + \overline{M_2M_1} = \overline{0}$$

Пусть K — середина BC. Поскольку векторы $\overline{M_2M_1}$ и $\overline{DA}$ сонаправлены, то

$$\frac{\overline{M_2M_1}}{\overline{DA}} = \frac{\overline{M_1K}}{\overline{AK}} = \frac{1}{3}$$

Итак, $\overline{M_2M_1} = \frac{1}{3}\overline{DA}$

Аналогично

$$\overline{M_1M_4} = \frac{1}{3}\overline{CD}$$

$$\overline{M_4M_3} = \frac{1}{3}\overline{BC}$$

$$\overline{M_3M_2} = \frac{1}{3}\overline{AB}$$

Итак,

$$\overline{M_1M_4} + \overline{M_4M_3} + \overline{M_3M_2} + \overline{M_2M_1} = \frac{1}{3}(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA}) = \overline{0}.$$

Следовательно, четырехугольник $M_1M_2M_3M_4$ гомотетичен четырехугольнику ABCD с коэффициентом гомотетии $k = r\,\frac{1}{3}$.

Задача 14. (Ск. V, 17.110)

Доказать, что если в тетраэдре $ABCD$ противоположные ребра попарно перпендикулярны, то

$$AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Ясно, что $\overline{AD}+\overline{DC}+\overline{CB}+\overline{BA}=\bar{0}$ (рис. 5.12)

$$\overline{AD}+\overline{CB}=\overline{AB}+\overline{CD},$$

или

$$|\overline{AD}|^2+|\overline{BC}|^2+2\overline{AD}\cdot\overline{CB}=|\overline{AB}|^2+|\overline{CD}|^2+2\overline{AB}\cdot\overline{CD}.$$

Учитывая условия, имеем

$$AD^2+BC^2=AB^2+CD^2$$

Аналогично доказывается, что

$$AD^2+BC^2=AC^2+BD^2$$

Итак, $AB^2+CD^2=AC^2+BD^2=AD^2+BC^2$.

Задача 15. (Ск. V, 17.066)

В параллелограмме $ABCD$ точка K — середина стороны BC, а точка M — середина стороны CD. Найти AD, если $AK=6$ см, $AM=3$ см и $\angle KAM=60°$

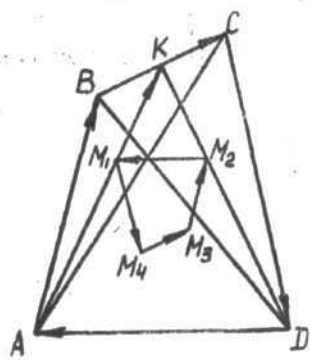


Рис. 5.11

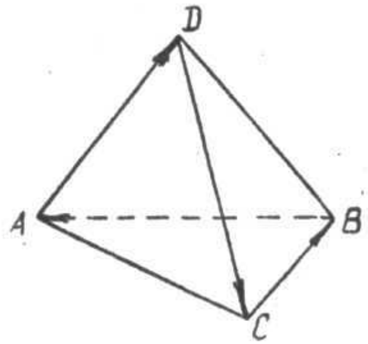


Рис. 5.12

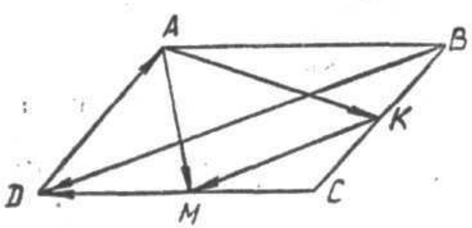


Рис. 5.13

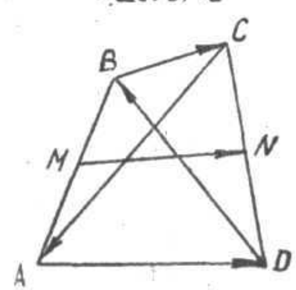


Рис. 5.14.

РЕШЕНИЕ

Рассмотрим «замкнутый контур» $AKMD$ (рис. 5.13) $\overline{AK}+\overline{KM}+\overline{MD}+\overline{DA}=\bar{0}$. Это векторное равенство запишем так:

$$\overline{AD}=\overline{AK}+\frac{1}{2}\overline{BD}+\frac{1}{2}\overline{CD} \qquad (1)$$

Учитывая, что $\overline{KM}=\overline{AM}-\overline{AK}$ и $\overline{CD}=\overline{BD}-\overline{AD}$, выражение (1) примет вид:

$$\frac{3}{2}\overline{AD}=2\overline{AM}-\overline{AK}$$

Обозначим $\overline{AM}=\bar{a}$, $\overline{AK}=\bar{b}$, угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ как φ. Тогда

$$\frac{9}{4}AD^2=4a^2+b^2-4ab\cos\varphi$$

$$AD=\frac{2}{3}\sqrt{4\cdot 9+36-4\cdot 3\cdot 6\cdot\frac{1}{2}}$$

$$AD=4 \text{ (см)}$$

Задача 16.

Доказать, что из половин диагоналей произвольного четырехугольника и любой из его средних линий можно составить треугольник.

РЕШЕНИЕ

Пусть $ABCD$ — некоторый четырехугольник (рис. 5.14) M — середина отрезка AB, N — середина CD.

$$\overline{MN}=\frac{1}{2}(\overline{AD}+\overline{BC})$$

Поэтому

$$\frac{1}{2}\overline{CA}+\frac{1}{2}\overline{DB}+\overline{MN}=\frac{1}{2}\overline{CA}+\frac{1}{2}\overline{DB}+$$

$$+\frac{1}{2}(\overline{AD}+\overline{BC})=\frac{1}{2}(\overline{CA}+\overline{DB}+\overline{AD}+\overline{BC})=$$

$$=\frac{1}{2}(\overline{CB}+\overline{BC})=\bar{0}.$$

Согласно условию замкнутости отрезки с длинами $\frac{1}{2}|\overline{AC}|$, $\frac{1}{2}|\overline{BD}|$ и $|\overline{MN}|$ составляют треугольник.

6. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ

Скалярным произведением двух ненулевых векторов называется произведение числовых значений длин этих векторов на косинус угла между ними

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b} \cos (\widehat{\bar{a}, \bar{b}})$$

где,

$$0 \leqslant (\bar{a}, \bar{b}) \leqslant 180^\circ$$

Свойства скалярного произведения:

1. $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$ — коммутативность
2. $(\bar{a} + \bar{b}) \bar{c} = \bar{a}\bar{c} + \bar{b}\bar{c}$ — дистрибутивность
3. Числовой множитель можно выносить за знак скалярного произведения:

$(k\bar{a})\ \bar{b} = k\ (\bar{a} \cdot \bar{b})$, так как имеет место сочетательный закон.

Задача 1. (Ск. V, 17.105)

Дан треугольник ABC, $\overline{AB} \cdot \overline{BC} = 8$; $|\overline{AB}| = 10$; $|\overline{BC}| = 6$. Найти длину высоты BD опущенной из вершин В. Является ли угол АВС острым или тупым?

РЕШЕНИЕ

Пусть S — площадь треугольника ABC (рис. 6.1).

$$S = \frac{1}{2} |\overline{AB}| \cdot |\overline{BC}| \sin \angle ABC,$$

$$|\overline{AB}| \cdot |BC| \cos (180^\circ - B) = 8, \text{ откуда}$$

$$\cos (180 - B) = \frac{2}{15}, \quad \cos B = -\frac{2}{15},$$

$$\sin \angle ABC = \sqrt{1 - \frac{4}{225}}$$

$$BD = \frac{2S}{b} = \frac{|\overline{AB}|\,|\overline{BC}| \sin \angle ABC}{\sqrt{AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos \angle ABC}} =$$

$= \frac{60 \cdot \sqrt{221}}{15 \cdot 2\sqrt{38}} = \sqrt{\frac{442}{19}}$. Поскольку $\cos \angle B = -\frac{2}{15} < 0$, то $\angle B$ тупой

Задача 2.

Считая, что каждый из векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ не есть нуль — вектор, установить, при каком их взаимном расположении справедливо равенство

$$(\bar{a}\bar{b})\,\bar{c} = \bar{a}\,(\bar{b} \cdot \bar{c})$$

РЕШЕНИЕ

Пусть $\bar{a}$ и $\bar{c}$ не коллинеарны.

Тогда $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{c} = 0$, т. е. $a \perp b$, $b \perp c$, но тогда $\bar{a}$ и $\bar{c}$ коллинеарны — противоречие.

Пусть $\bar{a}$ и $\bar{c}$ коллинеарны, т. е. существует такое K, что $\bar{a} = k\bar{c}$, тогда условие

$$(\bar{a} \cdot \bar{b})\,\bar{c} = \bar{a}\,(\bar{b} \cdot \bar{c}) \text{ запишется так:}$$

$$(k\,(\bar{c} \cdot \bar{b}))\,\bar{c} = k\bar{c}\,(\bar{b} \cdot \bar{c})$$

поэтому условие выполнено, значит $\bar{a}$ и $\bar{c}$ коллинеарны, $\bar{b}$ — произвольный.

Задача 3.

Даны три компланарных единичных вектора $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ такие, что $\bar{e}_1\bar{e}_2 + \bar{e}_2\bar{e}_3 + \bar{e}_1\bar{e}_3 = -1$. Доказать, что два из них противоположны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Так как $\bar{e}_1^2 = 1$, имеем

$$e_1^2 + \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2 + \bar{e}_2\bar{e}_3 + \bar{e}_1\bar{e}_3 = 0,$$

т. е. $(\bar{e}_1 + \bar{e}_3)(\bar{e}_1 + \bar{e}_2) = 0$. Аналогично

$$(\bar{e}_1 + \bar{e}_2)(\bar{e}_2 + \bar{e}_3) = 0$$

$$(\bar{e}_1 + \bar{e}_3)(\bar{e}_2 + \bar{e}_3) = 0$$

Но на плоскости не существует трех ненулевых векторов таких, что все их попарные скалярные произведения нулевые. Следовательно один из векторов $(\bar{e}_1 + \bar{e}_2)$, $(\bar{e}_1 + \bar{e}_3)$, $(\bar{e}_2 + \bar{e}_3)$ равен нулю.

Задача 4. (Ск. IV, 15.236)

Доказать, что если для треугольника АВС имеет место равенство $a^2 + b^2 = 2c^2$, то

$$am_b + bm_a = 2c \cdot m_c$$

где m_a, m_b, m_c — длины его медиан.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Найдем $\bar{m}_a$. Имеем: $\bar{m}_a = \frac{2\bar{b} - \bar{a}}{2}$ (рис. 6.2) и $\bar{m}_a = \frac{2\bar{c} + \bar{a}}{2}$. Тогда

$$m_a^2 = \frac{1}{4}(2\bar{b} - \bar{a})(2\bar{c} + \bar{a}) = \frac{1}{4}(4\bar{b}\bar{c} - 2\bar{a}\bar{c} + 2\bar{b}\bar{a} - a^2) =$$

$$= \frac{1}{4}(4\bar{b}\bar{c} + 2\bar{a}(\bar{b} - \bar{c}) - a^2) = \frac{1}{4}(4\bar{b}\bar{c} + 2(\bar{b} - \bar{c})^2 - a^2) =$$
$$= \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2).$$

Аналогично находим, что

$$m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}, \quad m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}.$$

Подставив в доказываемую формулу, и учитывая, что $a^2 + b^2 = 2c^2$, получим:

$$a\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2} + b\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} = c\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$$
$$\sqrt{3}\,a^2 + \sqrt{3}\,b^2 = 2c\sqrt{3}\,c, \text{ или } a^2 + b^2 = 2c^2.$$

Мы пришли к верному равенству, т. е. доказываемое утверждение справедливо.

Задача 5. (Ск. V. 17.056)

Найти объем треугольной пирамиды, построенной на векторах $\overline{OA}, \overline{OB}$ и $\overline{OC}$, если $|\overline{OA}| = 5, |\overline{OB}| = 2, |\overline{OC}| = 6$, $\overline{OA} \cdot \overline{OB} = 0$, $\overline{OA} \cdot \overline{OC} = 0$, $\overline{OB} \cdot \overline{OC} = 8$.

РЕШЕНИЕ

Поскольку $\overline{OA} \cdot \overline{OB} = 0$ и $\overline{OA} \cdot \overline{OC} = 0$, то $\angle AOB = 90°$ $\angle AOC = 90°$ (рис. 6.3). Искомый объем V найдем по формуле

$$V = \frac{1}{6} \cdot |\overline{OA}| \cdot |\overline{OB}| \cdot |\overline{OC}| \cdot \sin\angle BOC, \text{ или}$$

$$V = \frac{5 \cdot 2 \cdot 6}{6} \sin\angle BOC = 10 \sin\angle BOC$$

Из равенства $\overline{OB} \cdot \overline{OC} = |\overline{OB}||\overline{OC}| \cos\angle BOC = 8$ следует, что $\cos\angle BOC = \frac{2}{3}$, тогда $\sin\angle BOC = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ и

$$V = 10 \cdot \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Задача 6. (Ск. V, 17.073)

К окружности с центром O проведены из точки M две касательные; A и B — точки касания. Разложить вектор $\overrightarrow{MO}$ по векторам $\overrightarrow{MA}$ и $\overrightarrow{MB}$, если $\angle AMB = \alpha$.

РЕШЕНИЕ

Обозначим R — радиус окружности (рис. 6.4) Требуется найти k в векторном равенстве $\overline{MO} = k(\overline{MA} + \overline{MB})$. Возведем в квадрат; учтя, что $\angle AMO = \angle BMO = \frac{\alpha}{2}$.

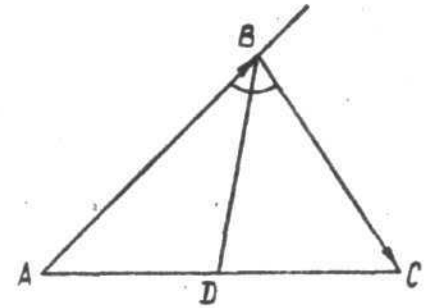


Рис. 6.1

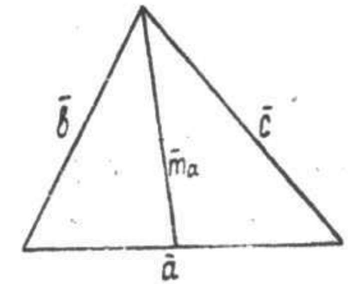


Рис. 6.2

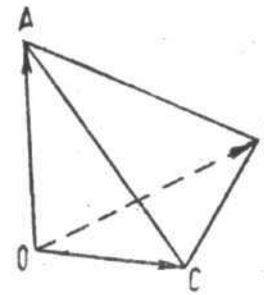


Рис. 6.3

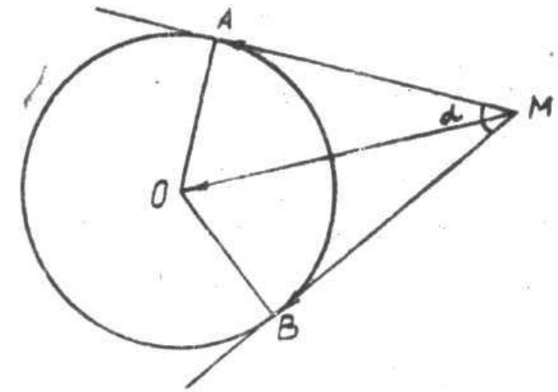


Рис. 6.4

Имеем $k^2 = \frac{\overline{MO}^2}{(\overline{MA} + \overline{MB})^2}$

или $k^2 = \frac{R^2}{\sin^2\frac{\alpha}{2}\left(2R^2\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} + 2R^2\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\right)} = \frac{1}{4\cos^4\frac{\alpha}{2}}$

Итак,

$$\overline{MO} = \frac{1}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}(\overline{MA} + \overline{MB})$$

Задача 7. (Ск. V, 17.075)

На сторонах BC, CA и AB равнобедренного прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$) даны соответственно точки A_1, B_1, C_1. Доказать, что отрезки CC_1 и AB_1 перпендикулярны и равны, если точки A_1, B_1, C_1 делят стороны треугольника по обходу в равных отношениях $\frac{m}{n}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Для векторов $\overline{CC_1}$ и $\overline{A_1B_1}$ (рис. 6.5) имеем (формула 2.11)

$$\overline{CC_1} = \frac{n}{m+n}\overline{CA} + \frac{m}{m+n}\overline{CB};$$

$$\overline{A_1B_1} = \overline{CB_1} - \overline{CA_1} = \frac{m}{m+n}\overline{CA} + \frac{n}{m+n}\overline{BC}.$$

Тогда

$$\overline{CC_1}\cdot\overline{A_1B_1} = \frac{mn}{(m+n)^2}|\overline{CA}|^2 - \frac{mn}{(m+n)^2}|\overline{BC}|^2 = 0$$

т. е. эти векторы перпендикулярны.

$$|\overline{CC_1}| = \sqrt{\frac{m^2+n^2}{(m+n)^2}CA^2 + 2\frac{mn}{(m+n)^2}\overline{CA}\cdot\overline{BC}} =$$

$$= \frac{|\overline{AC}|}{m+n}\sqrt{m^2+n^2}.$$

$$|\overline{A_1B_1}| = \sqrt{\frac{m^2+n^2}{(m+n)^2}BC^2 + 0} = \frac{|\overline{BC}|}{m+n}\sqrt{m^2+n^2},$$ т. е.

$$CC_1 = A_1B_1.$$

Задача 8.

Доказать, что три высоты треугольника (или их продолжения) пересекаются в одной точке.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть AH_1 и BH_2 — высоты треугольника ABC (рис. 6.6). Обозначим точку пересечения этих высот H и через эту точку проведем прямую CH до пересечения с AB в точке K. Обозначим также $\overline{HA} = \overline{a}$, $\overline{HB} = \overline{b}$, $\overline{HC} = \overline{c}$. Тогда $\overline{CB} = \overline{b} - \overline{c}$, $\overline{AC} = \overline{c} - \overline{a}$, $\overline{BA} = \overline{a} - \overline{b}$ Имеет место равенства $\overline{b}(\overline{c} - \overline{a}) = 0$, $\overline{a}(\overline{b} - \overline{c}) = 0$. Отсюда $\overline{c}(\overline{a} -$

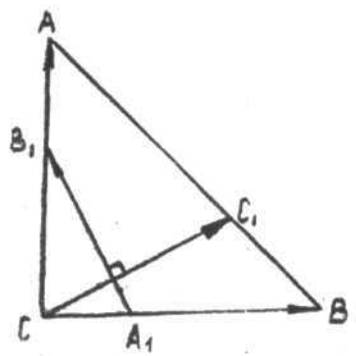


Рис. 6.5

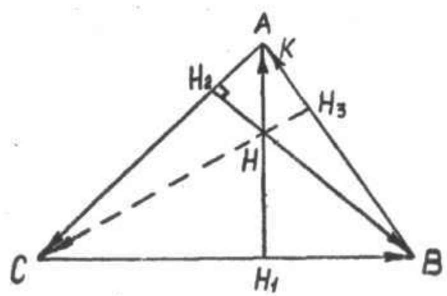


Рис. 6.6

$- \overline{b}) = 0$. Итак, отрезок CK перпендикулярен отрезку AB и $K \equiv H_3$.

Задача 9. (Ск. V. 17.076)

В треугольнике ABC дано: $AB = BC$; D — середина стороны AC; DK перпендикулярна BC; точка M — середина отрезка DK. Доказать, что прямые AK и BM перпендикулярны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

$$\overline{BM} = \overline{BD} + \overline{DM};\quad \overline{AK} = \overline{AC} + \overline{CK} \text{ (рис. 6.7)}$$

Рассмотрим скалярное произведение $\overline{BM}\cdot\overline{AK}$:

$$\overline{BM}\cdot\overline{AK} = (\overline{BD} + \overline{DM})(\overline{AC} + \overline{CK}) =$$

$$= \overline{BD}\cdot\overline{AC} + \overline{BD}\cdot\overline{CK} + \overline{DM}\cdot\overline{AC} + \overline{DM}\cdot\overline{CK} =$$

$$= 0 + \overline{DM}\cdot\overline{AC} + \overline{BD}\cdot\overline{CK} + 0 = \overline{DM}\cdot 2\overline{DC} + \overline{BD}(\overline{CD} + \overline{DK}) =$$

$$= \overline{DK}\cdot\overline{DC} + \overline{BD}\cdot\overline{CD} + \overline{BD}\cdot\overline{DK} = \overline{DK}\cdot\overline{DC} + 0 + \overline{BD}\cdot\overline{DK} =$$

$$= \overline{DK}(\overline{BD} + \overline{DC}) = \overline{DK}\cdot\overline{BC} = 0.$$

Итак, $\overline{BM}\cdot\overline{AK} = 0$ и потому, $BM \perp AK$.

Задача 10. (Ск. V. 17.062)

Даны единичные векторы $\overline{m}$, $\overline{n}$ и $\overline{p}$ такие, что $\overline{n} \perp \overline{p}$, $\overline{m} \perp \overline{n}$ и угол между $\overline{m}$ и $\overline{p}$ равен 60°. Найти скалярное произведение векторов $\overline{a} = 3\overline{m} - 2\overline{n} + \overline{p}$ и $\overline{b} = -2\overline{m} + \overline{n} - \overline{p}$.

РЕШЕНИЕ

$$(3\overline{m} - 2\overline{n} + \overline{p})(\overline{n} - 2\overline{m} - \overline{p}) =$$

$$= 3\overline{m}\overline{n} - 6\overline{m}^2 - 3\overline{m}\overline{p} - 2\overline{n}^2 + 4\overline{m}\overline{n} + 2\overline{n}\overline{p} + \overline{p}\overline{n} - 2\overline{m}\overline{p} - \overline{p}^2.$$

Поскольку

$$3\overline{m}\overline{n} = 4\overline{m}\overline{n} = 2\overline{n}\overline{p} = \overline{p}\overline{n} = 0, \text{ то}$$

$$\overline{a}\overline{b} = -6m^2 - 2n^2 - p^2 - 5\overline{m}\overline{p} =$$

$$= -6 - 2 - 1 - 5\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{1}{2} = -11{,}5.$$

Задача 11. (Ск. V, 17.048)

Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 1. Найти угол между векторами $\overline{MN}$ и $\overline{DC}$, если $N \in CC_1$, и $CN : NC_1 = 2 : 1$ $M \in AA_1$, $AM : MA_1 = 1 : 2$.

РЕШЕНИЕ

Обозначим $\overline{AA_1} = \overline{a}$, $\overline{AB} = \overline{b}$, $\overline{AD} = \overline{c}$ (рис. 6.8). Тогда

$$\overline{MN} = \overline{b} + \overline{c} + \frac{1}{3}\overline{a},\quad \overline{DC} = \overline{b}.$$

$$\overline{MN}\cdot\overline{DC} = \overline{b}\left(\overline{b} + \overline{c} + \frac{1}{3}\overline{a}\right) = \overline{b}^2 + \overline{b}\overline{c} + \frac{1}{3}\overline{b}\cdot\overline{a} = \overline{b}^2 = 1.$$

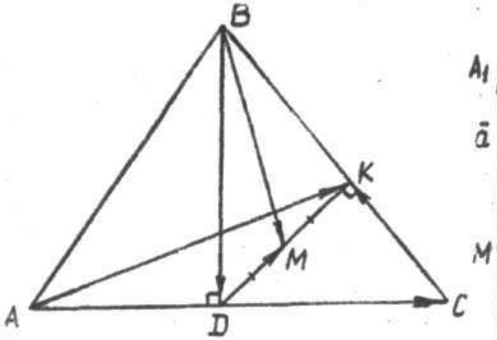


Рис. 6.7

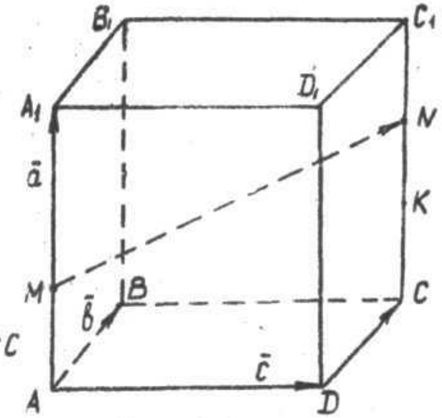


Рис. 6.8

Из треугольника MKN: пусть $K \in CC_1$ и $CK : KC_1 = 1 : 2$.

$$MN^2 = MK^2 + KN^2 = (\sqrt{2})^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{19}{9}$$

$$MN = \frac{\sqrt{19}}{3}; \quad DC = 1.$$

$$\cos\varphi = \frac{\overline{MN} \cdot \overline{DC}}{|\overline{MN}| \cdot |\overline{DC}|} = \frac{3}{\sqrt{19}}.$$

Задача 12. (Ск. V. 17.055)

В окружности проведены радиусы OA, OB, OC. Найти величину угла AOB, если $\overline{OA} + \overline{OB} = \overline{OC}$.

РЕШЕНИЕ

Поскольку $\overline{OA} + \overline{OB} = \overline{OC}$, то

$$\overline{OA}^2 + 2\overline{OA} \cdot \overline{OB} + \overline{OB}^2 = \overline{OC}^2$$

Учитывая, что $|\overline{OA}| = |\overline{OB}| = |\overline{OC}| = R$, имеем

$$2R^2 + 2R^2 \cos\angle AOB = R^2,$$

откуда $\cos\angle AOB = -\frac{1}{2}$

$$\angle AOB = 120°.$$

Задача 13. (Ск. V. 17.054)

В треугольнике ABC дано: $\overline{AB} = 4\bar{i} + 2\bar{j}$, $\overline{AC} = \bar{3}i + 4\bar{j}$, где $\bar{i}$ и $\bar{j}$ — единичные взаимно перпендикулярные векторы. Доказать, что треугольник ABC прямоугольный и вычислить его площадь.

РЕШЕНИЕ

Найдем $\overline{AC} \cdot \overline{AB}$, $\overline{BC} \cdot \overline{AC}$, $\overline{BC} \cdot \overline{AB}$ (рис. 6.9)

$$\overline{AC} \cdot \overline{AB} = (3\bar{i} + 4\bar{j})(4\bar{i} + 2\bar{j}) = 20$$

$$\overline{BC} \cdot \overline{AC} = (-4\bar{i} - 2\bar{j} + 3\bar{i} + 4\bar{j})(3\bar{i} + 4\bar{j}) = 5$$

$$\overline{BC} \cdot \overline{AB} = (-\bar{i} + 2\bar{j})(4\bar{i} + 2\bar{j}) = -4 + 4 = 0, \text{ т. е.}$$

векторы BC и AB перпендикулярны. Найдем модули этих векторов:

$$|\overline{BC}| = \sqrt{\overline{BC}^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}; \quad \overline{AB} = 2\sqrt{5}.$$

$$S_{ABC} = \frac{AB \cdot BC}{2} = \frac{2\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}}{2} = 5.$$

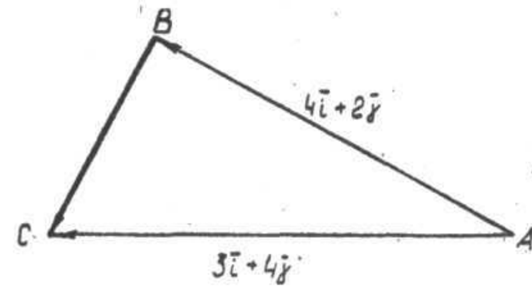


Рис. 6.9

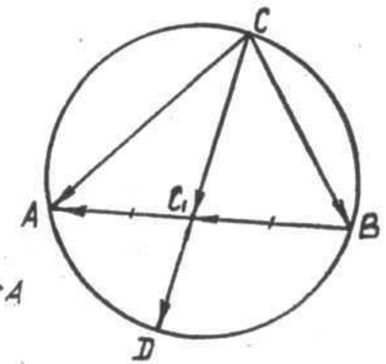


Рис. 6.10

Задача 14. (Ск. V. 17.124)

В окружность вписан треугольник ABC. Прямая, содержащая медиану CC_1 треугольника, пересекает окружность вторично в точке D рис. 6.10. Доказать, что $CA^2 + CB^2 = 2CC_1 \cdot CD$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

$\overline{CA} = \overline{C_1A} + \overline{CC_1}$, значит, $CA^2 = C_1A^2 + CC_1^2 + 2\overline{C_1A} \cdot \overline{CC_1}$ (рис. 6.10).

Аналогично, $\overline{CB} = \overline{CC_1} - \overline{BC_1} = \overline{CC_1} - \overline{C_1A}$, $CB^2 = CC_1^2 + C_1A^2 - 2\overline{CC_1} \cdot \overline{C_1A}$. Значит,

$$CA^2 + CB^2 = C_1A^2 + 2\overline{C_1A} \cdot \overline{CC_1} + 2CC_1^2 + C_1A^2 - 2\overline{CC_1} \cdot \overline{C_1A} = 2(CC_1^2 + C_1A^2). \quad (1)$$

Но $$\overline{CC_1} \cdot \overline{CD} = CC_1^2 + \overline{CC_1} \cdot \overline{C_1D} = CC_1^2 + AC_1^2 \quad (2)$$

Подставим выражение (2) в выражения (1), получим: $CA^2 + CB^2 = 2CC_1 \cdot CD$.

Задача 15. Докажите, что площадь выпуклого четырехугольника равна

$$S = \frac{\operatorname{tg}\varphi\,|a^2 - b^2 + c^2 - d^2|}{4}$$

где a, b, c, d — длины последовательных сторон четырехугольника, φ — величина угла между диагоналями, $\varphi \neq 90°$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник и $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$ (рис. 6.11)
Тогда

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BD \sin\varphi.$$

Выразим площадь S через скалярное произведение векторов $\overline{AC}$ и $\overline{BD}$. Ясно, что выполняется одно из следующих равенств: $\varphi = \overline{AC}$, или $\pi - \varphi = \overline{AC}$, $\overline{BD}\ \overline{BD}$.
Поэтому

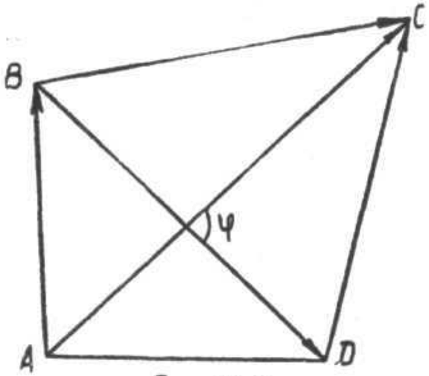


Рис 6.11

$$|\cos(\widehat{\overline{AC}, \overline{BD}})| = \cos\varphi.$$

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cos\varphi \operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{2} AC \cdot BD\, |\cos(\widehat{\overline{AC}, \overline{BD}})|\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{2}||\overline{AC}| \times |\overline{BD}| \cos(\widehat{\overline{AC}, \overline{BD}})|\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{2}|\overline{AC} \cdot \overline{BD}|\operatorname{tg}\varphi.$$

$$\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AC}(\overline{AD} - \overline{AB}) = \overline{AC} \cdot \overline{AD} - \overline{AC} \cdot \overline{AB} = \frac{1}{2}(2\overline{AC} \cdot \overline{AD} - 2\overline{AC} \cdot \overline{AB}) = \frac{1}{2}((\overline{AC})^2 + (\overline{AD})^2 - (\overline{AC} - \overline{AD})^2 - ((\overline{AC})^2 + (\overline{AB})^2 - (\overline{AC} - \overline{AB})^2)) =$$

$$= \frac{1}{2}((\overline{AC})^2 + (\overline{AD})^2 - \overline{DC}^2 - \overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2) = \frac{1}{2}(\overline{BC}^2 - \overline{CD}^2 + \overline{DA}^2 - \overline{AB}^2),$$

поэтому

$$S = \frac{1}{2}|\overline{AC} \cdot \overline{BD}|\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{4}|a^2 - b^2 + c^2 - d^2|\operatorname{tg}\varphi.$$

Задача 16. (Ск. V. 17.118)
Доказать, что в прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сумма квадратов расстояний любой точки прострнаства до вершин A, B_1, C_1 и D равна сумме квадратов ее расстояний до вершин A_1, B, C и D_1 (рис. 6.12).

РЕШЕНИЕ

Докажем, что $XA_1^2 + XC^2 = XB_1^2 + XD^2$ (рис. 6.12).
Имеем

$$\overline{XA}_1^2 + \overline{XC}^2 - \overline{XB}_1^2 - \overline{XD}^2 = (\overline{XA}_1^2 - \overline{XB}_1^2) - (\overline{XD}^2 - \overline{XC}^2) = (\overline{XA}_1 + \overline{XB}_1)\overline{B_1A_1} - (\overline{XD} + \overline{XC}) \cdot \overline{CD}.$$

Поскольку $\overline{CD} = \overline{B_1A_1}$, то

$$(\overline{XA}_1 + \overline{XB}_1)\overline{CD} - (\overline{XD} + \overline{XC})\overline{CD} = \overline{CD}((\overline{XA}_1 - \overline{XD}) + (\overline{XB}_1 - \overline{XC})) = \overline{CD}(\overline{DA}_1 + \overline{CB}_1) = 2\overline{CD} \cdot \overline{CB}_1$$

Поскольку $CD \perp CB$, то $\overline{CD} \cdot \overline{CB}_1 = 0$.
Откуда

$$\overline{XA}_1^2 + \overline{XC}^2 - \overline{XB}_1^2 - \overline{XD}_1^2 = 0$$

поэтому

$$XA_1^2 + XC^2 = XB_1^2 + XD^2.$$

Аналогично доказывается утверждение для другой пары вершин.

Задача 17. (Ск. IV, 15.176)
В параллельных плоскостях расположены одинаково ориентированные квадраты $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Доказать:

$$AA_1^2 + CC_1^2 = BB_1^2 + DD_1^2$$

Решение: Пусть $\overline{AB} = \bar{a}$, $\overline{AD} = \bar{b}$, $\overline{A_1B_1} = \bar{a}_1$, $\overline{A_1D_1} = \bar{b}_1$, $\overline{CA_1} = \bar{c}$ (рис. 6.13)
Имеем:

$$\overline{AA_1} = \bar{a} + b + \bar{c},$$

$$\overline{CC_1} = \bar{a}_1 + \bar{b}_1 + \bar{c},$$

$$\overline{BB_1} = \bar{a}_1 + \bar{b} + \bar{c},$$

$$\overline{DD_1} = \bar{a} + \bar{b}_1 + \bar{c}.$$

Найдем скалярные квадраты этих векторов

$$\overline{AA_1}^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2\bar{a}\bar{b} + 2\bar{a}\bar{c} + 2\bar{b}\bar{c}$$
$$\overline{CC_1}^2 = a_1^2 + b_1^2 + c^2 + 2\bar{a}_1\bar{c} + 2\bar{a}_1\bar{b}_1 + 2\bar{b}_1\bar{c}$$
$$\overline{BB_1}^2 = a_1^2 + b^2 + c^2 + 2\bar{a}_1\bar{b} + 2\bar{a}_1\bar{c} + 2\bar{b}\bar{c}$$
$$\overline{DD_1}^2 = a^2 + b_1^2 + c^2 + 2\bar{a}\bar{b}_1 + 2\bar{a}\bar{c} + 2\bar{b}_1\bar{c}.$$

Отсюда: (1) $\overline{AA_1}^2 + \overline{CC_1}^2 = a^2 + b^2 + a_1^2 + b_1^2 + 2c^2 + 2\bar{a}\bar{c} + 2\bar{b}\bar{c} + 2\bar{a}_1\bar{c} + 2\bar{b}_1\bar{c}$

(2) $\overline{BB_1}^2 + \overline{DD_1}^2 = a^2 + b^2 + a_1^2 + b_1^2 + 2c^2 + 2\bar{a}\bar{c} + 2\bar{b}\bar{c} + 2\bar{a}_1\bar{c} + 2\bar{b}_1\bar{c} + 2\bar{b}\bar{a}_1 + 2\bar{b}_1\bar{a}.$

сопоставляя равенства (1) и (2) видим, что для доказательства данного равенства осталось доказать: $\bar{b}\bar{a}_1 + \bar{a}\bar{b}_1 = 0$

Пусть $\varphi = \overline{AB_1}\ \overline{A_1B_1}$, тогда $b\bar{a}_1 + \bar{a}\bar{b}_1 = |\bar{a}|\,|\bar{a}_1|\,(\cos(90 + \varphi) + \cos(90 - \varphi)) = 0$

Задача 18. (Ск. V, 17.102)

Объем треугольной пирамиды, построенной на векторах $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$, равен $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Определить $\overline{OA} \cdot \overline{OC}$, если $OB = 2$, $OA = 1$, $OC = 3$, $\overline{OB} \cdot \overline{OA} = 0$, $\overline{OB} \cdot \overline{OC} = 0$

РЕШЕНИЕ

$$\overline{OB} \cdot \overline{OA} = 0, \text{ значит } \angle BOA = 90^\circ$$
$$\overline{OB} \cdot \overline{OC} = 0, \text{ значит, } \angle BOC = 90^\circ$$

Обозначим $\angle AOC = \alpha$ (рис. 6.14).

Тогда

$V = \frac{1}{3} OB \cdot S$, где S — площадь треугольника COA

$$S = \frac{1}{2} OC \cdot OA \sin\alpha,$$

итак

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \sin\alpha \cdot \frac{1}{2},$$
$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}, \text{ значит}$$
$$\overline{OA} \cdot \overline{OC} = |\overline{OA}| \cdot |\overline{OC}| \cos\alpha = \sqrt{6}.$$

Задача 19. (Ск. V, 17.111)

Найти скалярное произведение векторов $\overline{AK}$ и $\overline{BL}$, если $\overline{AK}$ и $\overline{BL}$ — медианы равнобедренного $\triangle ABC$, площадь которого равна S, а $\angle A = 120^\circ$.

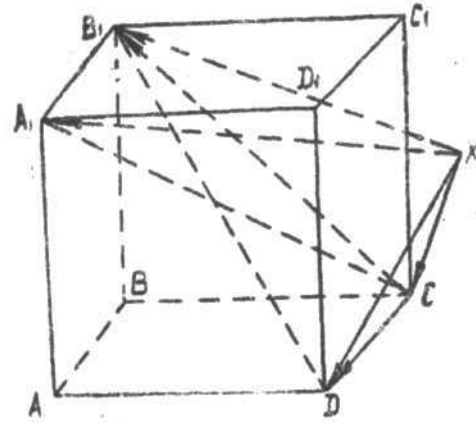


Рис. 6.12

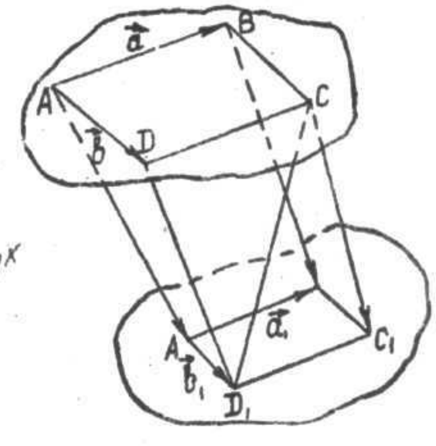


Рис. 6.13

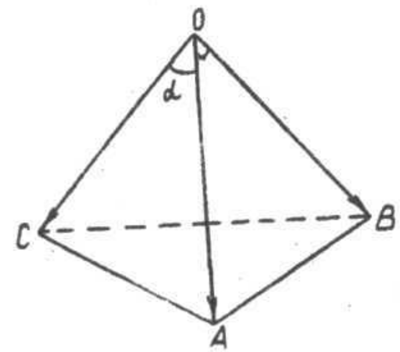


Рис. 6.14

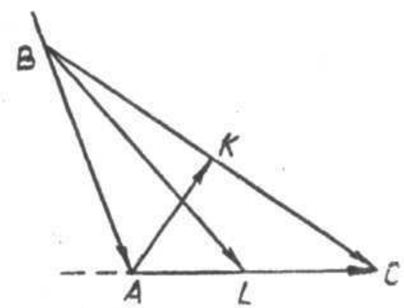


Рис. 6.15

РЕШЕНИЕ

$$\overline{BL} = \frac{1}{2}(\overline{BA} + \overline{BC}) \text{ (рис. 6.15)}$$
$$\overline{AK} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AC})$$
$$\overline{BL} \cdot \overline{AK} = \frac{1}{2}(\overline{BA} \cdot \overline{AK} + \overline{BC} \cdot \overline{AK})$$

Поскольку $\overline{AK} \perp \overline{BC}$, то $\overline{AK} \cdot \overline{BC} = 0$ и

$$\overline{BL} \cdot \overline{AK} = \frac{1}{2} \overline{BA} \cdot \overline{AK}, \text{ значит}$$

$$\overline{BL}\cdot\overline{AK}=\frac{1}{4}(\overline{BA}\cdot\overline{AB}+\overline{BA}\cdot\overline{AC})=$$
$$=\frac{1}{4}(-|\overline{AB}|^2+|\overline{AB}|^2\cos 60^\circ)=-\frac{1}{8}|\overline{AB}|^2.$$

Учитывая, что $S=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin 120^\circ=\frac{AB^2\sqrt{3}}{4}$, откуда $AB^2=$ $=|\overline{AB}|^2=\frac{4S}{\sqrt{3}}$, значит $\overline{AK}\cdot\overline{BL}=-\frac{S}{2\sqrt{3}}=-\frac{S\sqrt{3}}{6}$.

Задача 20. (Ск. V. 17.115)

В квадрат вписана окружность. Доказать, что сумма квадратов расстояний точек окружности до вершин квадрата не зависит от выбора этой точки. Найти эту сумму.

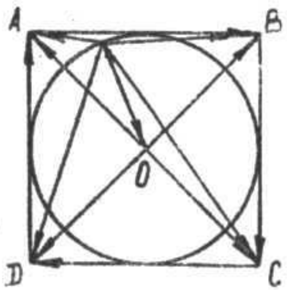


Рис. 6.16

РЕШЕНИЕ

Обозначим X — произвольную точку окружности (рис. 6.16)

$$\overline{AB}=\overline{XB}-\overline{XA}$$
$$\overline{BC}=\overline{XC}-\overline{XB}$$
$$\overline{CD}=\overline{XD}-\overline{XC}$$
$$\overline{DA}=\overline{XA}-\overline{XD}$$
$$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=4a^2=$$
$$=2(XB^2+XA^2+XC^2+XD^2)-$$
$$-2(\overline{XB}\cdot\overline{XA}+\overline{XC}\cdot\overline{XB}+\overline{XD}\cdot\overline{XC}+\overline{XA}\cdot\overline{XD}),\text{ отсюда}$$
$$XB^2+XA^2+XC^2+XD^2=2a^2+(\overline{XB}(\overline{XA}+\overline{XC})+$$
$$+\overline{XD}(\overline{XC}+\overline{XA}))=2a^2+(\overline{XB}+\overline{XD})(\overline{XC}+\overline{XA})=$$
$$=2a^2+(\overline{XO}+\overline{OB}+\overline{XO}+\overline{OD})(\overline{XO}+\overline{OC}+\overline{XO}+\overline{OA})=$$
$$=2a^2+4\overline{XO}\cdot\overline{XO}=2a^2+4R^2=2a^2+a^2=3a^2.$$

Задача 21. (Ск. V. 17.103)

Найти объем треугольной пирамиды, построенной на векторах $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$, если $|\overline{OA}|=|\overline{OB}|=|\overline{OC}|=5$, $\overline{OB}\cdot\overline{OA}=0$, $\overline{OA}\cdot\overline{OC}=0$, $\overline{OB}\cdot\overline{OC}=20$.

РЕШЕНИЕ

$\overline{OA}\cdot\overline{OB}=0$, значит, $OA\perp OB$, $\overline{OA}\cdot\overline{OC}=0$, значит, $OA\perp OC$, $V=\frac{1}{3}OA\cdot S_{OBC}=\frac{1}{3}|\overline{OA}|\cdot\frac{1}{2}|\overline{OC}|\cdot|\overline{OB}|\sin\angle BOC=$

$$=\frac{125}{6}\sin\angle BOC.$$

Поскольку $\overline{OB}\cdot\overline{OC}=20$, то $\cos\angle BOC=\frac{4}{5}$, откуда $\sin\angle BOC=$ $=\frac{3}{5}$.

Поэтому

$$V=\frac{125}{6}\sin\angle BOC=\frac{125}{6}\cdot\frac{3}{5}=\frac{25}{2}.$$

Задача 22. (Ск. V. 17.065)

Найти косинус угла между диагоналями параллелограмма $ABCD$, если $\overline{AB}=\bar{a}-\bar{b}+3\bar{c}$, $\overline{AD}=4\bar{a}-\bar{b}-\bar{c}$, где $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ — единичные попарно перпендикулярные векторы.

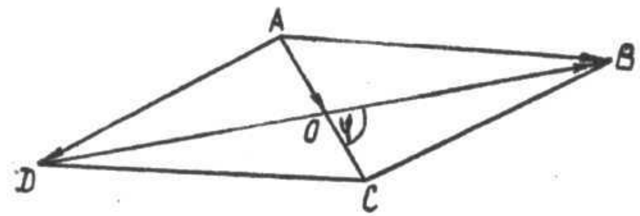


Рис. 6.17

РЕШЕНИЕ

Пусть O — точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ (рис. 6.17) Тогда

$$\overline{AO}=\frac{\overline{AB}+\overline{AD}}{2}=\frac{1}{2}(5\bar{a}-2\bar{b}+2\bar{c})$$
$$\overline{OB}=\frac{1}{2}\overline{DB}=\frac{1}{2}(-3\bar{a}+4\bar{c})$$
$$|\overline{AO}|=\frac{1}{2}\sqrt{25+4+4}=\frac{\sqrt{33}}{2}.$$
$$|\overline{OB}|=\frac{1}{2}\sqrt{9+16}=\frac{5}{2}.$$
$$\overline{AO}\cdot\overline{OB}=\frac{5\sqrt{33}}{4}\cos\varphi;\quad \overline{AO}\cdot\overline{OB}=\frac{1}{4}(-15+8)=-\frac{7}{4},$$
$$\cos\varphi=\frac{7}{5\sqrt{33}};\quad \varphi=\arccos\frac{7}{5\sqrt{33}}.$$

Задача 23. (Ск. V, 17.082)

Доказать, что если биссектрисы двух плоских углов трехгранного угла перпендикулярны, то биссектриса третьего плоского угла перпендикулярна каждой из них.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть S — вершина трехгранного угла $SABC$ (рис. 6.18). На ребрах отложим единичные векторы $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$. Ясно, что вектор $\bar{e}_1 + \bar{e}_2$ принадлежит биссектрисе угла B.

Аналогично векторы $\bar{e}_2 + \bar{e}_3$; $\bar{e}_1 + \bar{e}_3$ принадлежат биссектрисам двух других плоских углов.

По условию

$$(\bar{e}_1 + \bar{e}_2)(\bar{e}_2 + \bar{e}_3) = 0,$$

значит,

$$\bar{e}_1\bar{e}_2 + \bar{e}_1\bar{e}_3 + \bar{e}_2\bar{e}_3 + 1 = 0 \qquad (1)$$

Рассмотрим скалярное произведение

$$(\bar{e}_1 + \bar{e}_3)(\bar{e}_2 + \bar{e}_3)$$

$$(\bar{e}_1 + \bar{e}_3)(\bar{e}_2 + \bar{e}_3) = \bar{e}_1\bar{e}_2 + \bar{e}_1\bar{e}_3 + \bar{e}_3\bar{e}_2 + 1.$$

Учитывая соотношение (1), имеем

$(\bar{e}_1 + \bar{e}_3)(\bar{e}_2 + \bar{e}_3) = 0$, значит эти векторы перпендикулярны. Аналогично, доказывается, что $(\bar{e}_1 + \bar{e}_3) \perp (\bar{e}_2 + \bar{e}_3)$

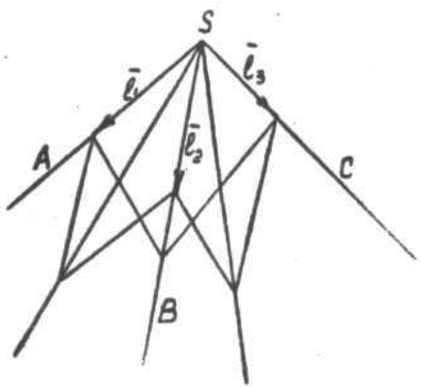


Рис. 6.18

Задача 24.

В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ диагональ AC_1 перпендикулярна плоскости, которая проходит через точки A_1, B, D. Доказать, что этот параллелепипед является кубом

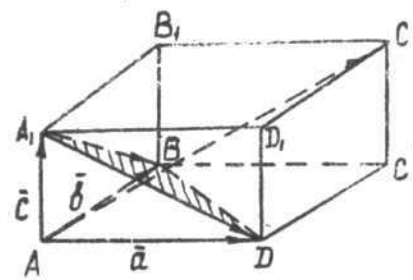


Рис. 6.19

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Обозначим $\bar{a} = \overline{AD}$, $\bar{b} = \overline{AB}$, $\bar{c} = \overline{AA_1}$. Тогда $\bar{a} \perp \bar{b}$, $\bar{a} \perp \bar{c}$, $\bar{b} \perp \perp \bar{c}$, поскольку параллелепипед прямоугольный (рис. 6.19).

$$\overline{AC_1} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}.$$

$$\overline{A_1D} = \overline{AD} - \overline{AA_1} = \bar{a} - \bar{c},$$

$$\overline{A_1B} = \overline{AB} - \overline{AA_1} = \bar{b} - \bar{c}.$$

Так как $\overline{AC_1} \perp A_1BD$, то $AC_1 \perp A_1D$, $AC_1 \perp A_1B$.

Поэтому
$$(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c})(\bar{a} - \bar{c}) = 0,$$
$$(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c})(\bar{b} - \bar{c}) = 0.$$

Раскрывая скобки в этих соотношениях и учитывая перпендикулярность векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, находим, что $\bar{a}^2 - \bar{c}^2 = 0$, $\bar{b}^2 - \bar{c}^2 = 0$, т. е. $|\bar{a}| = |\bar{b}| = |\bar{c}|$, что доказывает утверждение задачи.

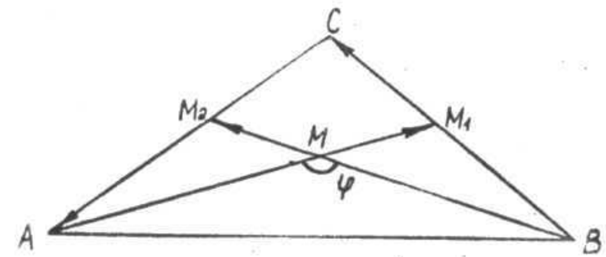


Рис. 6.20

Задача 25. (Ск. V. 17.086)

Найти угол между медианами катетов равнобедренного прямоугольного треугольника, обращенный к гипотенузе.

РЕШЕНИЕ

В треугольнике ABC AM_1 и BM_2 — медианы, $\angle AMB = \varphi$ (рис. 6.20) Пусть $AC = BC = a$, $AB = a\sqrt{2}$;

$$BM_2 = AM_1 = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

$$\cos\varphi = \frac{\overline{AM_1} \cdot \overline{BM_2}}{|\overline{AM_1}| \cdot |\overline{BM_2}|}$$

Учитывая, что

$$\overline{BM_2} = \frac{1}{2}(\overline{BA} + \overline{BC}) = \frac{1}{2}(2\overline{BC} + \overline{CA}) \text{ и } \overline{AM_1} = \frac{1}{2}(\overline{AC} + \overline{AB}) =$$

$$= \frac{1}{2}(2\overline{AC} + \overline{CB}).$$

Имеем

$$\overline{AM}_1 \cdot \overline{BM}_2 = \frac{1}{4}(2\overline{BC} + \overline{CA})(2\overline{AC} + \overline{CB}) =$$

$$= (0 - 2a^2 - 2a^2 + 0) \cdot \frac{1}{4} = -a^2, \quad |\overline{AM}_1| \cdot |\overline{BM}_2| =$$

$$= \frac{a\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2} = \frac{5}{4}a^2, \quad \cos\varphi = \frac{\overline{AM}_1 \cdot \overline{BM}_2}{|\overline{AM}_1| \cdot |\overline{BM}_2|} = \frac{-4a^2}{5a^2} = -\frac{4}{5}.$$

$$\varphi = \pi - \arccos\frac{4}{5}.$$

Задача 26. (Ск. V. 17.093)

Дана неплоская замкнутая линия ABCD. Доказать, что если $\angle ABC = \angle DAB = 90°$ и $DA = CB$, то $\angle ADC = \angle BCD$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Обозначим $CB = DA = a$, $CD = b$, $\angle BCD = \alpha$, $\angle ADC = \beta$ (рис. 6.21).

$$\cos\alpha = \frac{\overline{CB} \cdot \overline{CD}}{|\overline{CB}| \cdot |\overline{CD}|} = \frac{\overline{CB}\,(\overline{CB} + \overline{BA} + \overline{AD})}{|\overline{CB}| \cdot |\overline{CD}|} = \frac{a^2 + \overline{CB} \cdot \overline{AD}}{ab}.$$

$$\cos\beta = \frac{\overline{DC} \cdot \overline{DA}}{|\overline{DC}| \cdot |\overline{DA}|} = \frac{(\overline{DA} + \overline{AB} + \overline{BC})\,\overline{DA}}{|\overline{DC}| \cdot |\overline{DA}|} = \frac{a^2 + \overline{BC} \cdot \overline{DA}}{ab} =$$

$$= \frac{a^2 + \overline{CB} \cdot \overline{AD}}{ab}$$

значит, $\cos\alpha = \cos\beta$.

Учитывая, что $0 < \alpha < \pi$, $0 < \beta < \pi$, получаем, что

$$\alpha = \beta.$$

Задача 27. (Ск. V. 17.092)

Единичные векторы $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ и $\bar{e}_3$ удовлетворяют условию $\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3 = \bar{0}$. Найти $\bar{e}_1\bar{e}_2 + \bar{e}_2\bar{e}_3 + \bar{e}_3\bar{e}_1$

РЕШЕНИЕ

По условию

$$\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3 = 0$$

Возведем в квадрат:

$$\bar{e}_1^2 + \bar{e}_2^2 + \bar{e}_3^2 + 2(\bar{e}_1\bar{e}_2 + \bar{e}_2\bar{e}_3 + \bar{e}_1\bar{e}_3) = 0 \qquad (1)$$

Учитывая, что $|\bar{e}_1| = |\bar{e}_2| = |\bar{e}_3| = 1$, получим

$$\bar{e}_1\bar{e}_2 + \bar{e}_2\bar{e}_3 + \bar{e}_1\bar{e}_3 = -\frac{3}{2}.$$

Задача 28. (Ск. V. 17.089)

В ромбе $ABCD$ точки M и N — середины сторон BC и CD. Найти $\angle MAN$, если $\angle BAD = 60°$.

РЕШЕНИЕ

Обозначим $\angle MAN = \varphi$ (рис. 6.22)

$$\cos\varphi = \frac{\overline{AM} \cdot \overline{AN}}{|\overline{AM}| \cdot |\overline{AN}|} = \frac{(\overline{AB} + \overline{AC})(\overline{AD} + \overline{AC})}{2AB^2 + 2AC^2 - BC^2}$$

Обозначим $AB = BC = CD = DA = a$, $\angle BAD = \alpha$.

Тогда $AC = 2a\cos\frac{\alpha}{2}$

$$\cos\varphi = \frac{\cos\alpha + 4\cos^2\frac{\alpha}{2} + 4\cos^2\frac{\alpha}{2}}{1 + 8\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{13}{14}.$$

$$\varphi = \arccos\frac{13}{14}.$$

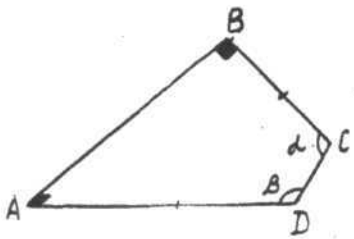


Рис. 6.21

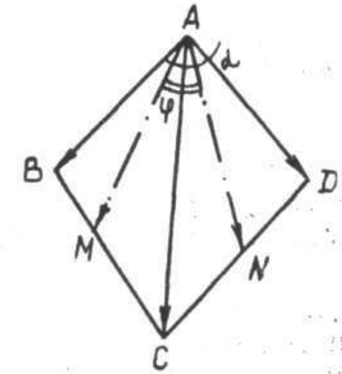


Рис 6.22

Задача 29. (Ск. V. 17.114)

В куб вписана сфера. Доказать, что сумма квадратов расстояний каждой точки сферы до вершин куба не зависит от выбора этой точки. Найти эту сумму.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть X — точка сферы, центр которой O (рис. 6.23). Имеем $\overline{XA}_1 = \overline{OA}_1 - \overline{OX}$; $\overline{XB}_1 = \overline{OB}_1 - \overline{OX}$, $\overline{XC}_1 = \overline{OC}_1 - \overline{OX}$, $\overline{XD}_1 = \overline{OD}_1 - \overline{OX}$, $\overline{XB} = \overline{OB} - \overline{OX}$, $\overline{XC} = \overline{OC} - \overline{OX}$, $\overline{XA} = \overline{OA} - \overline{OX}$, $\overline{XD} = \overline{OD} - \overline{OX}$. Значит, $\overline{XB}_1^2 + \overline{XC}_1^2 + \overline{XD}_1^2 + \overline{XA}_1^2 + \overline{XB}^2 + \overline{XC}^2 + \overline{XA}^2 + \overline{XD}^2 = 8\,\overline{OX}^2 + 8\overline{OB}_1 - 2\overline{OX}\,(\overline{OB}_1 + \overline{OC}_1 + \overline{OD}_1 + \overline{OA}_1 + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD} + \overline{OA}) = 8OB_1^2 + 8OX^2 = 6a^2 + 2a^2 = 8a^2$, где a — сторона куба.

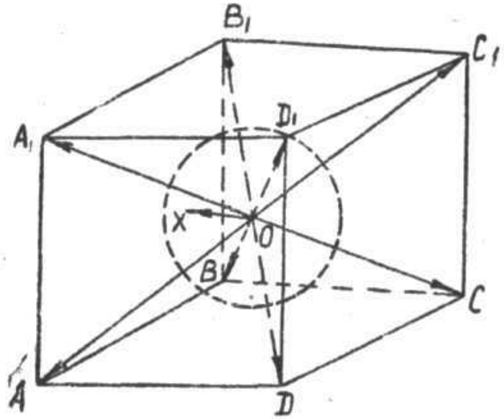


Рис. 6.23

Задача 30. (Ск. V. 17.117) Дан прямоугольник $ABCD$. Доказать, что сумма квадратов расстояний любой точки пространства до вершин A и C равна сумме квадратов ее расстояний до вершин B и D.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть $\overline{DC} = \bar a$, $\overline{AD} = \bar b$ (рис. 6.24), X — произвольная точка.

$$\overline{XA}\cdot\overline{XC} = (\overline{XD} - \bar b)(\overline{XD} + \bar a) = \overline{XD}^2 + \overline{XD}(\bar a - \bar b).$$

$$\overline{XB}\cdot\overline{XD} = (\overline{XD} + (\bar a - \bar b))\,\overline{XD} = \overline{XD}^2 + \overline{XD}(\bar a - \bar b),$$

отсюда

$$\overline{XA}\cdot\overline{XC} = \overline{XB}\cdot\overline{XD} \qquad (1)$$

Но

$$(\overline{XA} - \overline{XC})^2 = (\overline{XB} - \overline{XD})^2.$$

Получаем $\overline{XA}^2 + \overline{XC}^2 - 2\overline{XA}\cdot\overline{XC} = \overline{XB}^2 + \overline{XD}^2 - 2\overline{XB}\cdot\overline{XD}$.
Учитывая (1), имеем

$$XA^2 + XC^2 = XB^2 + XD^2.$$

Задача 31. (Ск. V, 17.130)
В окружность с центром O вписан четырехугольник $ABCD$, диагонали которого, пересекающиеся в точке P, взаимно перпендикулярны. Доказать, что середины сторон AB и CD, центр O и точка P являются вершинами параллелограмма.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Обозначим середины сторон AB и CD соответственно M и N (рис. 6.25). Найдем скалярное произведение $\overline{PM}$ и $\overline{DC}$.

$$\overline{PM}\cdot\overline{DC} = \frac{1}{2}(\overline{PA} + \overline{PB})\cdot(\overline{PC} - \overline{PD}) =$$

$$= \frac{1}{2}(\overline{PA}\cdot\overline{PC} - \overline{PA}\cdot\overline{PD} + \overline{PB}\cdot\overline{PC} - \overline{PB}\cdot\overline{PD}).$$

Поскольку $\overline{PA}\cdot\overline{PD} = 0$ и $\overline{PB}\cdot\overline{PC} = 0$, а $\overline{PA}\cdot\overline{PC} = \overline{PB}\cdot\overline{PD}$,

$$\overline{PM}\cdot\overline{DC} = 0,$$

значит, $\overline{PM} \perp \overline{DC}$. Поскольку $\overline{ON} \perp \overline{DC}$, то $\overline{ON} \parallel \overline{PM}$. Аналогично, $\overline{PN}\cdot\overline{AB} = 0$ и $\overline{PN} \parallel \overline{OM}$, следовательно P, M, O и N — вершины параллелограмма.

Задача 32. (Ск. IV, 15.237)

Даны два неколлинеарных единичных вектора $\bar a$ и $\bar b$. Доказать, что длина вектора $(\bar a\cdot\bar c)\bar b - (\bar b\cdot\bar c)\bar a$ не зависит от направления $\bar c$, если $\bar c$ — единичный вектор, компланарныйс $\bar a$ и $\bar b$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Обозначим $\bar a$, $\bar b = 2\alpha$, l — его бисектриса (рис. 6.26) пусть $(l, c) = \varphi$. Обозначим $t = (\bar a\bar c)\bar b - (\bar b\cdot\bar c)\,a$. Имеем $\bar a\bar c = \cos(\varphi + \alpha)$, $\bar b\bar c = \cos(\varphi - \alpha)$, $\bar a\bar b = \cos 2\alpha$, $|\bar t| = \sqrt{\bar t^2} =$

$$= \sqrt{\cos^2(\varphi+\alpha) + \cos^2(\varphi-\alpha) - 2\cos(\varphi+\alpha)\cos 2\alpha} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos(2\varphi + 2\alpha) + 1 + \cos(2\varphi - 2\alpha)) - (\cos 2\varphi + \cos 2\alpha)\cos 2\alpha} =$$

$$= \sqrt{1 + \cos 2\varphi\cos 2\alpha - \cos 2\varphi\cos 2\alpha - \cos^2 2\alpha} = |\sin 2\alpha|,$$

т. е. $|\bar t|$ не зависит от φ.

Задача 33. (Ск. IV, 15.173)

Даны два квадрата с общей вершиной $OABC$ и $OA_1B_1C_1$. Доказать, что медиана OM треугольника OAC_1 перпендикулярна прямой A_1C.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Обозначим стороны квадрата $OABC$ $\bar a$ и $\bar b$ (рис. 6.27), $\overline{OC_1} = \bar C$, $\overline{OM} = \bar m$; $\overline{CA_1} = \bar e$, $\overline{OA_1} = \bar d$, $\angle A_1OC = \varphi$.
Тогда

$$\bar m\cdot\bar e = \frac{1}{2}(\bar b + \bar c)(\bar a + \bar d) = \frac{1}{2}(\bar a\cdot\bar b + \bar b\cdot\bar d + \bar c\cdot\bar a + \bar c\cdot\bar d) =$$

$$= \frac{1}{2}(\bar a\cdot\bar c + \bar b\cdot\bar d) = \frac{1}{2}|\bar a|\cdot|\bar c|(-\cos\angle COC_1 + \cos\angle AOA_1) =$$

$$= \frac{1}{2}|\bar a|\cdot|\bar c|(-\cos(90^\circ + \varphi) + \cos(90^\circ + \varphi)) = 0,$$

т. е. $OM \perp AC_1$

Задача 34. (Ск. IV, 15.155)

Точки M и N — середины диагоналей AC и BD четырехугольника $ABCD$. Доказать, что

$$4MN^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 - AC^2 - BD^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть $\overline{AB} = \bar{a}$, $\overline{AD} = \bar{b}$, $\overline{AC} = \bar{c}$ (рис. 6.28). Тогда

$$\overline{BC} = \bar{c} - \bar{a},\ \overline{DC} = \bar{c} - \bar{b},\ \overline{DB} = \bar{a} - \bar{b}.$$

Далее $\overline{AM} = \frac{1}{2}\bar{c}$; $\overline{AN} = \frac{1}{2}(\bar{a} + \bar{b})$ и $\overline{MN} = \overline{AN} - \overline{AM} = \frac{1}{2}(\bar{a} + \bar{b} - \bar{c})$

Теперь заданное равенство можно записать в виде:

$$(\bar{a} + \bar{b} - \bar{c})^2 = \bar{a}^2 + (\bar{c} - \bar{a})^2 + (\bar{c} - \bar{b})^2 + \bar{b}^2 - \bar{c}^2 - (\bar{a} - \bar{b})^2$$

и для его доказательства остается раскрыть скобки в левой и правой части написанного равенства.

Задача 35. (Ск. IV. 15.154)

Вокружность вписан четырехугольник $ABCD$, содержащий ее центр. Доказать, что если $AB^2 + CD^2 = 4R^2$

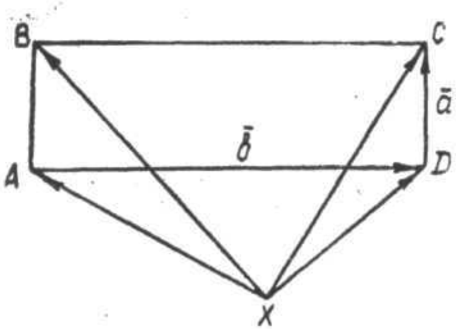


Рис. 6.24

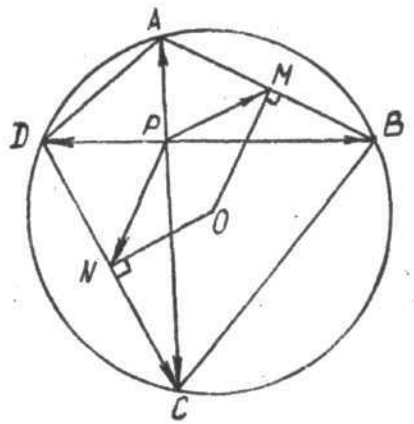


Рис 6.25

где R — радиус описанной окружности, то диагонали четырехугольника перпендикулярны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Вычислим сумму $AB^2 + CD^2$ (рис. 6.29).

$$AB^2 + CD^2 = (\overline{OB} - \overline{OA})^2 + (\overline{OD} - \overline{OC})^2 =$$

$$= 4R^2 - 2(\overline{OA} \cdot \overline{OB} + \overline{OC} \cdot \overline{OD}).$$

Учитывая условие, получим

$$\overline{OA} \cdot \overline{OB} + \overline{OC} \cdot \overline{OD} = 0 \qquad (1)$$

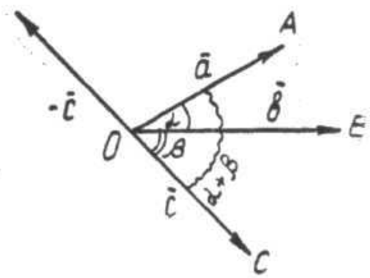


Рис. 6.26

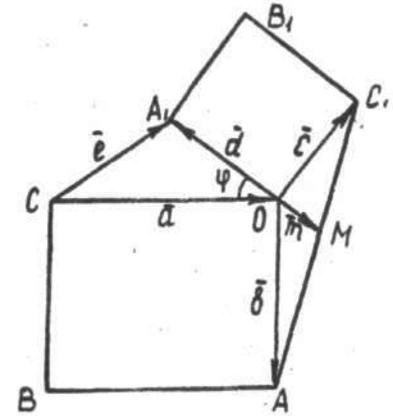


Рис. 6.27

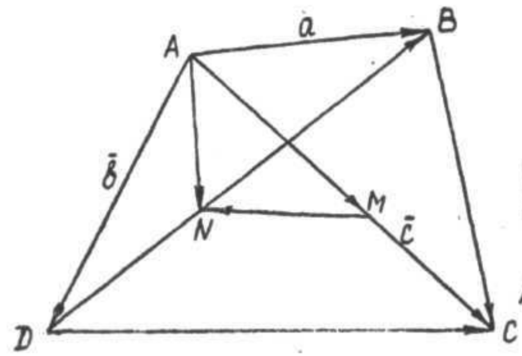


Рис. 6.28

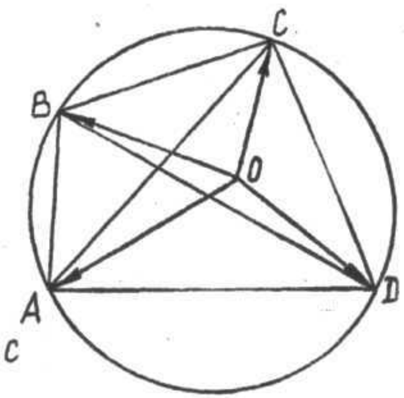


Рис. 6.29

Отсюда, $\cos\angle AOB + \cos\angle COD = 0$, или $\angle AOB + \angle COD = 180°$, а поэтому и $\angle BOC + \angle DOA = 180°$. Из последнего равенства следует, что

$$\overline{OB} \cdot \overline{OC} + \overline{OD} \cdot \overline{OA} = 0 \qquad (2)$$

Вычитая из равенства (1) равенство (2), получим

$$\overline{OB} \cdot (\overline{OA} - \overline{OC}) - \overline{OD}\,(\overline{OA} - \overline{OC}) = 0$$

Итак,

$$\overline{CA} \cdot \overline{DB} = 0$$

Значит, диагонали четырехугольника взаимно перпендикулярны.

Задача 36. (Ск. IV, 15.152)

Дан треугольник ABC, H — точка пересечения высот. Доказать, что

$$\overline{HA}\cdot\overline{HB}=\overline{HB}\cdot\overline{HC}=\overline{HC}\cdot\overline{HA}=k.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

$$\overline{HA}\cdot\overline{HB}=\sqrt{4R^2-a^2}\cdot\sqrt{4R^2-b^2}\cos(180^\circ-C)=$$

$$=\sqrt{\frac{a^2}{\sin^2 A}-a^2}\cdot\sqrt{\frac{b^2}{\sin^2 B}-b^2}(-\cos C)=$$

$$=-\frac{ab\cos A\cos B\cos C}{\sin A\sin B}=-4R^2\cos A\cos B\cos C.$$

$$\overline{HB}\cdot\overline{HC}=-\frac{bc\cos B\cos C\cos A}{\sin B\sin C}=-4R^2\cos A\cos B\cos C=k.$$

7. НАХОЖДЕНИЕ РАССТОЯНИЙ И УГЛОВ МЕЖДУ ПРЯМЫМИ

Как находить расстояние между скрещивающимися прямыми, покажем на следующем примере:

Найти расстояние между непересекающимися диагоналями двух смежных граней куба, ребро которого равно m.

РЕШЕНИЕ

Пусть требуется найти расстояние MN между диагоналями A_1B и B_1C (рис. 7:1)

Обозначим $\overline{BA}=\bar{a}$, $\overline{BC}=\bar{b}$, $\overline{BB_1}=\bar{c}$.

Разложим вектор $\overline{MN}$ по векторам $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$. По правилу «замкнутого контура»:

$$\overline{MN}=\overline{MB}+\overline{BC}+\overline{CN}$$

Учитывая коллинеарность векторов $\overline{MB}$ и $\overline{BA_1}$, имеем

$$\overline{MB}=x\overline{BA_1}=x(\bar{a}+\bar{c}).$$

Аналогично, $\overline{CN}=y\overline{CB_1}=y(\bar{c}-\bar{b})$. Тогда

$$\overline{MN}=x(\bar{a}+\bar{c})+\bar{b}+y(\bar{c}-\bar{b}),\ \text{или}$$

$$\overline{MN}=x\bar{a}+(1-y)\bar{b}+(x+y)\bar{c}$$

Так как отрезок MN перпендикулярен к прямым BA_1 и CB_1, то

$$\overline{MN}\cdot\overline{BA_1}=0\ \text{и}\ \overline{MN}\cdot\overline{CB_1}=0$$

Поэтому $\begin{cases}(x\bar{a}+(1-y)\bar{b}+(x+y)\bar{c})(\bar{a}+\bar{c})=0\\(x\bar{a}+(1-y)\bar{b}+(x+y)\bar{c})(\bar{c}-\bar{b})=0\end{cases}$

Пусть $|\bar{a}|=|\bar{b}|=|\bar{c}|=m$. Тогда из первого равенства следует, что

$$xm^2+(x+y)m^2=0,$$

откуда $2x+y=0$

Аналогично из второго равенства получим, что

$$x+2y-1=0$$

Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + 2y = 1, \end{cases}$$

откуда $x = -\frac{1}{3}$, $y = \frac{2}{3}$.

Итак

$$\overline{MN} = -\frac{1}{3}\bar{a} + \left(1 - \frac{2}{3}\right)\bar{b} + \left(-\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right)\bar{c}$$

Поскольку

$$|\overline{MN}| = \sqrt{\overline{MN}^2}, \ |\bar{a}| = |\bar{b}| = |\bar{c}| = m, \text{ то}$$

$$|MN| = \sqrt{\frac{1}{9}m^2 + \frac{1}{9}m^2 + \frac{1}{9}m^2} = \frac{m\sqrt{3}}{3}$$

Задача 1.

Даны скрещивающиеся прямые a и b, угол между которыми равен φ; длина их общего перпендикуляра MN равна d. На данных прямых взяты соответственно точки A и B, так что $MA = m$, $NB = n$. Найти длину отрезка AB.

РЕШЕНИЕ

Обозначим векторы: $\overline{AM} = \bar{m}$, $\overline{NB} = \bar{n}$, $\overline{MN} = \bar{d}$.

По правилу многоугольника имеем:

$$\overline{AB} = \bar{m} + \bar{d} + \bar{n}.$$

Возведем в квадрат:

$$\overline{AB}^2 = \bar{m}^2 + \bar{d}^2 + \bar{n}^2 + 2\bar{m}\bar{d} + 2\bar{m}\bar{n} + 2\bar{d}\bar{n} \quad (1)$$

Так как векторы $\bar{d}$ и $\bar{m}$, $\bar{d}$ и $\bar{n}$ перпендикулярны, то $\bar{m}\bar{d} = \bar{d}\bar{n} = 0$. Возможны два случая:

1) $\varphi = \widehat{(\bar{m}, \bar{n})}$ (рис. 7.2)

2) $\widehat{(\bar{m}, \bar{n})} = 180° - \varphi$ (рис. 7.3)

В первом случае

$$\bar{m} \cdot \bar{n} = |\bar{m}| \cdot |\bar{n}| \cos\varphi$$

Во втором случае

$$\bar{m} \cdot \bar{n} = -|\bar{m}| \cdot |\bar{n}| \cos\varphi$$

Подставив эти значения в (1), получим

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(\overline{AB})^2} = \sqrt{m^2 + n^2 + d^2 \pm 2mn\cos\varphi}$$

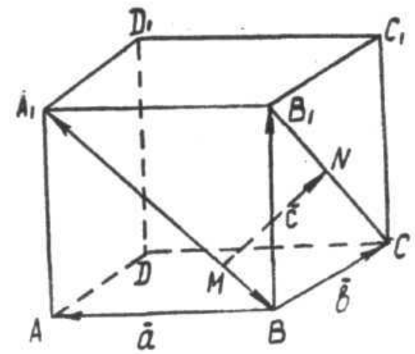


Рис. 7.1

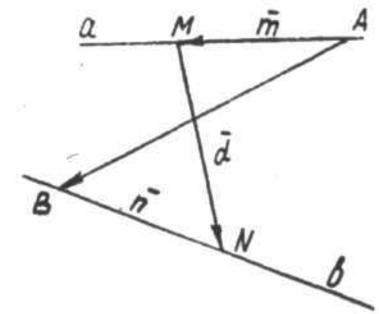


Рис. 7.2

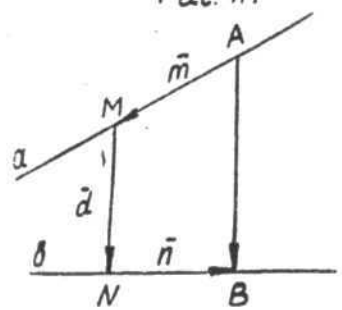


Рис. 7.3

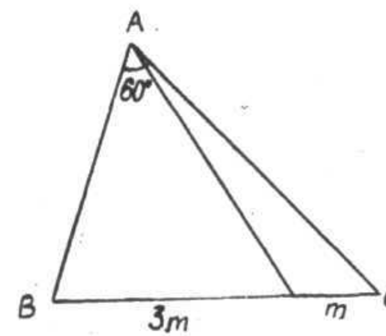


Рис. 7.4

Задача 2. (Ск. V, 17.098)

Дан треугольник ABC; $AB = 4$ см; $AC = 8$ см; $\angle BAC = 60°$. Найти длину вектора $\overline{AN}$, где $N \in BC$ и $BN : NC = 3 : 1$.

РЕШЕНИЕ

По формуле деления отрезка в данном отношении (рис. 7.4)

$$\overline{AN} = \frac{\overline{AB} + 3\overline{AC}}{4}$$

$$AN = \sqrt{(\overline{AN})^2} = \frac{1}{4}\sqrt{AB^2 + 9AC^2 + 6AB \cdot AC \cdot \cos\alpha}$$

При $AB = 4$, $AC = 8$, $\alpha = 60°$

$$AN = \sqrt{43}$$

Задача 3. (Ск. V, 17.120)

Найти длину биссектрисы AM треугольника ABC, если $AB = c$, $AC = b$ и $\angle A = \alpha$.

РЕШЕНИЕ

Докажем, что

$$AM = \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}$$

Учитывая формулу деления отрезка в данном отношении, имеем

$$\overline{AM} = \bar l = \frac{c\bar b + b\bar c}{b+c}.$$

$$|\bar l| = \sqrt{\bar l^2} = \sqrt{\left(\frac{c\bar b+b\bar c}{b+c}\right)^2} = \sqrt{\frac{b^2c^2+2bc(\bar b\cdot\bar c)+c^2b^2}{(b+c)^2}}\text{, значит,}$$

$$|\bar l| = \frac{bc}{b+c}\sqrt{2+2\cos A} = \frac{bc}{b+c}\sqrt{2\cdot 2\cos^2\frac{A}{2}} = \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}.$$

Подставляя данные задачи, имеем $AM = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{\alpha}{2}$

Задача 4. (Ск. V, 17.061)

В ромбе $ABCD$ длина стороны равна 6, а величина угла BAD равна $\pi/3$. На стороне BC взята точка E такая, что $EC = 2$. Найти расстояние от E до центра симметрии ромба.

РЕШЕНИЕ

Очевидно, что $\angle DBC = \pi/3$, $BD = 6$ (рис. 7.5)

$$\overline{OE} = \overline{OB} + \overline{BE} = \frac{1}{2}\overline{DB} + \frac{2}{3}\overline{BC}$$

Возведем в квадрат

$$OE^2 = \frac{DB^2}{4} + \frac{4}{9}BC^2 - \frac{2BD\cdot BC}{3}\cos\angle DBC = 9 + 16 - 12 = 13$$

$OE = \sqrt{13}$

Задача 5. (Ск. IV. 15.237)

Даны два неколлинеарных единичных вектора $\bar a$ и $\bar b$. Доказать, что длина вектора $(\bar a\cdot\bar c)\bar b - (\bar b\cdot\bar c)\bar a$ не зависит от направления $\bar c$, если $\bar c$ — единичный вектор, компланарный с $\bar a$ и $\bar b$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Первый способ

Учитывая условие, $\bar c = m\bar a + n\bar b$ и

$$|\bar c| = \sqrt{ma^2 + 2mn\bar a\cdot\bar b + n^2b^2} = \sqrt{m^2+2mn\cos\alpha+n^2},$$

поскольку $|\bar a| = |\bar b| = |\bar c| = 1$. Ясно, что $\sqrt{m^2+2mn\cos\alpha+n^2} = 1$, где α — угол между векторами $\bar a$ и $\bar b$.

Имеем

$$\bar l = (\bar a\cdot\bar c)\bar b - (\bar b\cdot\bar c)\bar a = (\bar a(m\bar a+n\bar b))\bar b - (\bar b(m\bar a+n\bar b))\bar a = (m\bar a^2+n\bar a\cdot\bar b)\bar b - (m\bar a\cdot\bar b+nb^2)\bar a = (m+n\cos\alpha)\bar b - (n+m\cos\alpha)\bar a$$

Найдем длину вектора $\bar l$

$$|\bar l| = \sqrt{(m+n\cos\alpha)^2b^2 - 2(m+n\cos\alpha)(n+m\cos\alpha)\bar a\bar b + (n+m\cos\alpha)^2a^2} = \sqrt{(m+n\cos\alpha)^2 - 2m+n\cos\alpha)(n+m\cos\alpha)\cos\alpha + (n+m\cos\alpha)^2} = \sqrt{m^2+2mn\cos\alpha + n^2\cos^2\alpha - 2mn\cos\alpha - 2m^2\cos^2\alpha - 2n^2\cos^2\alpha - 2mn\cos^3\alpha + n^2 + 2mn\cos\alpha + m^2\cos^2\alpha} = \sqrt{m^2+2mn\cos\alpha+n^2-(m^2+2mn\cos\alpha+n^2)\cos^2\alpha}.$$

Но $m^2+2mn\cos\alpha+n^2 = 1$, значит,

$$|\bar l| = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = |\sin\alpha|,$$

следовательно длина вектора $\bar l$ зависит только от угла между векторами $\bar a$ и $\bar b$ и не зависит от направления вектора $\bar c$.

Второй способ см. стр. 94

Задача 6 (Ск. V, 17.101)

Объем треугольной пирамиды, построенный на векторах $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$, равен $\sqrt{15}$. Определить длину вектора $\overline{OC}$, если $\overline{OA}\cdot\overline{OB} = 1$, $\overline{OA}\cdot\overline{OC} = 0$, $\overline{OB}\cdot\overline{OC} = 0$, $|\overline{OA}| = |\overline{OB}| = 2$.

РЕШЕНИЕ

Примем за основание треугольной пирамиды, построенной на векторах $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$ треугольник AOB. Тогда

$$V = \frac{1}{3}S_{AOB}\cdot OC \text{ (рис. 7.6)}$$

Найдем площадь треугольника AOB. Так как $\overline{AO}\cdot\overline{OC} = \overline{OB}\cdot\overline{OC} = 0$, то $\angle COB = \angle COA = 90^\circ$

$$\cos\angle AOB = \frac{\overline{AO}\cdot\overline{BO}}{|\overline{AO}|\cdot|\overline{BO}|} = \frac{1}{4},$$

поэтому $\sin\angle AOB = \frac{\sqrt{15}}{4}$ и

$$S_{\Delta AOB} = \frac{AO\cdot OB\cdot\sin\angle AOB}{2} = \frac{\sqrt{15}}{2}$$

и $V=\frac{\sqrt{15}}{2\cdot 3}OC$, итак,

$$\frac{\sqrt{15}}{6}\cdot OC=\sqrt{15},\quad OC=6$$

Задача 7. (Ск. V. 17. 059)

Дан куб $ABCD\,A_1B_1C_1D_1$. Найти косинус угла между векторами $\overline{DA_1}$ и $\overline{DM}$, где M — середина ребра CC_1

РЕШЕНИЕ

Обозначим длину ребра куба как a, угол между векторами $\overline{DA_1}$ и $\overline{DM}$ как φ (рис. 7.7)

$$\cos\varphi=\frac{\overline{DM}\cdot\overline{DA_1}}{|\overline{DM}|\cdot|\overline{DA_1}|}\qquad(1)$$

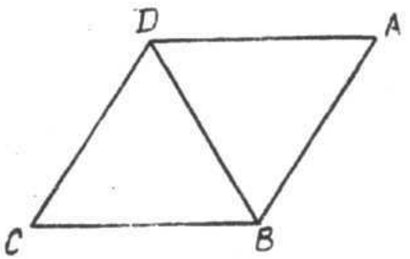


Рис. 7.5

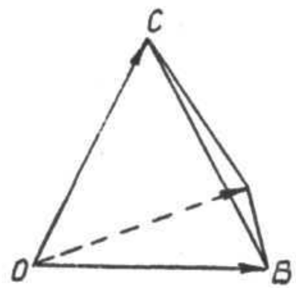


Рис. 7.6

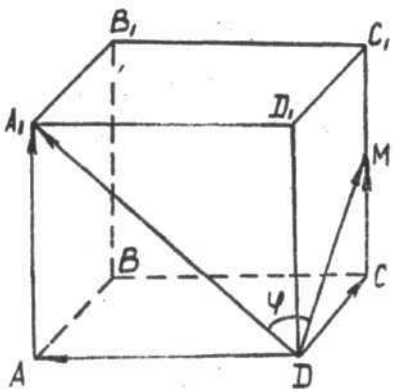


Рис. 7.7

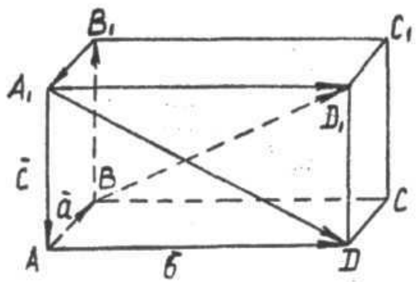


Рис. 7.8

Учитывая, что $\overline{DM}=\overline{DC}+\overline{CM}$, $\overline{DA_1}=\overline{DA}+\overline{AA_1}$, формулу (1) запишем:

$$\cos\varphi=\frac{(\overline{DC}+\overline{CM})(\overline{DA}+\overline{AA_1})}{\frac{a}{2}\sqrt{5}\cdot a\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{\overline{DC}\cdot\overline{DA}+\overline{DC}\cdot\overline{AA_1}+\overline{CM}\cdot\overline{DA}+\overline{CM}\cdot\overline{AA_1}}{\frac{a}{2}\cdot\sqrt{5}\cdot a\sqrt{2}}=\frac{\frac{a^2}{2}}{\frac{a^2}{2}\cdot\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{10}},$$

$$\varphi=\arccos\frac{\sqrt{10}}{10}$$

Задача 8. (Ск. V, 17.064)

Найти угол между не нулевыми векторами $\bar a$ и $\bar b$, если

$$(\bar a-\bar b)^2+(2\bar a-\bar b)^2=56,\ |\bar a|=2,\ |\bar b|=3$$

РЕШЕНИЕ

$$(\bar a-\bar b)^2+(2\bar a-\bar b)^2=56$$

$$a^2+b^2-2\bar a\bar b+4a^2+b^2-4\bar a\bar b=56$$

$$\bar a\bar b=-3$$

$$\cos\varphi=\frac{\bar a\bar b}{|\bar a|\cdot|\bar b|}=-\frac{1}{2}$$

$$\varphi=120^\circ$$

Задача 9. (Ск. V, 17.090)

Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$; $AB=a$, $BC=b$, $DD_1=c$. Найти острый угол между прямыми BD_1 и A_1D.

РЕШЕНИЕ

Обозначим $\overline{AB}=\bar a$, $\overline{AD}=\bar b$, $\overline{AA_1}=\bar c$ (рис. 7.8), φ — угол между прямыми BD_1 и A_1D.

$$\overline{A_1D}=\overline{A_1A}+\overline{AD}=-\bar c+\bar b,\quad \overline{BD_1}=\overline{BB_1}+\overline{B_1A_1}+\overline{A_1D_1}=$$

$$=-\bar a+\bar c+\bar b.$$

Тогда $\overline{A_1D}\cdot\overline{BD_1}=(-\bar c+\bar b)(\bar c+\bar b-\bar a)=\bar a\bar c-\bar a\bar b+\bar b\bar c+\bar b\bar b-$ $-\bar c\bar c-\bar c\bar b=b^2-c^2$

С другой стороны,

$$|\overline{A_1D}|=\sqrt{c^2+b^2},\ |\overline{BD_1}|=\sqrt{a^2+b^2+c^2},\ \overline{A_1D}\cdot\overline{BD_1}=$$

$$= \sqrt{b^2+c^2} \cdot \sqrt{a^2+b^2+c^2} \cos \varphi$$

$$|\cos \varphi| = \frac{|\overline{A_1D} \cdot \overline{BD_1}|}{|\overline{A_1D}|\,|\overline{BD_1}|}$$

значит,

$$|\cos \varphi| = \frac{|b^2 - c^2|}{\sqrt{b^2 \cdot c^2} \cdot \sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Задача 10. (Ск. V, 17.100)

Дан треугольник ABC; BD — медиана; $\angle DBC = 90°$; $BD = \frac{\sqrt{3}}{4} AB$. Найти $\angle ABD$.

РЕШЕНИЕ

$\overline{BD} = \frac{1}{2}(\overline{BA} + \overline{BC})$ (рис. 7.9). $BD^2 = \overline{BD} \cdot \overline{BD} = \frac{1}{2}(\overline{BA} \cdot \overline{BD} + \overline{BC} \cdot \overline{BD}) = \frac{1}{2}\overline{BA} \cdot \overline{BD}$, следовательно $BD^2 = \frac{1}{2} BA \cdot BD \times \cos \angle ABD$. Учитывая, что $BA = \frac{4}{\sqrt{3}} BD$, получаем

$$BD^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} BD^2 \cos \angle ABD$$

$$\cos \angle ABD = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \angle ABD = \frac{\pi}{6}$$

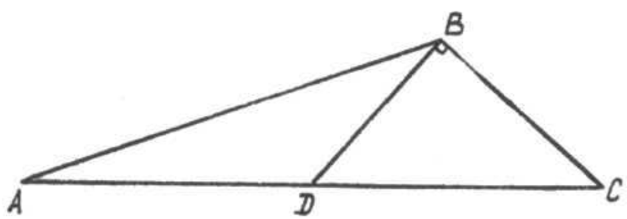


Рис. 7.9

Задача 11. (Ск. V, 17.049)

Медианы боковых сторон равнобедренного треугольника пересекаются под углом 60°. Найти угол при вершине треугольника.

РЕШЕНИЕ

Обозначим $\angle BAC = x$. Пусть $\overline{AC} = \bar{b}$, $\overline{AB} = \bar{c}$ и $|\bar{b}| = |\bar{c}| = 1$. M — точка пересечения медиан ($AB = AC$). Обозначим далее $\overline{CM} = \bar{m}$, $\overline{BM} = \bar{n}$ (рис. 7.10)

Итак,

$$\bar{m} = \frac{2}{3}\left(\frac{\bar{c}}{2} - \bar{b}\right) \qquad (1)$$

$$\bar{n} = \frac{2}{3}\left(\frac{\bar{b}}{2} - \bar{c}\right)$$

$$\bar{m} \cdot \bar{n} = |\bar{m}| \cdot |\bar{n}| \cos 60°$$

Поскольку $|\bar{m}| = |\bar{n}| = m$, то $\bar{m} \cdot \bar{n} = \frac{m^2}{2}$. С другой стороны

$$\bar{m} \cdot \bar{n} = \frac{4}{9}\left(\frac{\bar{c}}{2} - \bar{b}\right)\left(\frac{\bar{b}}{2} - \bar{c}\right) = \frac{1}{9}(5\bar{b}\bar{c} - 2(b^2 + c^2))$$

Учитывая соотношение (2)

$$\frac{m^2}{2} = \frac{1}{9}(5\bar{b}\bar{c} - 2(b^2 + c^2))$$

Учитывая соотношение (1)

$$m^2 = \frac{4}{9}\left(\frac{\bar{c}}{2} - \bar{b}\right)^2,$$

или

$$\frac{4}{9}\left(\frac{\bar{c}}{2} - \bar{b}\right)^2 = \frac{2}{9}(5\bar{b}\bar{c} - 2(b^2 + c^2))$$

Поскольку $|\bar{b}| = |\bar{c}| = 1$, имеем

$$2\left(\frac{1}{4} + 1 - \bar{b} \cdot \bar{c}\right) = 5\bar{b} \cdot \bar{c} - 4,$$

откуда $\bar{b} \cdot \bar{c} = \frac{13}{14}$, $\cos x = \frac{13}{14}$

$$x = \arccos \frac{13}{14}$$

Задача 12. (Ск. V, 17.047)

В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дано: $AA_1 = 10$, $AD = 6$, $AB = 8$. Найти косинус угла между векторами $\overline{DB_1}$ и $\overline{AD_1}$

РЕШЕНИЕ

Обозначим $\overline{AB} = \bar{a}$, $\overline{A_1D_1} = \bar{b}$, $\overline{AA_1} = \bar{c}$, α — угол между векторами $\overline{DB_1}$ и $\overline{AD_1}$ (рис. 7.11)

$$\cos \alpha = \frac{|\overline{DB_1} \cdot \overline{AD_1}|}{|\overline{DB_1}| \cdot |\overline{AD_1}|}$$

Тогда

$$\overline{DB_1} = \bar{c} + \bar{a} - \bar{b}$$

$$\overline{AD_1} = \bar{b} + \bar{c}$$

$$\overline{DB_1} \cdot \overline{AD_1} = (\bar{c} + \bar{a} - \bar{b})(\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a}\bar{c} + \bar{a}\bar{b} - \bar{b}\bar{c} + c^2 + \bar{b}\bar{c} - b^2 =$$
$$= c^2 - b^2 = 64.$$

$$\cos\alpha = \frac{64}{\sqrt{200} \cdot \sqrt{136}} = \frac{8}{5\sqrt{17}}$$

Задача 13.

В равнобедренном треугольнике медианы, проведенные к боковым сторонам, взаимно перпендикулярны. Найти угол между боковыми сторонами этого треугольника.

РЕШЕНИЕ

Пусть в треугольнике ABC $AB = AC$, BB_1 и CC_1 — медианы (рис. 7.12)

Обозначим

$$\overline{AB} = \bar{p}, \quad \overline{AC} = \bar{q}$$

Тогда

$$\overline{BB_1} = \overline{B_1A} + \overline{AB} = \frac{1}{2}\bar{q} - \bar{p}, \ \overline{CC_1} = \overline{AC_1} - \overline{AC} = \frac{1}{2}\bar{p} - \bar{q}.$$

Поскольку медианы BB_1 и CC_1 перпендикулярны, то

$$\overline{BB_1} \cdot \overline{CC_1} = 0, \text{ или}$$

$$\left(\frac{1}{2}\bar{p} - \bar{q}\right)\left(\frac{1}{2}\bar{q} - \bar{p}\right) = 0,$$

$$\frac{1}{4}\bar{q} \cdot \bar{p} - \frac{1}{2}\bar{q}^2 - \frac{1}{2}\bar{p}^2 + \bar{p} \cdot \bar{q} = 0,$$

$$\frac{5}{4}\bar{p} \cdot \bar{q} - \frac{1}{2}\bar{q}^2 - \frac{1}{2}\bar{p}^2 = 0.$$

Учитывая, что

$$|\bar{p}| = |\bar{q}| = t$$

имеем

$$\frac{5}{4}t^2\cos\varphi - t^2 = 0$$

$$\cos\varphi = 0{,}8$$

$$\varphi \approx 37^\circ$$

Задача 14. (Ск. V, 17.095)

Известны длины ребер тетраэдра $DABC$. Найти косинус угла между противолежащими ребрами AB и CD.

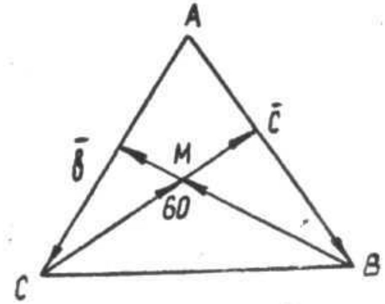


Рис. 7.10

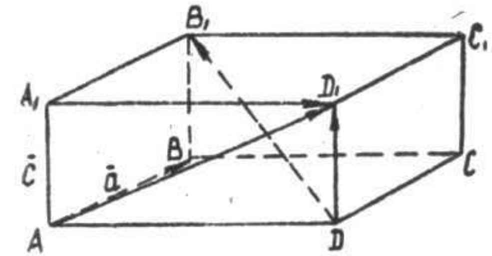


Рис. 7.11

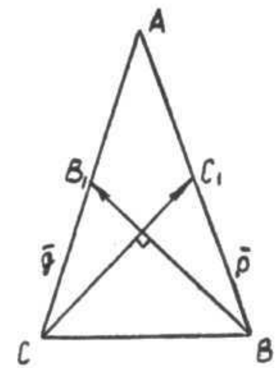


Рис 7.12

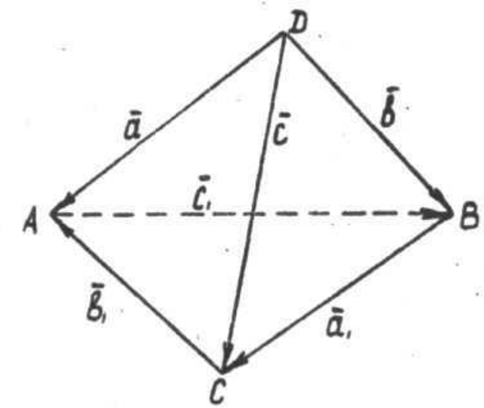


Рис.7.13

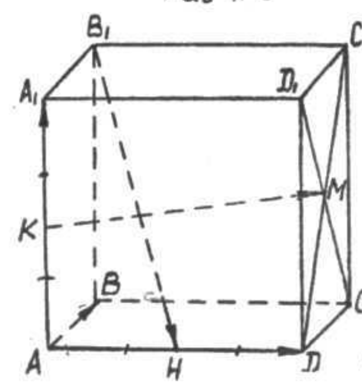


Рис. 17.14

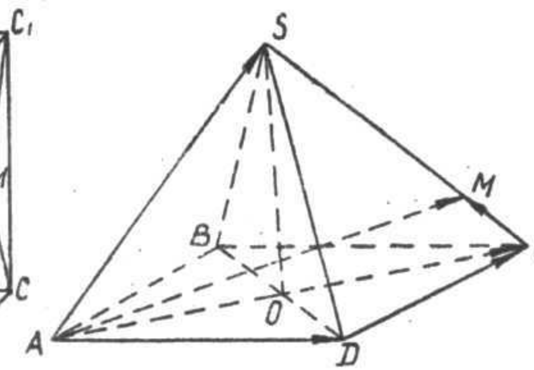


Рис. 7.15

РЕШЕНИЕ

Рассмотрим тетраэдр $DABC$ (рис. 7.13). Обозначим $\overline{DA}=\bar a$, $\overline{DB}=\bar b$, $\overline{DC}=\bar c$, $\overline{BC}=\bar a_1$, $\overline{AB}=\bar c_1$, $\overline{CA}=\bar b_1$, φ — угол между ребрами AD и BC вычисляется по формуле

$$\cos\varphi=\frac{|b^2+b_1^2-c^2-c_1^2|}{2aa_1} \qquad (1)$$

Доказываемое равенство равносильно равенству $|2\bar a\cdot\overline{CB}|=|\bar b^2-\bar c^2+\overline{AC}^2-\overline{AB}^2|$,
или $|2\bar a(\bar b-\bar c)|=|\bar b^2-\bar c^2+(\bar c-\bar a)^2-(\bar b-\bar a)^2|$.
но $|\bar b^2-\bar c^2+(\bar c-\bar a)^2-(\bar b-\bar a)^2|=|2a(\bar b-\bar c)|$,
а значит, формула (1) верна.

Задача 15. (Ск. V. 17.029)

Даны три вектора $\bar a$, $\bar b$ и $\bar c$. Доказать, что вектор $(\bar b\bar c)\,\bar a-(\bar a\bar c)\,\bar b$ перпендикулярен вектору $\bar c$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Перемножим вектор $(\bar b\bar c)\,\bar a-(\bar a\bar c)\,\bar b$ и вектор

$\bar c$: $((\bar b\bar c)\,\bar a-(\bar a\bar c)\cdot\bar b))\,\bar c=(\bar b\bar c)(\bar a\bar c)-(\bar a\bar c)(\bar b\bar c)=0$

значит эти векторы перпендикулярны.

Задача 16. (Ск. V. 17.044)

Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (вершины основания $ABCD$ расположены по ходу часовой стрелки); K — середина ребра AA_1; H — середина ребра AD; M — центр грани CC_1D_1D. Доказать, что прямая KM перпендикулярна прямой B_1H.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Обозначим векторы $\overline{AA_1}=\bar a$, $\overline{AB}=\bar c$, $\overline{AD}=\bar b$ (рис. 7.14).

Тогда $\overline{KM}=\bar b+\frac{\bar c}{2}$, $\overline{B_1H}=\frac{\bar b}{2}-\bar c-\bar a$.

$$\overline{KM}\cdot\overline{B_1H}=\left(\bar b+\frac{\bar c}{2}\right)\left(\frac{\bar b}{2}-\bar c-\bar a\right)=\frac{1}{2}\bar b^2-\bar b\bar c-\bar b\bar a+$$
$$+\frac{1}{4}\bar b\bar c-\frac{1}{2}\bar c^2-\frac{1}{2}\bar a\bar c.$$

Поскольку $\bar b\bar c=0$, $\bar b\bar a=0$, $\bar a\bar c=0$, то $\overline{KM}\cdot\overline{B_1H}=\frac{1}{2}\bar b^2-\frac{1}{2}\bar c^2=0$

Значит, $KM\perp B_1H$, что и требовалось доказать.

Задача 17. (Ск. V. 17.043)

В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ длина каждого ребра равна a. Точка $M\in SC$ и $SM:MC=2:1$. Найти угол между векторами $\overline{DC}$ и $\overline{AM}$.

РЕШЕНИЕ

Обозначим φ — искомый угол между векторами $\overline{DC}$ и $\overline{AM}$ (рис. 7.15)

$$\cos\varphi=\frac{|\overline{AM}\cdot\overline{DC}|}{|\overline{AM}|\cdot|\overline{DC}|}.$$

По формуле (2.11)

$$\overline{AM}=\frac{2}{3}\overline{AC}+\frac{1}{3}\overline{AS},\quad \overline{AM}\cdot\overline{DC}=\frac{2}{3}\overline{AC}\cdot\overline{DC}+\frac{1}{3}\overline{AS}\cdot\overline{DC}.$$

Обозначим $|\overline{DC}|=a$. Тогда $\overline{AC}\cdot\overline{DC}=a\sqrt{2}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2}=a^2$.
Поскольку $\overline{AM}=\overline{AC}+\overline{CM}$, то $|\overline{AM}|=\sqrt{\overline{AC}^2+\overline{CM}^2-2|\overline{AC}|\cdot|\overline{CM}|\cos\angle ACM}$. Поскольку $\cos\angle ACM=\frac{\sqrt{2}}{2}$, то

$$|\overline{AM}|=\sqrt{2a^2+\frac{a^2}{9}-2a\sqrt{2}\cdot\frac{a}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{a\sqrt{13}}{3}.$$

Итак,

$$\cos\varphi=\frac{\frac{2}{3}a^2+\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2}{2}}{a\cdot\frac{a}{3}\sqrt{13}}=\frac{5\sqrt{13}}{26}.$$

Задача 18.

В правильном тетраедре $DABC$ отрезок MN соединяет середину ребра AD с центром грани BCD, а отрезок QP соединяет середину ребра CD с центром грани ABC. Найти угол между отрезками MN и PQ.

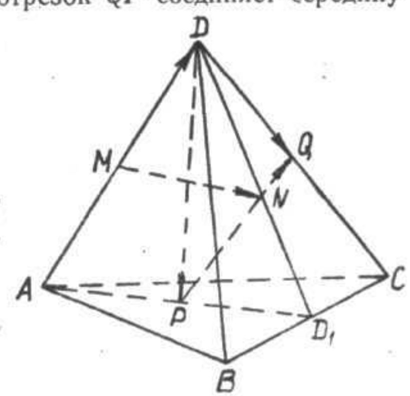


Рис 7.16

РЕШЕНИЕ

Обозначим ребро тетраэдра $DABC$ (рис. 7.16) как a, величину угла между векторами $\overline{MN}$ и $\overline{PQ}$ как φ.

$$\cos\varphi=\frac{\overline{MN}\cdot\overline{PQ}}{|\overline{MN}|\cdot|\overline{PQ}|}$$

Имеем $\begin{matrix}\overline{MN}=\overline{MD}+\overline{DN}\\ \overline{PQ}=\overline{DQ}-\overline{DP}\end{matrix}$, Тогда

$$\cos\varphi = \frac{(\overline{MD}+\overline{DN})\,(\overline{DQ}-\overline{DP})}{|\overline{MN}|\cdot|\overline{PQ}|} = \frac{\overline{MD}\cdot\overline{DQ}+\overline{DN}\cdot\overline{DQ}-\overline{DP}\cdot\overline{MD}-\overline{DN}\cdot\overline{DP}}{|\overline{MN}|\cdot|\overline{PQ}|}$$

поскольку $MD=\frac{1}{2}a,\quad DQ=\frac{1}{2}a,\quad DN=\frac{a\sqrt{3}}{3},\ DP=\frac{a\sqrt{6}}{3}$ и

$\cos\angle MDQ=\frac{1}{2},\quad \cos\angle NDQ=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \cos\angle MDP=\frac{\sqrt{6}}{3}$, а

$\cos\angle NDP=\frac{2\sqrt{2}}{3},\ |\overline{MN}|=|\overline{PQ}|=\sqrt{(\overline{DN}-\overline{DM})^2}=\sqrt{DN^2+\dots}$

$\dots\overline{+DN^2-2DN\cdot DM\cdot\cos\angle NDM}$.

Из $\triangle ADD_1\ AD_1^2=DD_1^2+AD^2-2AD\cdot DD_1\cdot\cos\angle NDM.$

Подставляя значения имеем:

$\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2=\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2+a^2-a^2\sqrt{3}\cos\angle NDM$, откуда $\cos\angle NDM=$

$=\frac{\sqrt{3}}{3}.\quad$ Теперь $\quad|\overline{MN}|=\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2-a^2\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}}=$

$=a\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{3}}=\frac{a}{2}.$

$$\cos\varphi=\frac{-\frac{a^2}{8}+\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{3}-\frac{4a^2}{9}}{\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}}=\frac{1}{18},$$

$$\varphi=\arccos\frac{1}{18}.$$

8. О НЕКОТОРЫХ ВЕКТОРНЫХ ФОРМУЛАХ

Рассмотрим несколько наиболее значительных векторных формул и покажем их применение при решении задач.

При любом выборе точки X равенство

$$\overline{XC}=\alpha\overline{XA}+(1-\alpha)\,\overline{XB} \qquad (8.1)$$

для некоторого числа α является необходимым и достаточным условием принадлежности точек A, B и C ($A\neq B$) одной прямой.

При этом $\overline{BC}=\alpha\cdot\overline{BA}$.

Заметим, что значение коэффициента определяет положение точки на прямой AB (рис. 8.1)

Если $0<\alpha<1$, то точка C находится между, точками A и B;

если $\alpha>1$, то точка A находится между C и B, и наконец, если $\alpha<0$, то точка B находится между A и C. Коэффициент играет роль своеобразной координаты на прямой AB: началом координат служит точка B, масштаб задается отрезком BA.

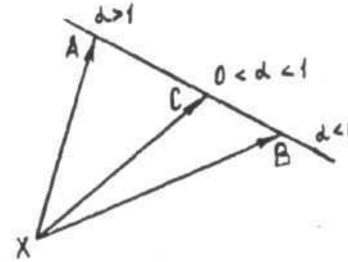


Рис. 8.1

Доказательство формулы (8.1) приводится на стр. 3

Обращаем внимание на формулы «деления отрезка в данном отношении» (2.11)

$$\overline{XC}=\frac{n}{m+n}\,\overline{XA}+\frac{m}{m+n}\,\overline{XB} \qquad (8.2)$$

Если C — середина отрезка AB, то

$$\overline{XC}=\frac{1}{2}\,(\overline{XA}+\overline{XB}). \qquad (8.3)$$

Рассмотрим применение формул (8.1), (8.2), (8.3) для решения задач.

Задача 1

В треугольнике ABC точки A_1, B_1, C_1 являются серединами сторон BC, AC, AB. Докажите, что при любом выборе точки X выполняется равенство

$$\overline{XA_1}+\overline{XB_1}+\overline{XC_1}=\overline{XA}+\overline{XB}+\overline{XC}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

$$\overline{XA_1} + \overline{XB_1} + \overline{XC_1} = \frac{1}{2}(\overline{XB} + \overline{XC}) + \frac{1}{2}(\overline{XC} + \overline{XA}) +$$
$$+ \frac{1}{2}(\overline{XA} + \overline{XB}) = \overline{XA} + \overline{XB} + \overline{XC}.$$

Задача 2. (Ск. V, 17.052)

Векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ лежат в одной плоскости, и образуют попарно друг с другом углы $\frac{2\pi}{3}$. Разложить вектор $\bar{a}$ по векторам $\bar{b}$ и $\bar{c}$, если $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 2$, $|\bar{c}| = 1$

РЕШЕНИЕ

Обозначим $\overline{AD} = -\bar{a}$ (рис. 8.2) Пусть L — пересечение AD и BC Обозначим $\overline{AL} = \bar{x}$. По формуле (8.2), учитывая, что AL — биссектриса угла BAC

$$\bar{x} = \frac{1}{3}\bar{b} + \frac{2}{3}\bar{c}$$

так как $|\bar{b}| = 2$, $|\bar{c}| = 1$

$$\overline{AD} = -\bar{a} = \alpha\bar{x} \qquad (1)$$

Поскольку $\overline{AD}$ и $\overline{AL}$ коллинеарны, то

$$\alpha = \frac{|\bar{a}|}{|\bar{x}|}$$

Но $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{x}| = \frac{2}{3}$ (докажите!)

Подставим значение α в соотношение (1), и окончательно получим

$$\bar{a} = -\frac{3}{2}\bar{b} - 3\bar{c}.$$

Задача 3. (Ск. V. 17.042)

В тетраэдре $ABCD$ медиана DD_1, грани ADB делится точкой M в отношении $DM : MD_1 = 3 : 7$. Разложить вектор $\overline{CM}$ по векторам $\overline{CA}$, $\overline{CB}$ и $\overline{CD}$.

РЕШЕНИЕ

По формуле (8.2) (рис. 8.3)

$$\overline{CM} = \frac{7}{10}\overline{CD} + \frac{3}{10}\overline{CD_1}$$

Поскольку $\overline{CD_1} = \frac{1}{2}(\overline{CA} + \overline{CB})$

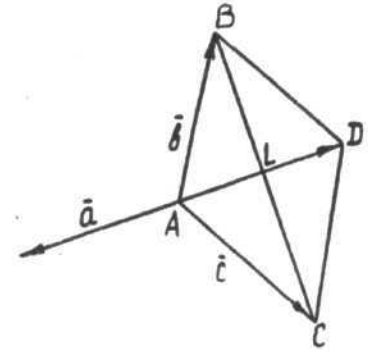


Рис 8.2

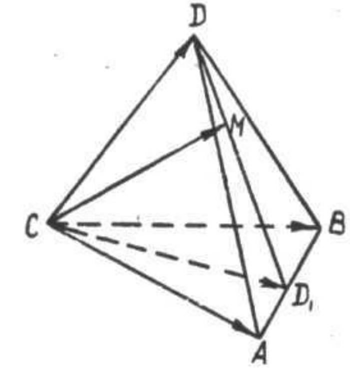


Рис 8.3

то

$$\overline{CM} = \frac{7}{10}\overline{CD} + \frac{3}{10}\cdot\frac{1}{2}(\overline{CA} + \overline{CB}),$$

$$\overline{CM} = \frac{7}{10}\overline{CD} + \frac{3}{20}\overline{CA} + \frac{3}{20}\overline{CB}.$$

Задача 4

Пусть точки A_1, B_1, C_1 делят стороны BC, CA и AB треугольника ABC в одном и том же отношении λ. Доказать, что отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 являются сторонами некоторого треугольника (рис. 8.4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Достаточно доказать, что $\overline{AA_1} + \overline{BB_1} + \overline{CC_1} = \bar{0}$

Имеем: $\overline{AA_1} = \overline{AB} + \overline{BA_1}$

$\overline{AA_1} = \overline{AB} + \frac{\lambda}{1+\lambda}\overline{BC}$

Аналогично $\overline{BB_1} = \overline{BC} + \frac{\lambda}{1+\lambda}\overline{CA}$

$$\overline{CC_1} = \overline{CA} + \frac{\lambda}{1+\lambda}\overline{AB}$$

Значит

$$\overline{AA_1} + \overline{BB_1} + \overline{CC_1} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} + \frac{\lambda}{1+\lambda}(\overline{BC} + \overline{CA} + \overline{AC})$$

Поскольку

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0,$$

то $\overline{AA_1} + \overline{BB_1} + \overline{CC_1} = 0$, что доказывает утверждение задачи.

Задача 5 (Ск. V, 17.075)

На сторонах BC, CA и AB равнобедренного прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$) даны соответственно точки A_1, B_1, C_1. Доказать, что отрезки CC_1 и A_1B_1 перпендикулярны и равны, если точки $A_1B_1C_1$ делят стороны треугольника по обходу в равных отношениях

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Обозначим (рис. 8.5)

$$\frac{AB_1}{B_1C}=\frac{CA_1}{A_1B}=\frac{BC_1}{C_1A}=\frac{n}{m}$$

По формуле (4.2) $\overline{CC_1}=\frac{n}{m+n}\overline{CA}+\frac{m}{m+n}\overline{CB}$

$\overline{A_1B_1}=\overline{CB_1}-\overline{CA_1}=\frac{m}{m+n}\overline{CA}-\frac{n}{m+n}\overline{CB}$. Тогда $\overline{CC_1}\cdot\overline{A_1B_1}=$ $=\frac{mn}{(m+n)^2}|\overline{CA}|^2-\frac{mn}{(m+n)^2}|\overline{BC}|^2=0$ значит $\overline{CC_1}\perp\overline{A_1B_1}$. Далее

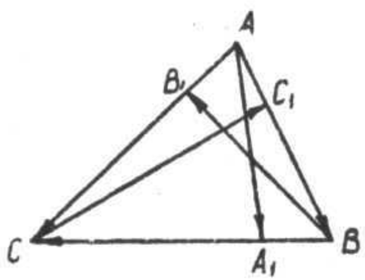


Рис. 8.4

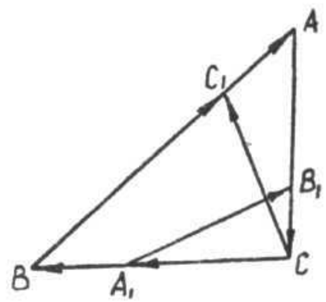


Рис. 8.5

$$|CC_1|=\sqrt{\frac{m^2+n^2}{(m+n)^2}CA^2+2\frac{mn}{(m+n)^2}\overline{CA}\cdot\overline{BC}}=\frac{AC}{m+n}\sqrt{m^2+n^2}$$

$$|A_1B_1|=\sqrt{\frac{m^2+n^2}{(m+n)^2}BC^2}=\frac{BC}{m+n}\sqrt{m^2+n^2},$$

значит, $CC_1=A_1B_1$

Задача 6

Скрещивающиеся прямые n и n_1 пересекают три параллельные плоскости α_1, α_2, α_3 соответственно в точках A, B, C и $A_1B_1C_1$. От произвольной точки 0 отложены векторы $\overline{OM}=\overline{AA_1}$, $\overline{ON}=\overline{BB_1}$, $\overline{OP}=$ $=\overline{CC_1}$. Доказать, что точки M, N и P принадлежат одной прямой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Поскольку точки A, B, C принадлежат прямой n (рис. 8.6), то по формуле (8.1), учитывая, что

$$|\overline{CB}|:|\overline{CA}|=|\overline{C_1B_1}|:|\overline{C_1A_1}|=k,$$

получим $\overline{OB}=k\overline{OA}+(1-k)\overline{OC}$

$$\overline{OB_1}=k\overline{OA_1}+(1-k)\,OC_1.$$

Но $\overline{BB_1}=\overline{OB_1}-\overline{OB}=k\overline{AA_1}+(1-$ $-k)\overline{CC_1}$

$\overline{ON}=k\overline{OM}+(1-k)\overline{OP}$

а это означает, что точки M, N, P принадлежат одной прямой.

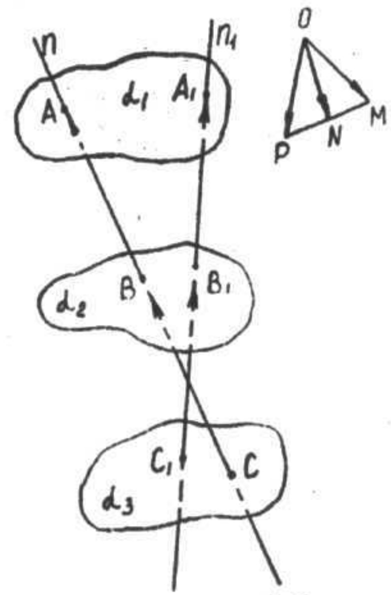


Рис. 8.6

Задача 7

На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты точки M и N соответственно $AB=5AM$, $BC=3BN$. Отрезки AN и CM пересекаются в точке O. Найти отношение площадей треугольников AOC и ABC.

РЕШЕНИЕ

Обозначим $\overline{BA}=\bar{p}$, $\overline{BC}=\bar{q}$ (рис. 8.7)
Тогда

$$\overline{BM}=\frac{4}{5}\bar{p},\quad \overline{BN}=\frac{1}{3}\bar{q}$$

Так как точка O принадлежит прямым AN и CM, то по формуле (8.1)

$$\overline{BO}=\alpha_1\overline{BM}+(1-\alpha_1)\overline{BC}=\alpha_2\overline{BA}+(1-\alpha_2)\overline{BN},\text{ значит}$$

$$\frac{4}{5}\alpha_1\bar{p}+(1-\alpha_1)\bar{q}=\alpha_2\bar{p}+\frac{1}{3}(1-\alpha_2)\bar{q},$$

откуда

$$\begin{cases}\frac{4}{5}\alpha_1=\alpha_2\\ 1-\alpha_1=\frac{1}{3}(1-\alpha_2)\end{cases}$$

Решая полученную систему, находим

$$\alpha_1=\frac{10}{11},\quad \alpha_2=\frac{8}{11}$$

Итак,

$$\overline{CO} = \alpha_1\overline{CM} = \frac{10}{11}\overline{CM}$$

откуда $\frac{CO}{CM} = \frac{10}{11}$ и $\frac{S_{AOC}}{S_{ABC}} = \frac{1}{5}\cdot\frac{10}{11} = \frac{2}{11}$.

Задача 8

Доказать, что три биссектрисы внутренних углов треугольника пересекаются в одной точке.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть I_1 — точка, делящая биссектрису AL_1 в отношении (рис. 8.8)

$$\frac{AI_1}{I_1L_1} = \frac{b+c}{a}$$

(a, b, c — стороны BC, AC, AB)

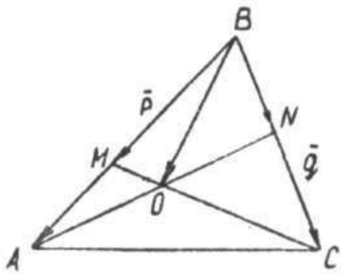


Рис 8.7

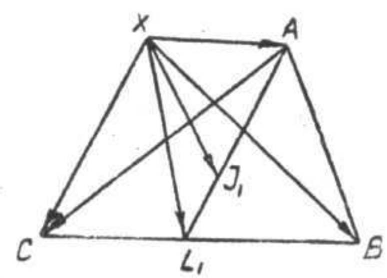


Рис 8.8

Пусть X — произвольная точка. По формуле (8.2):

$$\overline{XI_1} = \frac{a}{a+b+c}\overline{XA} + \frac{b+c}{a+b+c}\overline{XL_1} =$$

$$= \frac{a}{a+b+c}\overline{XA} + \frac{b}{a+b+c}\overline{XB} + \frac{c}{a+b+c}\overline{XC}.$$

Пусть I_2 — точка, делящая биссектрису BL_2 в отношении $\frac{a+c}{b}$ Тогда

$$\overline{XI_2} = \frac{b}{a+b+c}\overline{XB} + \frac{a+c}{a+b+c}\overline{XL_2} =$$

$$= \frac{b}{a+b+c}\overline{XB} + \frac{a}{a+b+c}\overline{XA} + \frac{c}{a+b+c}\overline{XC} = \overline{XI_1}$$

Аналогично доказывается, что $\overline{XI_3} = \overline{XI_1}$. Значит, точки I_1, I_2, I_3 совпадают, что доказывает утверждение задачи.

Задача 9 (Ск. V, 17.097)

Найти отношения, на которые точка P пересечения биссектрис треугольника ABC делит каждую биссектрису, если $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$.

РЕШЕНИЕ

Пусть биссектриса угла BAC пересекает сторону BC в точке L (рис. 8.9). По формуле (2.11)

$$\overline{AL} = \frac{AB\cdot\overline{AC} + AC\cdot\overline{AB}}{AB+AC} = \frac{-\bar b\cdot c + \bar c\cdot b}{b+c}$$

$$\overline{BL} = \frac{AB}{AB+AC}\overline{BC} = \frac{c}{b+c}\bar a$$

Так как отрезок BP принадлежит биссектрисе угла ABL в треугольнике ABL, то

$$\overline{BP} = \frac{-\bar c\cdot\frac{a\cdot c}{b+c} + \bar a\frac{c\cdot c}{b+c}}{c + \frac{a\cdot c}{b+c}} = \frac{-a\cdot\bar c + \bar a\cdot c}{a+b+c}$$

$$\overline{AP} = \bar c + \overline{BP} = \bar c + \frac{c\bar a - a\bar c}{a+b+c} = \frac{-\bar b\cdot c + \bar c b}{a+b+c}$$

Поскольку векторы $\overline{AP}$ и $\overline{AL}$ коллинеарны, то

$$|\overline{AP}|:|\overline{PL}| = |\overline{AP}|:|\overline{AL} - \overline{AP}| =$$

$$= \left|\frac{-\bar bc + \bar cb}{a+b+c}\right| : \left|\frac{-\bar bc + \bar cb}{b+c} - \frac{-\bar bc + \bar cb}{a+b+c}\right| = \frac{b+c}{a}.$$

Аналогично вычисляются два других отношения:

$$\frac{c+a}{b} \text{ и } \frac{a+b}{c}$$

Задача 10.

В плоскости треугольника ABC взята произвольная точка p, M_1, M_2, M_3 — середины сторон BC, AC, AB. Точки A_1, A_2, A_3 симметричны точке P относительно точек M_1, M_2, M_3 соответственно. Доказать, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть X — произвольная точка (рис. 8.10) Обозначим $\overline{XA} = \bar r_1$, $\overline{XB} = \bar r_2$, $\overline{XC} = \bar r_3$

Пусть далее точки O_1, O_2, O_3 принадлежат соответственно прямым AA_1, BB_1, CC_1 и

$$\frac{AO_1}{AA_1} = \alpha_1,\quad \frac{BO_2}{BB_1} = \alpha_2,\quad \frac{CO_3}{CC_1} = \alpha_3$$

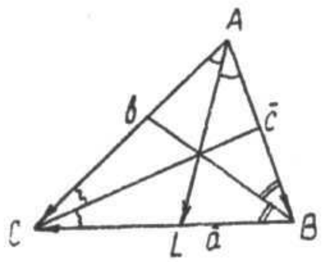


Рис 8.9

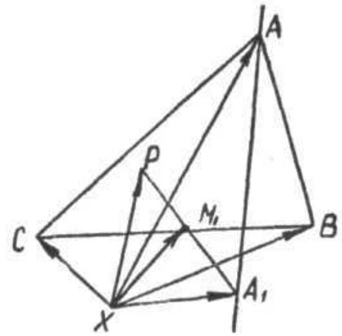


Рис. 8.10

Тогда

$$\overline{XO}_1 = \alpha_1 \overline{XA}_1 + (1 - \alpha_1)\overline{XA} \qquad (1)$$

Поскольку $PM_1 = M_1A_1$, то по формуле (8.3)

$$\overline{XM}_1 = \frac{1}{2}(\overline{XP} + \overline{XA}_1)$$

откуда

$$\overline{XA}_1 = 2\overline{XM}_1 - \overline{XP} = \bar{r}_2 + \bar{r}_3 - \overline{XP}$$

Теперь выражение (1) можно записать так:

$$\overline{XO}_1 = \alpha_1(\bar{r}_2 + \bar{r}_3 - \overline{XP}) + (1 - \alpha_1)\bar{r}_1 =$$
$$= (1 - \alpha_1)\bar{r}_1 + \alpha_1\bar{r}_2 + \alpha_1\bar{r}_3 - \alpha_1\overline{XP}.$$

Аналогично

$$\overline{XO}_2 = \alpha_2 r_1 + (1 - \alpha_2)\bar{r}_2 + \alpha_2\bar{r}_3 - \alpha_2\overline{XP},$$

$$\overline{XO}_3 = \alpha_3\bar{r}_1 + \alpha_3\bar{r}_2 + (1 - \alpha_3)\bar{r}_3 - \alpha_3\overline{XP}$$

Если положить $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{1}{2}$, то

$$\overline{XO}_1 = \overline{XO}_2 = \overline{XO}_3 = \overline{XO}$$

Итак, прямые AA_1, BB_1, CC_1, имеют общую точку O.

Задача 11.

В окружность вписан четырехугольник $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке M. Через середину S стороны CD проведена прямая SM, пересекает сторону AB в точке K

Доказать, что $AK : KB = AM^2 : BM^2$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Обозначим $AK : KB = x$ (рис. 8.11). Тогда по формуле (8.2)

$$\overline{MK} = \frac{1}{1+x}\overline{MA} + \frac{x}{1+x}\overline{MB}$$

Поскольку векторы $\overline{MK}$ и $\overline{MS}$ коллинеарны, а точка S — середина отрезка CD, то

$$\overline{MK} = l\overline{MS} = \frac{l}{2}\overline{MC} + \frac{l}{2}\overline{MD}$$

Воспользовавшись равенством $MA \cdot MC = MB \cdot MD = k$, получим:

$$\frac{MC}{MA} = \frac{k}{MA^2}, \quad \frac{MD}{MB} = \frac{k}{MB^2}$$

или $\overline{MC} = \frac{-k}{MA^2}\overline{MA}$, $\overline{MD} = \frac{-k}{MB^2}\overline{MB}$

а $\overline{MK} = \frac{-kl}{2MA^2}\overline{MA} - \frac{kl}{2MB^2}\overline{MB}$

По теореме о единстве разложения вектора по двум неколлинеарным векторам

$$\begin{cases} \frac{1}{1+x} = \frac{-kl}{2MA^2} \\ \frac{x}{1+x} = \frac{-kl}{2MB^2}, \end{cases} \quad \text{откуда } x = MA^2 : MB^2,$$

что и требовалось доказать,

Известно, (стр. 4), что если A, B и C — попарно различные точки, не лежащие на одной прямой, то для любой точки X равенство

$$\overline{XD} = \alpha\overline{XA} + \beta\overline{XB} + (1 - \alpha - \beta)\overline{XC}$$

является необходимым и достаточным условием, принадлежности точек A, B, C и D одной плоскости.

Докажем, что если точка D лежит в плоскости треугольника ABC, то из равенства (1) следует, что

$$\begin{cases} \alpha = S_{BDC} : S_{ABC} \\ \beta = S_{ADC} : S_{ABC} \\ 1 - \alpha - \beta = S_{ADB} : S_{ABC} \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Ясно, что (рис. 8.12), $\overline{CD} = \alpha\overline{CA} + \beta\overline{CB}$. Положим $\overline{CK} = \alpha\overline{CA}$, $\overline{CL} = \beta\overline{CB}$. Поскольку $S_{ADC} : S_{ABC} = \overline{CL} : \overline{CB} = \beta$ и $S_{BDC} : S_{ABC} = \alpha$, то $S_{ADB} : S_{ABC} = 1 - \alpha - \beta$. Рассмотрим задачи с применением формулы.

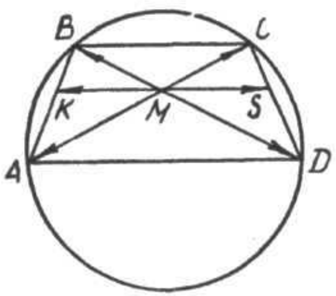


Рис 8.11

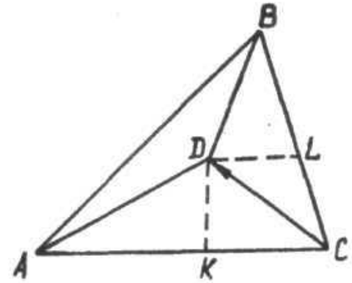


Рис. 8.12

Задача 12. (Ск. V, 17.094)

Дан тетраэдр $ABCD$ и точка M в плоскости его грани ABC. Доказать, что для разложения

$$\overline{DM} = \alpha\overline{DA} + \beta\overline{DB} + \gamma\overline{DC}$$

выполняется равенство $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Если в формуле (2.9) стр. 4 заменить коэффициенты α_1, α_2, α_3 на α, β, γ, точку D на M, а точку X на D, то утверждение задачи доказано.

Задача 13. Плоскость отсекает от боковых ребер SA, SB и SC правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ отрезки

$$SK = \frac{2}{3}SA,\ SL = \frac{1}{2}SB,\ SM = \frac{1}{3}SC$$

соответственно. Длина бокового ребра пирамиды равна a. Найти длину отрезка SN, отсекаемого этой плоскостью на ребре SD.

РЕШЕНИЕ

В пирамиде $SABCD$ (рис. 8.13) обозначим $\overline{SA} = \bar{p}$, $\overline{SB} = \bar{q}$ и $\overline{SC} = \bar{r}$. Тогда

$$\overline{SD} = \overline{SB} + \overline{BD} = \overline{SB} + \overline{BA} + \overline{BC} =$$
$$= \bar{q} + (\bar{p} - \bar{q}) + (\bar{r} - \bar{q}) = \bar{p} - \bar{q} + \bar{r}$$

Имеем

$$\overline{SN} = k\overline{SD} = k(\bar{p} - \bar{q} + \bar{r})$$

Далее

$$\overline{SK} = \frac{2}{3}\bar{p},\quad \overline{SL} = \frac{1}{2}\bar{q} \text{ и } \overline{SM} = \frac{1}{3}\bar{r}.$$

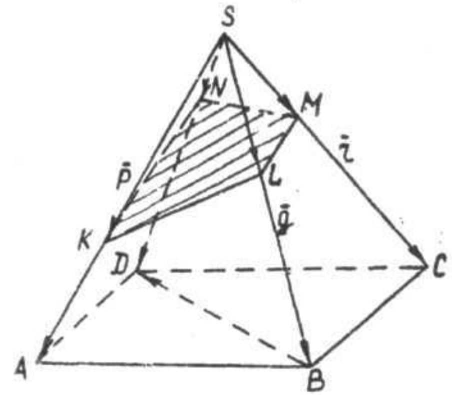


Рис. 8.13

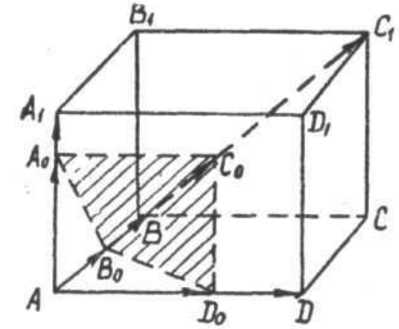


Рис. 8.14

Так как точки K, L, M и N принадлежат одной плоскости то по формуле (2.9)

$$\overline{SN} = \alpha\overline{SK} + \beta\overline{SL} + (1 - \alpha - \beta)\overline{SM} =$$
$$= \frac{2}{3}\alpha\bar{p} + \frac{1}{2}\beta\bar{q} + \frac{1}{3}(1 - \alpha - \beta)\bar{r}.$$

Мы получим два разложения вектора SN по некомпланарным векторам $\bar{p}$, $\bar{q}$ и $\bar{r}$. Приравнивая коэффициенты этих разложений:

$$\begin{cases} k = \frac{2}{3}\alpha \\ -k = \frac{1}{2}\beta \\ k = \frac{1}{3}(1 - \alpha - \beta) \end{cases}$$

Из этой системы находим, $k = \frac{2}{5}$,

откуда $SN = \frac{2}{5}a$

Задача 14. (Ск. IV, 15.211)

Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Плоскость пересекает прямые AB, AD, AA_1, AC_1 соответственно в точках B_0, D_0, A_0, C_0. Доказать, что

$$\frac{|\overline{AC_1}|}{|\overline{AC_0}|} = \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{AB_0}|} + \frac{|\overline{AD}|}{|\overline{AD_0}|} + \frac{|\overline{AA_1}|}{|\overline{AA_0}|}\cdot$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Обозначим (рис. 8.14)

$$\frac{|\overline{AD}|}{|\overline{AD_0}|}=m;\quad \frac{|\overline{AC_1}|}{|\overline{AC_0}|}=k;$$

$$\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{AB_0}|}=\lambda;\quad \frac{|\overline{AA_1}|}{|\overline{AA_0}|}=n;$$

$$\overline{AC_1}=\overline{AD}+\overline{AB}+\overline{AA_1},\text{ откуда}$$

$$k\overline{AC_0}-m\overline{AD_0}-\lambda\overline{AB_0}-n\overline{AA_0}=\overline{0}$$

Поскольку точки A_0, B_0, C_0, D_0 принадлежат одной плоскости, то по формуле (2.9) выполняется равенство

$$k-m-\lambda-n=0$$

$$k=m+\lambda+n,\text{ или}$$

$$\frac{|\overline{AC_1}|}{|\overline{AC_0}|}=\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{AB_0}|}+\frac{|\overline{AD}|}{|\overline{AD_0}|}+\frac{|\overline{AA_1}|}{|\overline{AA_0}|}$$

Задача 15. (Ск. IV, 15.137)

Даны два отрезка AB и CD. Точка $M\in AB$, точка $N\in CD$. Эти точки делят отрезки AB и CD соответственно на отрезки, отношение которых равно k. Выразить вектор $\overline{MN}$ через векторы $\overline{AC}$ и $\overline{BD}$.

РЕШЕНИЕ

$$\overline{MN}=\overline{XN}-\overline{XM}$$

$$\overline{XN}=\frac{1}{k+1}\overline{XC}+\frac{k}{k+1}\overline{XD}$$

$$\overline{XM}=\frac{1}{k+1}\overline{XA}+\frac{k}{k+1}\overline{XB}$$

$$\overline{MN}=\frac{1}{k+1}(\overline{XC}-\overline{XA})+\frac{k}{k+1}(\overline{XD}-\overline{XB})=$$

$$=\frac{1}{k+1}\overline{AC}+\frac{k}{k+1}\overline{BD}$$

Итак, если точки M и N принадлежат отрезкам AB и CD и $AM:MB=CN:ND=m:n$, то

$$\overline{MN}=\frac{n}{m+n}\overline{AC}+\frac{m}{m+n}\overline{BD}\qquad(8.4)$$

Задача 16

В произвольном четырехугольнике $ABCD$ (тетраэдре $DABC$) $AB=a$, $CD=b$, $EF=c$, где E и F — середины отрезков AC и BD. Найти угол между прямыми AB и CD.

РЕШЕНИЕ

Воспользуемся формулой (8.4) (рис. 8.15)

$$2\overline{FE}=\overline{DC}-\overline{AB}$$

Возведем в квадрат

$$4c^2=a^2+b^2-2ab\cos(\widehat{\overline{DC},\ \overline{AB}})$$

значит,

$$\cos(\widehat{\overline{DC},\ \overline{AB}})=\frac{|a^2+b^2-4c^2|}{2ab}$$

Задача 17

Диагонали четырехугольника $ABCD$ перпендикулярны и равны. На его сторонах даны точки P, Q, R, S такие, что $\overline{AP}:\overline{PB}=\overline{BQ}:\overline{QC}=\overline{CR}:\overline{RD}=\overline{DS}:\overline{SA}$

Доказать перпендикулярность и равенство отрезков PR и QS

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Обозначим O — точку пересечения отрезков AC и BD (рис. 8.16) Пусть заданные отношения равны λ. По формуле 8.4

$$\overline{OR}=\frac{1}{1+\lambda}\overline{OC}+\frac{\lambda}{1+\lambda}\overline{OD}$$

$$\overline{OP}=\frac{1}{1+\lambda}\overline{OA}+\frac{\lambda}{1+\lambda}\overline{OB}$$

$$\overline{OQ}=\frac{1}{1+\lambda}\overline{OB}+\frac{\lambda}{1+\lambda}\overline{OC}$$

$$\overline{OS}=\frac{\lambda}{1+\lambda}\overline{OD}+\frac{\lambda}{1+\lambda}\overline{OA}$$

Следовательно,

$$\overline{PR}=\overline{OR}-\overline{OP}=\frac{1}{1+\lambda}(\overline{OC}-\overline{OA})+\frac{\lambda}{1+\lambda}(\overline{OD}-\overline{OB})=$$

$$=\frac{1}{1+\lambda}\overline{AC}+\frac{\lambda}{1+\lambda}\overline{BD}$$

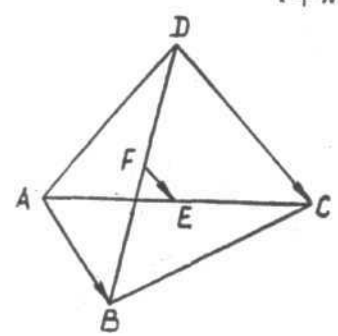


Рис 8.15

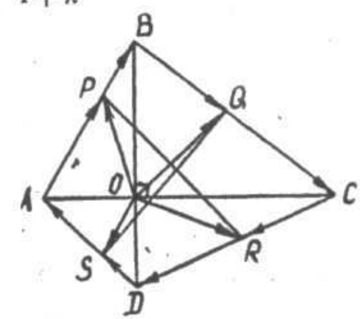


Рис 8.16

4 4–1185

$$\overline{OS} = \overline{OS} - \overline{OQ} = -\frac{\lambda}{1+\lambda}\overline{AC} + \frac{1}{1+\lambda}\overline{BD}$$

Применяя скалярное произведение векторов, и учитывая, что согласно условию $\overline{AC}^2 = \overline{BD}^2$ и $\overline{AC}\cdot\overline{BD} = 0$, получим

$$\overline{PR}^2 = \overline{QS}^2 = \frac{1+\lambda^2}{(1+\lambda)^2}\overline{AC}^2$$

$$\overline{PR}\cdot\overline{QS} = \frac{\lambda}{(1+\lambda)^2}\overline{BD}^2 - \frac{\lambda}{(1+\lambda)^2}\overline{AC}^2 = 0$$

Значит, $|\overline{PR}| = |\overline{QS}|$ и $PR \perp QS$

Задача 18

Длины оснований трапеции равны a и b. Найти длину отрезка, параллельного основаниям трапеции, концы которого принадлежат боковым сторонам трапеции, и которому принадлежит точка пересечения его диагоналей.

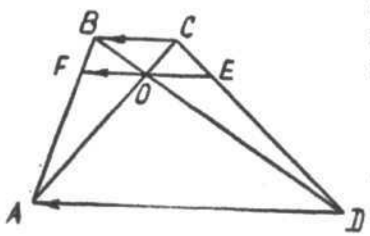


Рис. 8.17

РЕШЕНИЕ

В трапеции $ABCD$ (рис. 8.17) $FE \parallel BC$, точка O — точка пересечения диагоналей. Из подобия треугольников OEC и ADC

$$\frac{OE}{AD} = \frac{EC}{DC}$$

Из подобия треугольников ODE и DBC

$$\frac{OE}{BC} = \frac{ED}{DC}$$

Поэтому

$$\frac{OE\cdot BC}{AD\cdot OE} = \frac{EC\cdot DC}{DC\cdot ED}$$

значит,

$$\frac{EC}{ED} = \frac{a}{b}, \text{ анаологично } \frac{BF}{AF} = \frac{a}{b}$$

По формуле 8.2

$$\overline{EF} = \frac{a}{a+b}\overline{DA} + \frac{b}{a+b}\overline{CB}$$

Но $\overline{DA}\uparrow\uparrow\overline{EF}\uparrow\uparrow\overline{CB}$. Поскольку $|\overline{DA}| = b$, $|\overline{CB}| = a$, то

$$|\overline{EF}| = \left|\frac{a}{a+b}\bar{b}\right| + \left|\frac{b}{a+b}\bar{a}\right| = \frac{2ab}{a+b}$$

(Если несколько векторов сонаправлены, то модуль суммы равен сумме модулей этих векторов).

9. МЕДИАНЫ, ЦЕНТРОИД ТРЕУГОЛЬНИКА И ТЕТРАЭДРА

Задача 1.

В треугольнике ABC точка M — центроид (точка пересечения медиан).

Доказать, что

$$\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = \bar{0}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Первый способ

Известно, что

$$3\overline{XM} = \overline{XA} + \overline{XB} + \overline{XC} \text{ (стр. 8)}$$

Пусть $X \equiv M$

Тогда

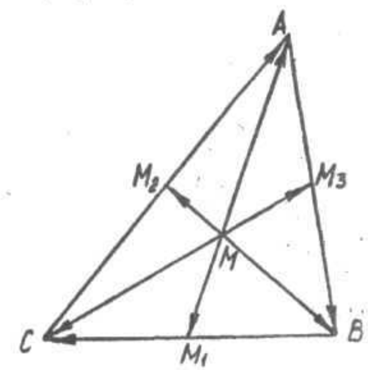
$$3\overline{MM} = \overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC}, \text{ значит}$$

$$\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = \bar{0}$$

Второй способ

$$2\overline{AM_1} = \overline{AB} + \overline{AC}$$

$$\overline{MA} = -\frac{2}{3}\overline{AM_1} \quad \text{(рис. 91)}$$



Аналогично $\overline{MB} = -\frac{2}{3}\overline{BM_2}$, $\overline{MC} = -\frac{2}{3}\overline{CM_3}$

Рис. 9.1

Значит, $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BA} + \overline{BC} + \overline{CA} + \overline{CB}) = \bar{0}$

Третий способ

$$\overline{AM_1} = \overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{BC}; \quad \overline{BM_2} = \overline{BC} + \frac{1}{2}\overline{CA};$$

$$\overline{CM_3} = \overline{CA} + \frac{1}{2}\overline{AB}.$$

Значит
$$\overline{AM_1} + \overline{BM_2} + \overline{CM_3} = \frac{3}{2}(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA}) = \overline{0},$$
следовательно,
$$\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = \overline{0}$$

Четвертый способ

Поскольку из медиан треугольника можно составить треугольник, то $\overline{AM_1} + \overline{BM_2} + \overline{CM_3} = \overline{0}$, следовательно $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = \overline{0}$.

Пятый способ

Разложим вектор $\overline{AM}$ по векторам $\overline{MB}$ и $\overline{MC}$ (рис. 9.2)

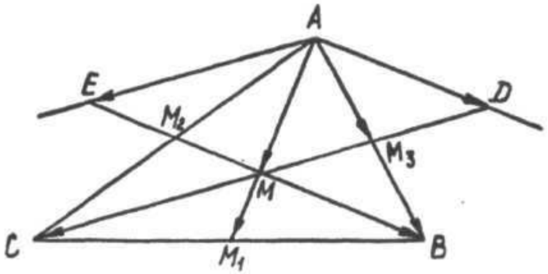


Рис. 9.2

$$\overline{AM} = \alpha\overline{MB} + \beta\overline{MC}$$

Сделаем параллельный перенос векторов $\overline{MB}$ и $\overline{MC}$ на вектор $\overline{MA}$. Получим параллелограмм $ADME$.
$$\overline{AM} = \overline{AD} + \overline{AE}$$
Итак,
$$\alpha = \frac{\overline{AD}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{AM_3}}{\overline{M_3B}} = 1$$
(M_2 и M_3 — середины сторон AC и AB)
Аналогично, $\beta = 1$
Таким образом, $\overline{AM} = \overline{MB} + \overline{MC}$, или
$$\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = 0$$

Шестой способ

Применим формулу деления отрезка в данном отношении (8.2) (рис. 9.3)
$$\overline{BM} = \frac{2}{3}\overline{BM_1} + \frac{1}{3}\overline{BA}$$

$$\overline{AM} = \frac{2}{3}\overline{AM_2} + \frac{1}{3}\overline{AC}$$
$$\overline{CM} = \frac{2}{3}\overline{CM_1} + \frac{1}{3}\overline{CA}$$
Учитывая, что $\overline{BM_1} = \frac{1}{2}\overline{BC}$; $\overline{AM_2} = \frac{1}{2}\overline{AB}$; $\overline{CM_1} = \frac{1}{2}\overline{CB}$
имеем:
$$\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = \overline{0}$$

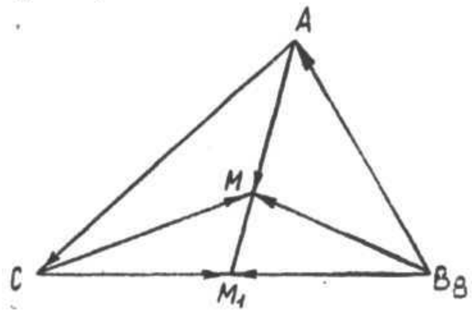
Задача 2. (Ск. IV.15.138)

Доказать, что необходимое и достаточное условие того, что точка M есть центроид треугольника ABC, может быть выражено равенством
$$\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = \overline{0}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Достаточность.

Пусть выполняется равенство (рис. 9.4)
$$\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = \overline{0}$$
Это значит, что вектор $\overline{MB} + \overline{MC}$ противоположен вектору $\overline{MA}$. Но $\overline{MB} + \overline{MC} = 2\overline{MM_1}$, (где M_1 — середина BC по правилу параллелограмма).



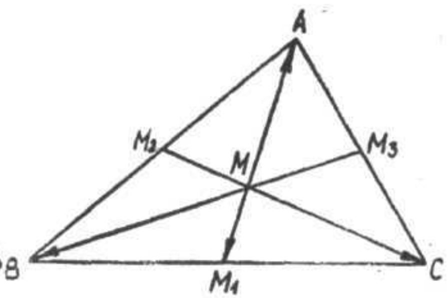


Рис. 9.3 Рис. 9.4

Поэтому $\overline{MA} = -2\overline{MM_1}$, следовательно, точка M принадлежит медиане AM, аналогично, $M \in BM_3$ и $M \in CM_2$, значит, M — центроид. Он единственен в треугольнике ABC.

Задача 3.

Доказать, что медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся в отношении 2 : 1, считая от вершины.

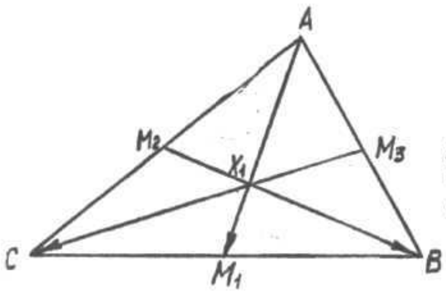


Рис. 9.5

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Первый способ

Обозначим M_1, M_2, M_3 — середины сторон BC, AC, AB треугольника ABC, X — произвольная точка плоскости. (рис. 9.5) Тогда

$$\overline{XM}_1 = \frac{1}{2}(\overline{XB} + \overline{XC})$$

Пусть X_1 — точка, которая делит медиану AM_1 в отношении $AX_1 : X_1M_1 = 2 : 1$. Тогда по соотношению (8.2)

$$\overline{XX}_1 = \frac{1}{3}\overline{XA} + \frac{2}{3}\overline{XM}_1 + \frac{1}{3}\overline{XA} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}(\overline{XB} + \overline{XC})\right) =$$

$$= \frac{1}{3}(\overline{XA} + \overline{XB} + \overline{XC})$$

Аналогично: если X_2 и X_3 — точки, которые делят медианы BM_2 и CM_3 в отношении $BX_2 : X_2M_3 = CX_3 : X_3M_3 = 2 : 1$, то $\overline{XX}_2 = \overline{XX}_3 = \frac{1}{3}\left(\overline{XA} + \overline{XB} + \overline{XC}\right)$, т. е. точки X_1, X_2, X_3 совпадают.

Второй способ

В треугольнике ABC (рис. 9.6)

$$2\overline{MM}_1 = \overline{MB} + \overline{MC} \qquad (1)$$

Разложим теперь вектор $\overline{AM}$ по векторам $\overline{MB}$ и $\overline{MC}$

$$\overline{AM} = \alpha\overline{MB} + \beta\overline{MC}$$

Делаем параллельный перенос векторов $\overline{MB}$ и $\overline{MC}$ на вектор $\overline{MA}$. Получим параллелограмм $ADME$:

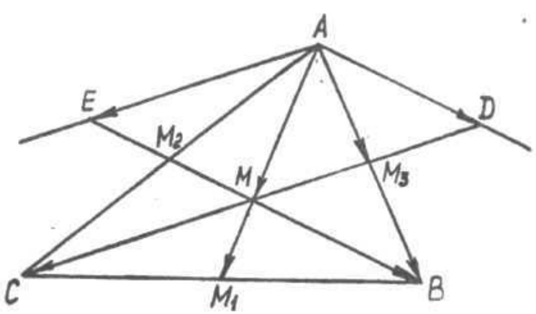


Рис. 9.6

$$\overline{AM} = \overline{AD} + \overline{AE}$$

Итак,

$$\alpha = \frac{\overline{AD}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{AM}_3}{\overline{M_3B}} = 1$$

Аналогично, $\beta = 1$ (2)

Таким образом, $\overline{AM} = \overline{MB} + \overline{MC}$

Сравнивая (1) и (2), видим, что

$$\overline{AM} = 2\overline{MM}_1$$

что доказывает утверждение задачи.

Задача 4. (Ск. IV. 15.140)

Даны два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$, G и G_1 — точки пересечения их медиан. Доказать, что

$$\overline{GG}_1 = \frac{1}{3}(\overline{AA}_1 + \overline{BB}_1 + \overline{CC}_1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть X — произвольная точка пространства

По формуле (2.13)

$$\overline{XG} = \frac{1}{3}(\overline{XA} + \overline{XB} + \overline{XC})$$

$$\overline{XG}_1 = \frac{1}{3}(\overline{XA}_1 + \overline{XB}_1 + \overline{XC}_1)$$

$$\overline{GG}_1 = \overline{XG}_1 - \overline{XG} = \frac{1}{3}(\overline{XA}_1 - \overline{XA} + \overline{XB}_1 - \overline{XB} +$$

$$+ \overline{XC}_1 - \overline{XC}) = \frac{1}{3}(\overline{AA}_1 + \overline{BB}_1 + \overline{CC}_1)$$

Задача 5. (Ск. IV.15.153)

Дан треугольник ABC, G — точка пересечения его медиан. Доказать, что какова бы ни была точка O, выполняется соотношение

$$OG^2 = \frac{1}{3}(OA^2 + OB^2 + OC^2) - \frac{1}{9}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

$$\overline{OA} = \overline{OG} + \overline{GA}$$

$$\overline{OB} = \overline{OG} + \overline{GB}$$

$$\overline{OC} = \overline{OG} + \overline{GC}$$

Возведем обе части каждого равенства в квадрат, сложим их и применим формулы:

$$\overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC} = \bar{0} \text{ и}$$

$$3\overline{OG} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$$

Получим

$$OA^2 + OB^2 + OC^2 =$$

$$= 3OG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + 2\overline{OG}(\overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC}),$$

откуда

$$OG^2 = \frac{1}{3}(OA^2 + OB^2 + OC^2) - \frac{1}{3}(GA^2 + GB^2 + GC^2)$$

Учитывая, что

$$\overline{AG} = \frac{\overline{AB} + \overline{AC}}{3}, \quad \overline{BG} = \frac{\overline{BA} + \overline{BC}}{3}, \quad \overline{CG} = \frac{\overline{CA} + \overline{CB}}{3},$$

$$2\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \overline{AB}^2 + \overline{CA}^2 - \overline{BC}^2, \ (\overline{AB} + \overline{AC})^2 = AB^2 + AC^2 +$$
$$+ 2\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 2AB^2 + 2CA^2 - BC^2,$$
$$(\overline{BA} + \overline{BC})^2 = 2AB^2 + 2BC^2 - CA^2, \ (\overline{CA} + \overline{CB})^2 -$$
$$= 2CA^2 + 2BC^2 - AB^2,$$

получаем доказываемое соотношение.

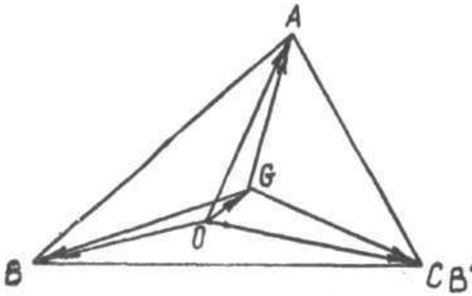


Рис. 9.7

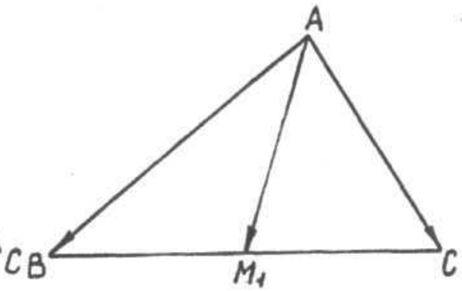


Рис 9.8

Задача 6. (Ск. V. 17.070)

Найти длину медианы AM_1 треугольника ABC, если $AB = 10$ см, $AC = 6$ см и $\angle BAC = 60°$.

РЕШЕНИЕ

$$2\overline{AM}_1 = \overline{AB} + \overline{AC} \text{ (рис. 9.8)}$$

$$4AM_1^2 = AB^2 + 2\overline{AB} \cdot \overline{AC} + AC^2$$

$$4AM_1^2 = 100 + 2 \cdot 10 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} + 36$$

Задача 7. (Ск. V. 17.058)

Стороны треугольника ABC связаны соотношением $a^2 + b^2 = 5c^2$. Доказать, что две медианы треугольника перпендикулярны. Верно ли обратное утверждение?

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть AM_1 и BM_2 — медианы данного треугольника ABC (рис. 9.9). Обозначим $\overline{CB} = \overline{p}$, $\overline{CA} = \overline{q}$. Достаточно доказать, что $\overline{BM}_2 \cdot \overline{AM}_1 = 0$

Имеем:

$$\overline{BM}_2 = \overline{CM}_2 - \overline{CB} = \frac{1}{2}\overline{q} - \overline{p}$$

$$\overline{AM}_1 = \overline{CM}_1 - \overline{CA} = \frac{1}{2}\overline{p} - \overline{q}$$

Тогда $\overline{BM}_2 \cdot \overline{AM}_1 = \left(\frac{1}{2}\overline{q} - \overline{p}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\overline{p} - \overline{q}\right) = \frac{5}{4}\overline{p} \cdot \overline{q} - \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{2}q^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}ab\cos\alpha - a^2 - b^2\right)$

По теореме косинусов

$$ab\cos\alpha = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2)$$

Тогда

$$\overline{BM}_2 \cdot \overline{AM}_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}(a^2 + b^2) - \frac{5}{4}c^2\right) = \frac{1}{8}(5c^2 - 5c^2) = 0 \qquad \text{(I)}$$

из (I) следует и утверждение, обратное утверждению задачи.

Задача 8.

Доказать, что сумма квадратов длин медиан произвольного треугольника равна трем четвертям суммы квадратов длин сторон этого треугольника.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Обозначим $\overline{BC} = \overline{a}$, $\overline{CA} = \overline{b}$, $\overline{AB} = \overline{c}$ (рис. 9.10). Тогда медианы треугольника выражены векторами:

$$\overline{p} = \overline{a} + \frac{1}{2}\overline{b}, \quad \overline{q} = \overline{b} + \frac{1}{2}\overline{c},$$
$$\overline{r} = \overline{c} + \frac{1}{2}\overline{a} \qquad (1)$$

Имеем

$$\overline{a} + \overline{b} + \overline{c} = \overline{0} \qquad (2)$$

Возведем в квадрат равенства (1), и почленно складывая, после очевидных преобразований получим

$$p^2 + q^2 + r^2 = \frac{5}{4}(a^2 + b^2 + c^2) + (\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca}) \qquad (3)$$

Возведем в квадрат равенство (2):

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2(\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca}) = 0,$$

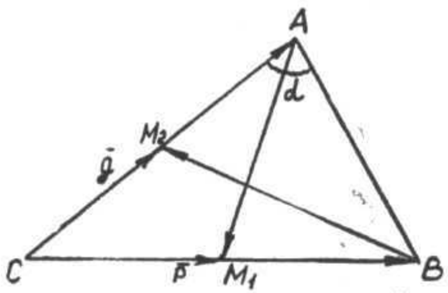


Рис. 9.9

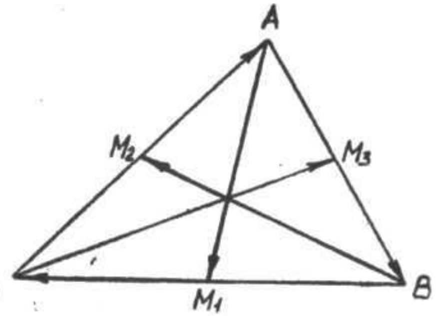


Рис 9.10

откуда

$$\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca} = -\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$$

Подставим в (3)
Получим

$$p^2 + q^2 + r^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2),$$

что и требовалось доказать.

Задача 9. (Ск. V. 17.079)

Медианы граней SAB и SAC тетраэдра $SABC$ пересекаются соответственно в точках M, и N. Доказать, что $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$, и найти отношение $|\overline{MN}| : |\overline{BC}|$

РЕШЕНИЕ

Обозначим M_1 и N_1 середины ребер AB и AC тетраэдра $SABC$ (рис. 9.11).

Тогда

$$\overline{MN} = \overline{SN} - \overline{SM} = \frac{2}{3}\overline{SN_1} - \frac{2}{3}\overline{SM_1} = \frac{1}{3}(\overline{SC} + \overline{SA}) -$$

$$-\frac{1}{3}(\overline{SB} + \overline{SA}) = \frac{1}{3}(\overline{SC} - \overline{SB}) = \frac{1}{3}\overline{BC},$$

значит, $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$.

$$|\overline{MN}| : |\overline{BC}| = 1 : 3$$

1) Учитывая ответ задачи, думается, что в условии задачи допущена небрежность: надо добавить, что M и N — центроиды граней SAB и SAC. Центроидом тетраэдра называется точка пересечения

отрезков, которые соединяют его вершину с точкой пересечения медиан противоположных граней.

Задача 10

Доказать, что отрезки, соединяющие вершины тетраэдра с центроидами (точкой пересечения медиан) противоположных граней пересекаются в одной точке E, которая делит каждый из них в отношении $3:1$.

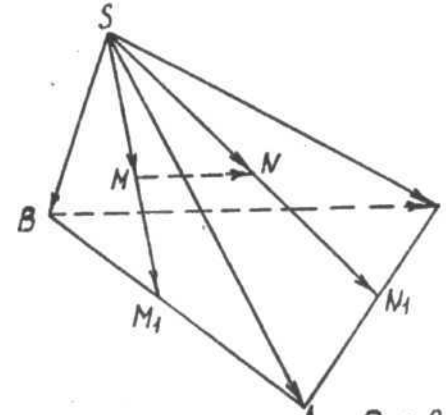


Рис. 9.11

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Первый способ

Пусть O и K — точки пересечения медиан треугольников ABC и SBC, тогда

$$OT : OA = 1 : 2,$$

$$KT : SK = 1 : 2 \quad \text{(рис. 9.12)}.$$

Поскольку отрезки OS и AK лежат A в одной плоскости (плоскости $\triangle AST$), то они пересекаются в одной точке. Обозначим ее как E.
Пусть $AE : EK = p : q$, $SE : EO = m : n$.
Тогда

$$\overline{SO} = \frac{1}{3}\overline{SA} + \frac{2}{3}\overline{ST},$$

$$\overline{SE} = \frac{m}{m+n}\overline{SO} = \frac{m}{3(m+n)}\overline{SA} + \frac{2m}{3(m+n)}\overline{ST}$$

$$\overline{SE} = \frac{q}{p+q}\overline{SA} + \frac{p}{p+q}\overline{SK} = \frac{q}{p+q}\overline{SA} + \frac{2p}{3(p+q)}\overline{ST}$$

значит,

$$\begin{cases} \dfrac{q}{p+q} = \dfrac{m}{3(m+n)} \\[2mm] \dfrac{2p}{3(p+q)} = \dfrac{2m}{3(m+n)} \end{cases}$$

Поделив почленно равенства данной системы, получим $q : p = 1 : 3$. Учитывая, что $p = 3q$,

$$\frac{1}{4} = \frac{m}{3(m+n)},$$

значит, $m : n = 3 : 1$.
Аналогично доказывается, что отрезки, которые соединяют вершины B и C с точками пересечения медиан противоположных граней, делятся в отношении 3 : 1.

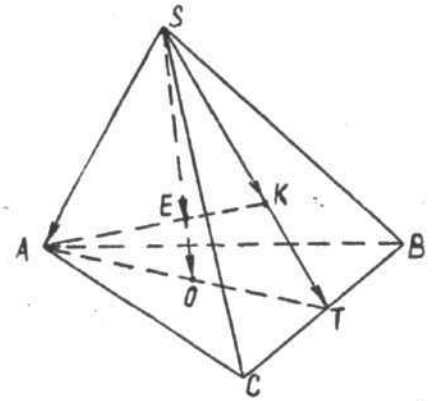


Рис. 9.12

Второй способ

Пусть X — произвольная точка пространства. Тогда по формуле (2.13)

$$\overline{XO} = \frac{1}{3}(\overline{XA} + \overline{XB} + \overline{XC})$$

$$\overline{XK} = \frac{1}{3}(\overline{XB} + \overline{XC} + \overline{XS})$$

Вычтя почленно эти равенства, получим

$$\overline{KO} = \frac{1}{3}\overline{SA}$$

Это значит, что $KO \parallel SA$ и $KO : SA = 1 : 3$. Поскольку треугольники EOK и EAS подобны, то $OE : ES = EK : AE = OK : AS = 1 : 3$. Аналогично доказывается, что отрезки, которого соединяют вершины B и C с точками пересечения медиан противоположных граней, пересекают один из данных отрезков AK или SO в точке E и делятся этой точкой в таком же отношении.

Задача 11.

В тетраэдре $ABCD$ точки M_1 и M_2 являются центроидами граней ADB и BDC. Доказать, что векторы $\overline{M_1M_2}$ и $\overline{AC}$ коллинеарны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Воспользуемся формулой (2.13) и рис. 9.13

$$\overline{XM_1} = \frac{1}{3}(\overline{XA} + \overline{XB} + \overline{XD})$$

$$\overline{XM_2} = \frac{1}{3}(\overline{XB} + \overline{XC} + \overline{XD})$$

Тогда

$$\overline{M_1M_2} = \overline{XM_2} - \overline{XM_1} = \frac{1}{3}(\overline{XC} - \overline{XA}) = \frac{1}{3}\overline{AC}$$

Значит, утверждение задачи доказано.

Задача 12

Треугольник ABC является параллельной проекцией треугольника $A_1B_1C_1$ на плоскость. Известно, что $AA_1 = a$, $BB_1 = b$, $CC_1 = c$. Найти расстояние между точками пересечения медиан этих треугольников.

РЕШЕНИЕ

Обозначим центроиды треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ соответственно M и M_1 (рис. 9.14). Пусть X — произвольная точка пространства.

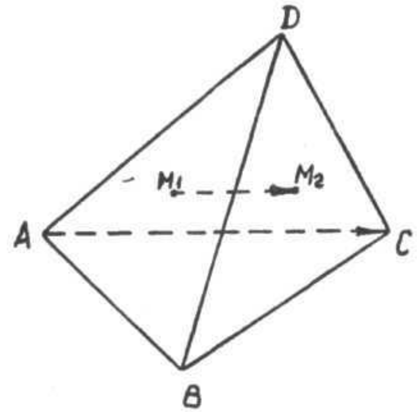


Рис. 9.13

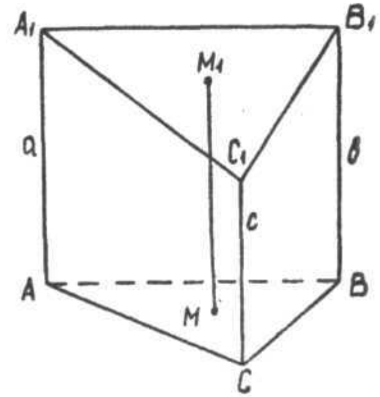


Рис. 9.14

Имеем:

$$\overline{MM_1} = \overline{XM_1} - \overline{XM} = \frac{1}{3}(\overline{XA_1} + \overline{XB_1} + \overline{XC_1}) -$$

$$- \frac{1}{3}(\overline{XA} + \overline{XB} + \overline{XC}) =$$

$$= \frac{1}{3}\left((\overline{XA_1} - \overline{XA}) + (\overline{XB_1} - \overline{XB}) + (\overline{XC_1} - \overline{XC})\right) =$$

$$= \frac{1}{3}(\overline{AA_1} + \overline{BB_1} + \overline{CC_1})$$

Отсюда $|\overline{MM_1}| = \frac{1}{3}|\overline{AA_1} + \overline{BB_1} + \overline{CC_1}|$. Векторы $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$, $\overline{CC_1}$ — коллинеарны. Если вершины треугольника $A_1B_1C_1$ расположены по одну сторону плоскости проекций, то эти векторы сонаправлены и $|\overline{AA_1} + \overline{BB_1} + \overline{CC_1}| = |\overline{AA_1}| + |\overline{BB_1}| + |\overline{CC_1}| = a + b + c$. Если плоскость проекций отделяет вершину C от вершин A и B, то вектор $\overline{CC_1}$ противоположно направлен векторам $\overline{AA_1}$ и $\overline{BB_1}$. В таком

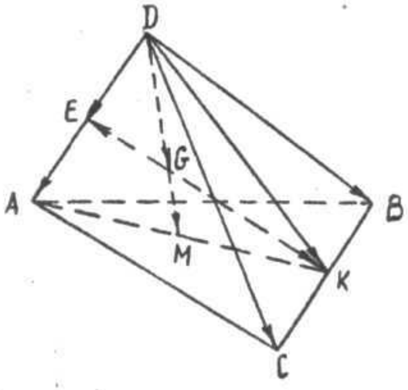


Рис. 9.15

случае

$$|\overline{MM_1}| = \frac{1}{3}\left|a + b - c.\right|$$

Задача 13.

Доказать, что середины противоположных ребер тетраэдра симметричны относительно его центроида.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Центроидом тетраэдра называется точка пересечения отрезков, которые соединяют его вершины с точкой пересечения медиан противоположных граней (см. задачу 10)

В тетраэдре $DABC$ (рис. 9.15) обозначим M — центроид основания ABC.

Пусть E — середина ребра AD, K — середина ребра BC, G — центроид тетраэдра. Тогда

$$3\overline{DM} = \overline{DA} + \overline{DB} + \overline{DC}$$

$$3\overline{DM} = 2\overline{DE} + 2\overline{DK}$$

$$\overline{DM} = \frac{2}{3}(\overline{DE} + \overline{DK}).$$

$$\overline{DG} = \alpha\overline{DM} = \frac{2\alpha}{3}(\overline{DE} + \overline{DK}) \qquad (1)$$

$$\overline{DG} = \frac{m}{m+n}\overline{DE} + \frac{n}{m+n}\overline{DK}, \qquad (2)$$

где $GK : GE = m : n$

Из равенств (1) и (2), получим:

$$\begin{cases} \dfrac{m}{m+n} = \dfrac{2\alpha}{3} \\ \dfrac{n}{m+n} = \dfrac{2\alpha}{3}, \end{cases}$$

откуда $\frac{m}{n} = 1$. Значит,

$$\overline{DG} = \frac{1}{2}(\overline{DE} + \overline{DK}), \text{ т. е.}$$

точка G — середина отрезка EK и точки E и K симметричны относительно G.

Задача 14. (Ск. IV. 15.244)

Через произвольную точку P плоскости грани ABC тетраэдра $OABC$ проведена прямая l, параллельная прямой OG, где G — точка пересечения медиан треугольника ABC. Прямая l пересекает плоскости граней OBC, OCA, OAB соответственно в точках U, V, W. Доказать, что

$$\overline{PU} + \overline{PV} + \overline{PW} = \overline{AO} + \overline{BO} + \overline{CO}$$

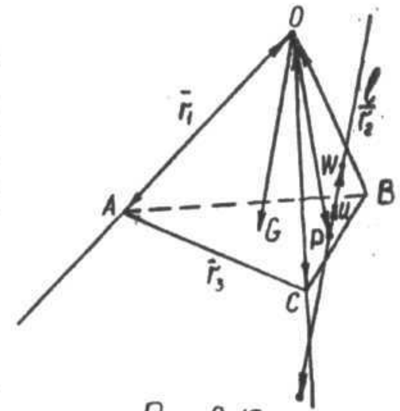


Рис. 9.16

РЕШЕНИЕ

Обозначим $\overline{OA} = \bar{r}_1$, $\overline{OB} = \bar{r}_2$, $\overline{OC} = \bar{r}_3$ (рис. 9.16)

Тогда $\overline{OG} = \frac{1}{3}(\bar{r}_1 + \bar{r}_2 + \bar{r}_3)$ (формула 2.13)

$$\overline{OP} = \alpha\bar{r}_1 + \beta\bar{r}_2 + \gamma\bar{r}_3,$$

где $\alpha + \beta + \gamma = 1$

(соотношение 2.9)

Так как точка U принадлежит грани OBC, то $\overline{OU} = \lambda\bar{r}_2 + \mu\bar{r}_3$

С другой стороны

$$\overline{OU} = \overline{OP} + \overline{PU} = \alpha\bar{r}_1 + \beta\bar{r}_2 + \gamma\bar{r}_3 + \frac{1}{3}R_1(\bar{r}_1 + \bar{r}_2 + \bar{r}_3).$$

Поэтому

$$\lambda\bar{r}_2 + \mu\bar{r}_3 = \left(\alpha + \frac{1}{3}R_1\right)\bar{r}_1 + \left(\beta + \frac{1}{3}R_1\right)\bar{r}_2 + \left(\gamma + \frac{1}{3}R_1\right)\bar{r}_3, \text{ откуда}$$

$$\alpha + \frac{1}{3}R_1 = 0, \text{ или } R_1 = -3\alpha$$

Следовательно,

$$\overline{PU} = -3\alpha\overline{OG}$$

Аналогично

$$\overline{PV} = -3\beta\overline{OG}, \ \overline{PW} = -3\gamma\overline{OG}$$

Отсюда

$$\overline{PU} + \overline{PV} + \overline{PW} = -3(\alpha + \beta + \gamma)\overline{OG} = -3\overline{OG}$$

Таким образом,

$$\overline{PU} + \overline{PV} + \overline{PW} = 3\overline{GO} = \overline{AO} + \overline{BO} + \overline{CO}$$

Задача 15

Доказать, что если плоские углы при вершине тетраэдра прямые, то центроид основания, центр описанной сферы и вершина тетраэдра принадлежат одной прямой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть в тетраэдре $DABC$ M — центроид основания, O — центр описанной сферы, $\overline{DA}=\overline{a}$, $\overline{DB}=\overline{b}$, $\overline{DC}=\overline{c}$, $\overline{DO}=\overline{n}$, $\overline{DM}=\overline{m}$ (рис. 9.17).

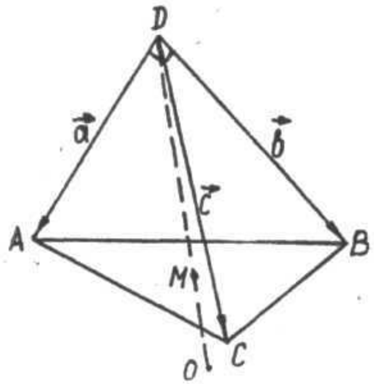


Рис. 9.17

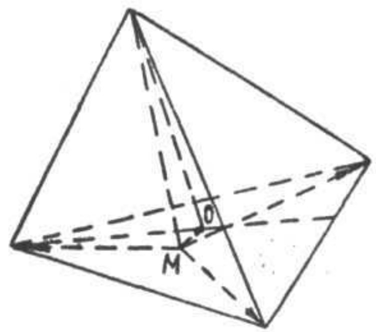


Рис 9.18

Докажем, что векторы $\overline{m}$ и $\overline{n}$ одинаково направлены. По формуле (2.13)

$$\overline{DM}=\frac{1}{3}(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}),$$

т. е. вектор $\overline{m}$ и $\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}$ одинаково направлены. Поскольку $DO^2=AO^2$, то $\overline{n}^2=(\overline{n}-\overline{a})^2=\overline{n}^2+\overline{a}^2-2\overline{n}\overline{a}$

Но $\overline{n}=\alpha\overline{a}+\beta\overline{b}+\gamma\overline{c}$, поэтому $n^2=n^2+a^2-2\overline{a}(\alpha\overline{a}+\beta\overline{b}+\gamma\overline{c})$

Учитывая, что $\overline{a}\overline{b}=\overline{a}\overline{c}=0$, имеем

$$a^2-2\alpha a^2=0,\quad \alpha=\frac{1}{2}.$$

Аналогично доказывается, что

$$\beta=\gamma=\frac{1}{2}.$$

Таким образом,

$$\overline{n}=\frac{1}{2}(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c})$$

и векторы $\overline{n}$ и $\overline{m}$ одинаково направлены, т. е. точки D, и M принадлежат одной прямой.

Задача 16

В грани ABC правильного тетраэдра $DABC$ дана точка M.

Вычислить $|\overline{DM}|$, если $MA=x$, $MB=y$, $MC=z$, $DA=a$.

РЕШЕНИЕ

Пусть DO — высота тетраэдра, O — точка пересечения медиан основания ABC тетраэдра, M — данная точка (рис. 9.18)

Известно, что $\overline{MO}=\frac{1}{3}(\overline{MA}+\overline{MB}+\overline{MC})$. Тогда

$$|MO|^2=\frac{1}{9}(|MA|^2+|MB|^2+|MC|^2+2\overline{MA}\cdot\overline{MB}+$$
$$+2\overline{MA}\cdot\overline{MC}+2\overline{MB}\cdot\overline{MC})=\frac{1}{9}(x^2+y^2+z^2+x^2+y^2-a^2+$$
$$+y^2+z^2-a^2+x^2+z^2-a^2)$$

Отсюда

$$|MO|^2=\frac{1}{3}(x^2+y^2+z^2-a^2)$$

Из прямоугольного треугольника DOM

$$|\overline{DM}|=\sqrt{|\overline{DO}|^2+|\overline{MO}|^2}$$

Так как $DO=\frac{a\sqrt{6}}{3}$, как высота правильного тетраэдра с ребром a, то

$$|DM|=\sqrt{\frac{2a^2}{3}+\frac{x^2+y^2+z^2-a^2}{3}}=\sqrt{\frac{1}{3}\left(a^2+x^2+y^2+z^2\right)}$$

Задача 17 (Ск. IV, 15.231)

В сферу вписан тетраэдр $OABC$. Прямая, проведенная через вершину O и точку пересечения медиан G $\triangle ABC$, пересекает сферу в точке D. Доказать, что

$$OA^2+OB^2+OC^2=3OG\cdot OD$$

РЕШЕНИЕ

Пусть S — центр сферы радиуса R (рис. 9.19). Обозначим через $\overline{r}_1$, $\overline{r}_2$, $\overline{r}_3$, $\overline{r}_4$ радиус-векторы точек A, B, C и O. Тогда $3\overline{SG}=\overline{r}_1+\overline{r}_2+\overline{r}_3$ и $\overline{OA}=\overline{r}_1-\overline{r}_4$, $\overline{OB}=\overline{r}_2-\overline{r}_4$, $\overline{OC}=\overline{r}_3-\overline{r}_4$. Отсюда $OA^2+OB^2+OC^2=(\overline{r}_1-\overline{r}_4)^2+(\overline{r}_2-\overline{r}_4)^2+(\overline{r}_3-\overline{r}_4)^2=6R^2-2\overline{r}_4\times$ $\times(\overline{r}_1+\overline{r}_2+\overline{r}_3)=6R^2-6\overline{r}_4\overline{SG}.$

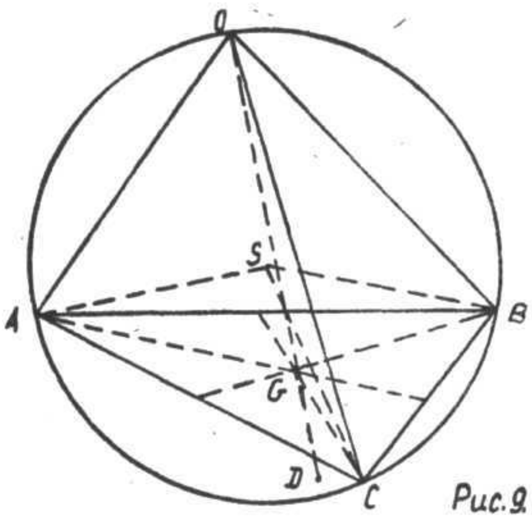


Рис. 9.19

Но $\overline{SG} = \bar{r}_4 + \overline{OG}$, поэтому последнее равенство примет вид:

$$OA^2 + OB^2 + OC^2 = 6R^2 - 6\bar{r}_4(\bar{r}_4 + \overline{OG}) = -6\bar{r}_4\overline{OG} =$$
$$= 3OG \cdot 2R \cdot \cos\angle SOG$$

Но нетрудно заметить, что $OD = 2R \cdot \cos \angle SOG$ и, следовательно, $OA^2 + OB^2 + OC^2 = 3OG \cdot OD$

10. РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Известно, что когда дана пара неколлинеарных векторов $\bar{x}$ и $\bar{y}$, то для любого вектора $\bar{m}$, компланарного $\bar{x}$ и $\bar{y}$, существует единственная пара чисел α и β, которая удовлетворяет равенству

$$\bar{m} = \alpha\bar{x} + \beta\bar{y} \qquad (1)$$

Значит, всегда можно подобрать числа α и β, которые удовлетворяют условию (1)

Поэтому, если вектор $\bar{m} = \bar{a} + \bar{b}$, причем векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны векторам $\bar{x}$ и $\bar{y}$, то $\bar{a} = \alpha\bar{x}$, $\bar{b} = \beta\bar{y}$.

Отсюда

$$\alpha = \frac{\bar{a}}{\bar{x}}, \quad \beta = \frac{\bar{b}}{\bar{y}}.$$

Заметим, что если два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ ($\bar{b} \neq \bar{0}$) коллинеарны, то вместо равенства $\bar{a} = k\bar{b}$ иногда удобно писать $\bar{a} : \bar{b} = k$. Символ $\bar{a} : \bar{b}$ применяется только для коллинеарных векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ при $\bar{b} \neq \bar{0}$.

Задача 1.

В треугольнике ABC точка X принадлежит стороне BC, причем $BX : XC = m : n$. Доказать, что

$$\overline{AX} = \frac{n}{m+n}\overline{AB} + \frac{m}{m+n}\overline{AC}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Через точку X проведем прямые, параллельные сторонам AB и AC треугольника ABC (рис. 10.1). Получим параллелограмм $ADXE$. Имеем

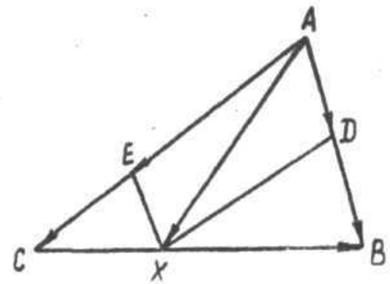


Рис. 10.1

$$\overline{AX} = \overline{AD} + \overline{AE} \text{ и } \overline{AX} = \alpha\overline{AB} + \beta\overline{AC},$$

откуда

$$\alpha = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}, \quad \beta = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}.$$

Поскольку $\overline{AD} = \overline{EX}$, то $\alpha = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{EX}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{CX}}{\overline{CB}} = \dfrac{n}{m+n}$.

Аналогично $\beta = \dfrac{m}{m+n}$.

Итак,

$$\overline{AX} = \frac{n}{m+n}\overline{AB} + \frac{m}{m+n}\overline{AC}$$

Задача 2.

Доказать, что в треугольнике ABC:

1°. Три высоты пересекаются в одной точке.

2°. Если H — точка пересечения высот и A, B, C — величины углов треугольника ABC, то

$$\operatorname{tg} A \cdot \overline{HA} + \operatorname{tg} B \cdot \overline{HB} + \operatorname{tg} C \cdot \overline{HC} = \overline{0}.$$

3°. Если H_1 — основание высоты, проведенной из вершин A, то

$$(\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C)\,\overline{HH_1} = \operatorname{tg} B \cdot \overline{HB} + \operatorname{tg} C \cdot \overline{HC}.$$

4°.

$$\frac{\overline{HA_1}}{\overline{HH_1}} = \frac{\cos A}{\cos B \cos C}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Докажем вначале утверждение 2°. Общую точку высот BH_2 и CH_3 обозначим H (рис. 10.2). Разложим вектор $\overline{HA}$ по векторам $\overline{HB}$ и $\overline{HC}$:

$$\overline{HA} = \alpha\overline{HB} + \beta\overline{HC}$$

Сделаем параллельный перенос векторов $\overline{HB}$ и $\overline{HC}$ на вектор $\overline{HA}$. Получим параллелограмм $AEHD$ и

$$\overline{HA} = \alpha\overline{HB} + \beta\overline{HC} = -(\overline{AD} + \overline{AE}).$$

Итак,

$$\alpha = -\frac{\overline{AD}}{\overline{HB}} = -\frac{\overline{AH_3}}{\overline{H_3B}} = -\frac{\operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} A}.$$

Аналогично

$$\beta = -\frac{\operatorname{tg} C}{\operatorname{tg} A}.$$

Имеем

$$\overline{HA} = -\frac{\operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} A}\cdot\overline{HB} - \frac{\operatorname{tg} C}{\operatorname{tg} A}\cdot\overline{HC}, \qquad (1)$$

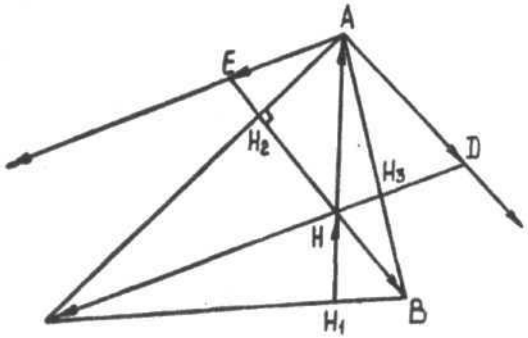


Рис. 10.2

или

$$\operatorname{tg} A \cdot \overline{HA} = -\operatorname{tg} B \cdot \overline{HB} - \operatorname{tg} C \cdot \overline{HC};$$

$$\overline{HA}\operatorname{tg} A + \overline{HB}\operatorname{tg} B + \overline{HC}\operatorname{tg} C = \overline{0},$$

что и нужно было доказать в утверждении 2°.

Докажем теперь формулу 3°. Учитывая, что $H_1B : H_1C = \operatorname{tg} C : \operatorname{tg} B$ и по формуле (2.11)

$$\overline{HH_1} = \frac{\operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C}\overline{HB} + \frac{\operatorname{tg} C}{\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} C}\overline{HC},$$

или

$$(\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C)\,\overline{HH_1} = \operatorname{tg} B \cdot \overline{HB} + \operatorname{tg} C \cdot \overline{HC} \qquad (2)$$

Сравнивая (1) и (2), видим, что векторы $\overline{H_1H}$ и $\overline{HA}$ коллинеарны, а это означает, что высота AH_1 проходит через точку H. Таким образом, доказано и утверждение 1°.

Переходим к формуле 4°. Из коллинеарности векторов $\overline{AH}$ и $\overline{HH_1}$ следует, что

$$\frac{\overline{AH}}{\overline{HH_1}} = \frac{\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C}{\operatorname{tg} A} = \frac{\cos A}{\cos B \cos C}.$$

Задача 3.

В треугольнике ABC H_1, H_2, H_3 — основания высот. Доказать, что

$$a^2 \cdot \overline{AH_1} + b^2 \cdot \overline{BH_2} + c^2 \cdot \overline{CH_3} = \overline{0}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Сделаем параллельный перенос векторов $\overline{H_2B}$ и $\overline{H_3C}$ соответственно на векторы $\overline{H_2A}$ и $\overline{H_3A}$. Получим параллелограмм AEH_1D (рис. 10.3)

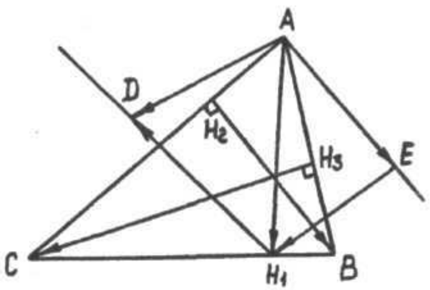


Рис. 10.3

$$\overline{AH_1} = \alpha\overline{BH_2} + \beta\overline{CH_3}$$

$$\overline{AH_1} = -(\overline{H_1D} + \overline{H_1E}) = \overline{DH_1} + \overline{EH_1},$$

т. е.

$$\alpha = \frac{\overline{DH_1}}{\overline{BH_2}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{BH_2}}; \quad \beta = \frac{\overline{EH_1}}{\overline{CH_3}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{CH_3}}$$

Обозначим $AH_1 = h_1 BH_2 = h_2$; $CH_3 = h_3$.

Очевидно, что

$$\angle H_1AE = \angle C, \ \angle DAH_1 = \angle B$$

Рассмотрим треугольник EH_1A. Он подобен треугольнику ABC. Тогда

$$\frac{AE}{b} = \frac{h_1}{a}; \quad AE = \frac{h_1 b}{a}, \ \alpha = -\frac{h_1 b}{a \cdot h_2}.$$

Зная, что

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{b}{a}, \text{ имеем}$$

$$\alpha = -\frac{b^2}{a^2}.$$

Аналогично

$$\beta = -\frac{c^2}{a^2}$$

Итак, $\overline{AH_1} = -\frac{b^2}{a^2}\overline{BH_2} - \frac{c^2}{a^2}\overline{CH_3}$

Отсюда получим

$$a^2\cdot\overline{AH_1} + b^2\cdot\overline{BH_2} + c^2\cdot\overline{CH_3} = \overline{0}$$

Задача 4.

Если I — центр вписанной в треугольник ABC окружности, a, b, c — длины сторон BC, AC, AB, p — полупериметр, то $\overline{CI} = \frac{a}{2p}\overline{CA} + \frac{b}{2p}\overline{CB}$. Доказать.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Сделаем параллельный перенос векторов $\overline{AC}$ и $\overline{BC}$ на векторы $\overline{AI}$ и $\overline{BI}$. Получим ромб $CDIE$ (рис. 10.4). Имеем

$$\overline{CI} = \alpha\overline{CA} + \beta\overline{CB};$$

$$\overline{CI} = \overline{CD} + \overline{CE}.$$

Итак,

$$\alpha = \frac{\overline{CE}}{\overline{CA}},\ \beta = \frac{\overline{CD}}{\overline{CB}}.$$

CEJD-ромб

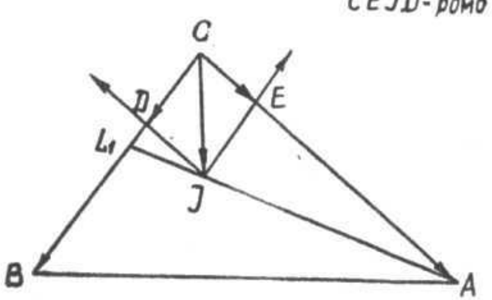


Рис. 10.4

Обозначим $|\overline{CD}| = |\overline{CE}| = x$. Тогда $\alpha = \frac{x}{b}$, $\beta = \frac{x}{a}$.

Обозначим L_1 — точку пересечения биссектрисы угла CAB со стороной BC, $AE = b - x$. Тогда

$$L_1C = \frac{ab}{b+c},$$

$$\frac{L_1C}{IE} = \frac{AC}{AE}, \text{ или}$$

$$\frac{ab}{(b+c)x} = \frac{b}{b-x}.$$

Отсюда

$$\frac{x}{b} = \frac{a}{2p}.$$

Итак,

$$\alpha = \frac{a}{2p} \text{ и } \beta = \frac{b}{2p},$$

$$\overline{CI} = \frac{a}{2p}\overline{CA} + \frac{b}{2p}\overline{CB}.$$

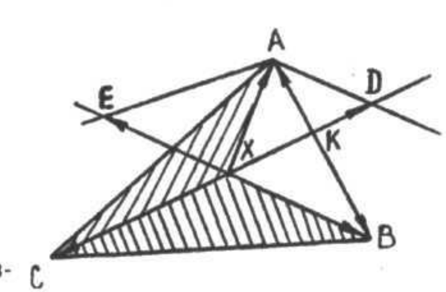


Рис. 10.5

Следствие. Если x — произвольная точка, то

$$\overline{XI} = \frac{1}{2p}(a\overline{XA} + b\overline{XB} + c\overline{XC}).$$

Действительно,

$$\overline{CX} + \overline{XI} = \frac{a}{2p}\overline{CX} + \frac{a}{2p}\overline{XA} + \frac{b}{2p}\overline{CX} + \frac{b}{2p}\overline{XB}$$

$$\overline{XI} = \frac{a}{2p}\overline{XA} + \frac{b}{2p}\overline{XB} + \overline{XC}\left(\frac{a+b+c-a-b}{2p}\right) =$$

$$= \frac{a}{2p}\overline{XA} + \frac{b}{2p}\overline{XB} + \frac{c}{2p}\overline{XC}.$$

В частности, если O — центр описаной вокруг ΔABC окружности то

$$\overline{OI} = \frac{1}{2p}(a\overline{OA} + b\overline{OB} + c\overline{OC})$$

Задача 5.

Пусть X — произвольная точка внутри треугольника ABC, S_1, S_2, S_3 — площади треугольников соответственно XCB, XAC, XAB. Доказать, что имеет место равенство

$$S_1\overline{XA} + S_2\overline{XB} + S_3\overline{XC} = \overline{0} \qquad (*)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Разложим вектор $\overline{XA}$ по векторам $\overline{XB}$ и $\overline{XC}$. Построим векторы $\overline{AE}$ и $\overline{AD}$, сонаправленные векторам $\overline{XC}$ и $\overline{XB}$ (рис. 10.5). Получим параллелограмм $ADXE$. Тогда $\overline{XA} = \overline{XE} + \overline{XD}$, $\overline{XA} = -\alpha\overline{XB} - \beta\overline{XC}$. Итак,

$$\alpha = -\frac{\overline{XE}}{\overline{XB}},\quad \beta = -\frac{\overline{XD}}{\overline{XC}}.$$

Обозначим точку пересечения прямых AB и CX. Тогда

$$-\frac{\overline{XE}}{\overline{XB}} = -\frac{\overline{KA}}{\overline{KB}} = \frac{S_2}{S_1} \quad \text{(докажите!)}$$

значит, $\alpha = \frac{S_2}{S_1}$.

Аналогично $\beta = \frac{S_3}{S_1}$. Итак, $S_1\overline{XA} = -S_2\overline{XB} - S_3\overline{XC}$.

Задача 6.

Доказать, что в треугольнике ABC:

1) $\overline{OA}\sin 2A + \overline{OB}\sin 2B + \overline{OC}\sin 2C = \overline{0}$
(O — центр описанной окружности)

2) $a\overline{IA} + b\overline{IB} + c\overline{IC} = \overline{0}$ (I — центр вписанной окружности).

3) $\operatorname{tg} A \cdot \overline{HA} + \operatorname{tg} B \cdot \overline{HB} + \operatorname{tg} C \cdot \overline{HC} = \overline{0}$ (H — ортоцентр остроугольного треугольника ABC).

4) $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = \overline{0}$ (M — центроид)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

1) В формуле (*) положим $X \equiv 0$
Имеем

$$S_1\overline{OA} + S_2\overline{OB} + S_3 \cdot \overline{OC} = \overline{0}.$$

Тогда

$$S_1 = \frac{1}{2}R^2\sin 2A; \quad S_2 = \frac{1}{2}R^2\sin 2B; \quad S_3 = \frac{1}{2}R^2\sin 2C.$$

$$\overline{OA}\sin 2A + \overline{OB}\sin 2B + \overline{OC}\sin 2C = \overline{0}$$

2) В формуле (*) положим $X \equiv I$
Тогда

$$S_1\overline{IA} + S_2\overline{IB} + S_3\overline{IC} = \overline{0}$$

$$S_1 = \frac{ar}{2}, \ S_2 = \frac{br}{2}, \ S_3 = \frac{cr}{2},$$

значит,

$$a\overline{IA} + b\overline{IB} + c\overline{IC} = \overline{0}.$$

3) В формуле (*) положим $X \equiv H$ (H — ортоцентр). Тогда

$$S_1\overline{HA} + S_2\overline{HB} + S_3\overline{HC} = \overline{0}$$

Тогда

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{AH_3}{H_3B} = \frac{\operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} A}; \quad \frac{S_3}{S_1} = \frac{\operatorname{tg} C}{\operatorname{tg} A}.$$

Итак,

$$\operatorname{tg} A \cdot \overline{HA} + \operatorname{tg} B \cdot \overline{HB} + \operatorname{tg} C \cdot \overline{HC} = \overline{0}.$$

4) В формуле (*) положим $X \equiv M$. Поскольку в этом случае $S_1 = S_2 = S_3$, то $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = \overline{0}$.

Задача 7.

Точки A_1, B_1, C_1 — ортогональные проекции центроида M треугольника ABC на стороны BC, CA, AB. Доказать, что

$$a^2\overline{MA_1} + b^2\overline{MB_1} + c^2\overline{MC} = \overline{0}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Запишем формулу (*) для случая $X \equiv M$ для треугольника $A_1B_1C_1$ (рис. 10.6).

Имеем

$$S_1\overline{MA_1} + S_2\overline{MB_1} + S_3\overline{MC_1} = \overline{0}$$

Пусть

$$MA_1 = m, \ MB = l, \ MC_1 = n.$$

Тогда

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{nl\sin A}{mn\sin B} = \frac{l \cdot a}{m \cdot b}.$$

Но $\frac{l}{m} = \frac{a}{b}$, поскольку площади треугольников AMC, CMB, BMA равны и соответственные высоты обратно пропорциональны сторонам, на которые они опущены.

Итак, $\frac{S_1}{S_2} = \frac{l}{m} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a^2}{b^2}$.

Аналогично докажем, что

$$\frac{S_3}{S_1} = \frac{c^2}{a^2},$$

а это означает, что утверждение задачи доказано.

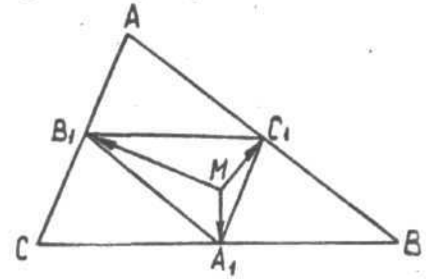


Рис. 10.6

Задача 8.

В треугольнике ABC I — центр вписанной окружности, K_1, K_2, K_3 — точки касания окружности со сторонами треугольника. Доказать, что

$$a\overline{IK_1} + b\overline{IK_2} + c\overline{IK_3} = \overline{0}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Запишем формулу (*) при $X \equiv I$ для треугольника $K_1K_2K_3$.

$$S_1\overline{IK_1} + S_2\overline{IK_2} + S_3\overline{IK_3} = \overline{0}$$

Но

$$S_1 = \frac{1}{2}r^2\sin A \ (r \text{ — радиус вписанной окружности}).$$

Учитывая, что

$$\sin A = \frac{a}{2R}$$

(R — радиус описаннной окружности),
имеем

$$\frac{r^2a}{4R}\overline{IK_1} + \frac{r^2b}{4R}\overline{IK_2} + \frac{r^2c}{4R}\overline{IK_3} = \overline{0}.$$

Отсюда

$$a\overline{IK}_1 + b\overline{IK}_2 + c\overline{IK}_3 = \overline{0}.$$

Задача 9.

Из произвольной точки X, находящейся внутри равностороннего треугольника ABC, опущены перпендикуляры на стороны BC, AC, AB треугольника. Длины перпендикуляров a, b, c — соответственно. Доказать, что

$$a\overline{XA} + b\overline{XB} + c\overline{XC} = \overline{0}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Обозначим m — длину стороны равностороннего треугольника ABC. Учитывая, что в треугольнике XBC, XAC и XAB стороны BC, AC, AB равны, формулу (*) запишем так:

$$\frac{am}{2}\overline{XA} + \frac{bm}{2}\overline{XB} + \frac{cm}{2}\overline{XC} = \overline{0}, \text{ или}$$

$$a\overline{XA} + b\overline{XB} + c\overline{XC} = \overline{0}.$$

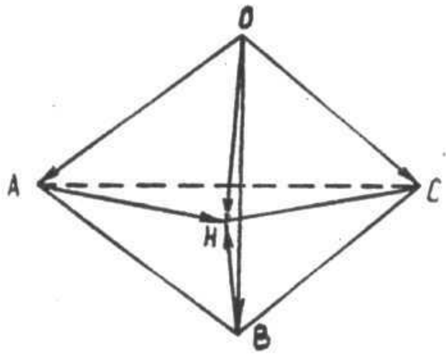


Рис. 10.7

Задача 10.

В тетраэдре $OABC$ плоские углы трехгранного угла при вершине O — прямые. Точка H — основание перпендикуляра, проведенного из вершины O к плоскости грани ABC. Разложить вектор $\overline{OH}$ по векторам $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$, если $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$.

РЕШЕНИЕ

Примем вершину O тетраэдра $OABC$ за общую точку векторов $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, (рис. 10.7) Так как точки H, A, B и C принадлежат одной плоскости, то

$$\overline{OH} = \alpha\overline{OA} + \beta\overline{OB} + (1-\alpha-\beta)\overline{OC}$$

$$a = \overline{AH} = \overline{OH} - \overline{OA} \text{ и } \overline{BH} = \overline{OH} + \overline{OB}$$

Учитывая, что $BC \perp AH$ и $AC \perp BH$, получаем

$$(\overline{OC} - \overline{OB})((\alpha-1)\overline{OA} + \beta\overline{OB} + (1-\alpha-\beta)\overline{OC}) = 0,$$

$$(\overline{OC} - \overline{OA})(\alpha\overline{OA} + (\beta-1)\overline{OB} + (1-\alpha-\beta)\overline{OC}) = 0.$$

Отсюда

$$\begin{cases} OC^2(1-\alpha-\beta) - \beta OB^2 = 0, \\ OC^2(1-\alpha-\beta) - \alpha OA^2 = 0. \end{cases}$$

Из полученной системы

$$\alpha = \frac{b^2c^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2},$$

$$\beta = \frac{a^2c^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}, \text{ где}$$

$a = OA$, $b = OB$, $c = OC$.

Окончательно,

$$\overline{OH} = \frac{b^2c^2\overline{OA} + a^2c^2\overline{OB} + a^2b^2\overline{OC}}{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}.$$

Задача 11. (Ск. IV., 15.180)

В окружность вписан треугольник ABC. Биссектриса угла ACB пересекает окружность в точке S. Разложить вектор $\overline{CS}$ по векторам $\overline{CA}$ и $\overline{CB}$.

РЕШЕНИЕ

Пусть биссектриса угла ACB пересекает сторону AB в точке C_1 (рис. 10.8) По формуле (2.11), учитывая, что

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{b}{a},$$

$$\overline{CC}_1 = \frac{a}{a+b}\bar{b} + \frac{b}{a+b}\bar{a}, \quad \text{где } \bar{a} = \overline{CB},\ b = \overline{CA} \tag{1}$$

Но треугольник ACC_1 подобен треугольнику SCB, поэтому

$$\frac{SC}{a} = \frac{b}{CC_1} \tag{2}$$

Так как векторы $\overline{CS}$ и $\overline{CC}_1$ сонаправлены, то (2) можно записать в виде

$$\overline{CS} = \frac{ab}{CC_1^2}\cdot\overline{CC}_1$$

Учитывая формулу (1),

$$\overline{CS} = \frac{ab(a+b)(b\bar{a} + a\bar{b})}{2a^2b^2 + \frac{2a^2b^2(a^2+b^2-c^2)}{2ab}} = \frac{(a+b)(b\bar{a}+a\bar{b})}{(a+b)^2 - c^2} = \frac{(a+b)b}{(a+b)^2-c^2}\bar{a} +$$

$$+ \frac{(a+b)a}{(a+b)^2-c^2}\bar{b}.$$

Задача 12.

На ребрах DA, DB и CD треугольной пирамиды $DABC$ взяты точки M, N и K так, что $DM = \frac{1}{3}DA$, $DN = \frac{1}{4}DB$, $DK = \frac{3}{5}DC$. Пусть G — центроид треугольника ABC. В каком отношении плоскость MNK делит отрезок DG?

РЕШЕНИЕ

Пусть $\overline{DA}=\bar a$, $\overline{DB}=\bar b$, $\overline{DC}=\bar c$ (рис. 10.9)

Проведем плоскость MNK, которая пересечет прямую DG в точке Р. Ясно, что $\overline{DP}=\alpha\overline{DG}$

$$\overline{DG}=\frac{1}{3}(\bar a+\bar b+\bar c).$$

(формула 2.13,)

Значит, $\overline{DP}=\frac{\alpha}{3}(\bar a+\bar b+\bar c)$

Поскольку точка P принадлежит плоскости MNK, то вектор $\overline{MP}$ можно разложить по векторам $\overline{MN}$ и $\overline{MK}$,

$$\overline{MP}=x\overline{MN}+y\overline{MK}.$$

Следовательно,

$$\overline{DP}=\overline{DM}+\overline{MP}=\frac{1}{3}\bar a+x(\overline{DN}-\overline{DM})+$$
$$+y(\overline{DK}-\overline{DM})=\frac{1}{3}\bar a+x\left(\frac{1}{4}\bar b-\frac{1}{3}\bar a\right)+$$
$$+y\left(\frac{3}{5}\bar c-\frac{1}{3}\bar a\right)=\frac{1}{3}(1-x-y)\bar a+\frac{1}{4}x\bar b+\frac{3}{5}y\bar c$$

Приравняем полученные разложения вектора $\overline{DP}$:

$$\frac{\alpha}{3}\bar a+\frac{\alpha}{3}\bar b+\frac{\alpha}{3}\bar c=\frac{1}{3}(1-x-y)\bar a+\frac{1}{4}x\bar b+\frac{3}{5}y\bar c$$

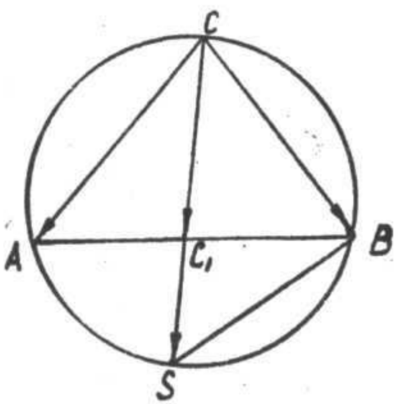


Рис 10.8

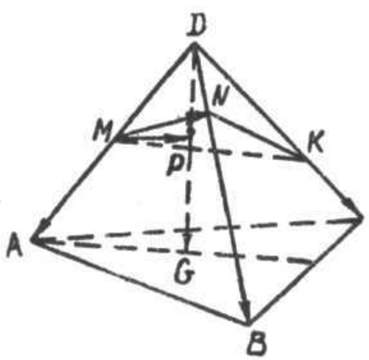


Рис. 10.9

Ввиду единственности разложения произвольного вектора по трем некомпланарным векторам получим систему:

$$\begin{cases}\alpha=1-x-y\\ \dfrac{\alpha}{3}=\dfrac{x}{4}\\ \dfrac{\alpha}{3}=\dfrac{3}{5}y,\end{cases}$$

откуда $\alpha=\frac{9}{26}$

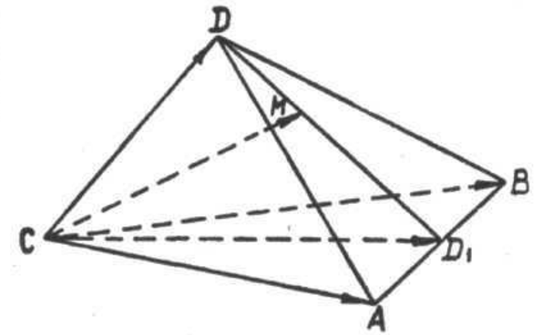


Рис. 10.10

Искомое отношение равно $\frac{9}{17}$.

Задача 13. (Ск. V, 17.042)

В тетраэдре $ABCD$ медиана DD_1, грани ADB делится точкой M в отношении $DM:MD_1=3:7$. Разложить вектор $\overline{CM}$ по векторам $\overline{CA}$, $\overline{CB}$ и $\overline{CD}$.

РЕШЕНИЕ

Для разложения вектора $\overline{CM}$ (рис. 10.10) воспользуемся формулой (2.11)

$$\overline{CM}=\frac{7}{10}\overline{CD}+\frac{3}{10}\overline{CD_1} \qquad (1)$$

Так как $2\overline{CD_1}=\overline{CA}+\overline{CB}$

то формулу (1) можно записать так

$$\overline{CM}=\frac{7}{10}\overline{CD}+\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{2}(\overline{CA}+\overline{CB})=\frac{7}{10}\overline{CD}+\frac{3}{20}\overline{CA}+\frac{3}{20}\overline{CB}.$$

Задача 14. (Ск. V, 17.074)

На стороне AB параллелограмма $ABCD$ взята точка K так, что $AK:KB=7$. Сторона AB в три раза длинее стороны BC. Разложить $\overline{DK}$ по $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$ и найти отношение $DK:AB$, если $\angle BAD=60°$.

РЕШЕНИЕ

Обозначим отрезок $BK=m$ (рис. 10.11). Тогда $AK=7m$,

$$AD=\frac{8}{3}m\to\overline{DK}=\overline{AK}-\overline{AD}.$$

$$(\overline{DK})^2=(\overline{AD})^2+(\overline{AK})^2-2AD\cdot AK\cos\alpha=49m^2+\frac{64}{9}m^2-$$
$$-14\,\frac{8}{3}m^2\cos\alpha=(505-336\cos\alpha)\cdot\frac{m^2}{9}, \text{ отсюда}$$
$$\frac{DK}{AB}=\frac{1}{24}\sqrt{505-336\cos\alpha}=$$

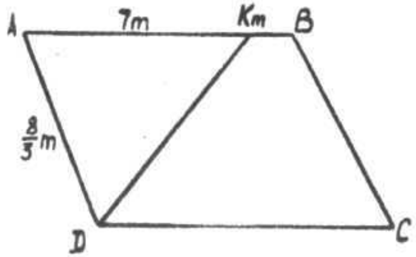


Рис 10.11

$$= \frac{1}{24}\sqrt{505 - 336\cdot\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{337}}{24} \qquad \overline{DK} = \overline{AK} - \overline{AD} =$$

$$= \frac{7}{8}\overline{AB} - \overline{AD}$$

Задача 15. (Ск. V, 17.057)

Дан прямоугольный треугольник ABC; $\angle C = 90°$, D — основание высоты, проведнной из вершины прямого угла. Выразить вектор $\overline{CD}$ через векторы $\overline{CA}$ и $\overline{CB}$.

РЕШЕНИЕ

Запишем требование задачи в виде формулы разложения

$$\overline{CD} = \alpha\overline{CA} + \beta\overline{CB}$$

Через точку D проведем прямые, параллельные катетам AC и BC. Получим прямоугольник $CKDE$ (рис. 10.12)

$$\overline{CD} = \overline{CE} + \overline{CK}$$

$$\alpha = \frac{\overline{CE}}{\overline{CA}} = \cos^2 B, \text{ аналогично } \beta = \cos^2 A, \text{ значит,}$$

$$\overline{CD} = \frac{CB^2\overline{CA} + CA^2\overline{CB}}{CA^2 + CB^2}$$

Задача 16.

В треугольнике ABC проведена биссектриса угла A, пересекающая сторону BC в точке A_1; $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Доказать, что векторы $\overline{AA_1}$ и $\frac{1}{c}\overline{AB} + \frac{1}{b}\cdot\overline{AC}$ коллинеарны.

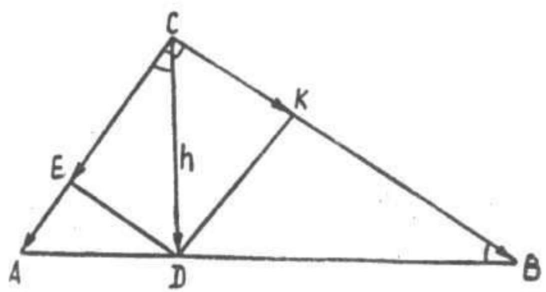


Рис. 10.12

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Возьмем единичные векторы $\overline{e}_1$ и $\overline{e}_2$, сонаправленные с векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ (рис. 10.13)

Поскольку луч AA_1 — биссектриса угла BAC, то параллелограмм разложения вектора $\overline{AA_1}$ по направлениям $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ является ромбом. Значит, существует такое число α, что $\overline{AA_1} = \alpha\overline{e}_1 + \alpha\overline{e}_2 = \alpha\left(\frac{\overline{AB}}{|\overline{AB}|} + \frac{\overline{AC}}{|\overline{AC}|}\right) = 2\left(\frac{1}{c}\overline{AB} + \frac{1}{b}\overline{AC}\right)$, т. е. векторы $\overline{AA_1}$ и $\frac{1}{c} + \frac{1}{b}AC$ коллинеарны.

Задача 17.

Пусть $\overline{a} = 5\overline{m} - 3\overline{n}$, $\overline{b} = 7\overline{m} - 4\overline{n}$, где векторы $\overline{m}$ и n — неколлинеарны. Разложите векторы $\overline{m}$ и $\overline{n}$ по векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

РЕШЕНИЕ

Докажем, что векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ не коллинеарны. Предположим, что векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны. Значит, существует такое число α, что $\overline{a} = \alpha\overline{b}$, т. е. $5\overline{m} - 3\overline{n} = 7\alpha\overline{m} - 4\alpha\overline{n}$.

В силу единственности разложения имеем

$$\begin{cases} 7\alpha = 5 \\ -4\alpha = 3 \end{cases}$$

Система несовместна, т. е. векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ — неколлинеарны.

Выразим векторы $\overline{n}$ и $\overline{m}$ через векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$

$$\begin{cases} \overline{a} = 5\overline{m} - 3\overline{n} \\ \overline{b} = 7\overline{m} - 4\overline{n} \end{cases} \quad \begin{cases} -7\overline{a} + 5\overline{b} = \overline{n} \\ -4\overline{a} + 3\overline{b} = \overline{m} \end{cases}$$

Итак, $\overline{m} = -4\overline{a} + 3\overline{b}$, $n = -7\overline{a} + 5\overline{b}$.

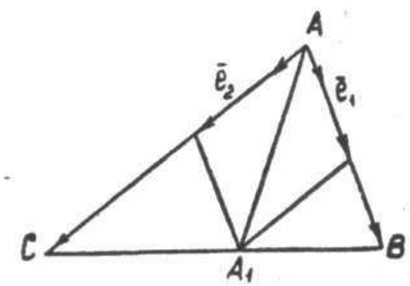


Рис. 10.13

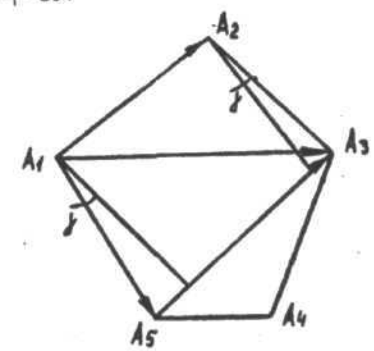


Рис 10.14.

Задача 18. (Ск. V, 17.071)

Дан правильный пятиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5$. Разложить вектор $\overline{A_1A_3}$ по векторам $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_1A_5}$.

РЕШЕНИЕ

$\overline{A_1A_3} = \overline{A_1A_5} + \overline{A_5A_3}$ (рис. 10.14)

Поскольку пятиугольник правильный, то векторы $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_5A_3}$ сонаправлены, причем

$$\overline{A_5A_3} = (1 + 2\sin\alpha)\,\overline{A_1A_2}$$

где $\alpha = 18°$, а $\sin 18° = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Итак, $\overline{A_5A_3} = \left(1 + \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\overline{A_1A_2} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\,\overline{A_1A_2}$, значит, $\overline{A_1A_3} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\,\overline{A_1A_2} + \overline{A_1A_5}$.

11. ФОРМУЛА ГАМИЛЬТОНА

Формула Гамильтона имеет вид

$$\overline{OH} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} \qquad (11.1)$$

где O — центр окружности, описанной около треугольника ABC, H — точка пересечения высот треугольника (ортоцентр).

Докажем формулу разными способами.

Первый способ

$$\overline{OH} = \overline{OA} + \overline{AH} \text{ (рис. 11.1)}$$

Поскольку $\overline{AH} = 2\overline{OM_1}$ (докажите!), а $2\overline{OM_1} = \overline{OB} + \overline{OC}$, $\overline{OH} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$

Второй способ

$\overline{OH} = \overline{OA} + \overline{AH}$. Докажем, что $\overline{AH} = \overline{OB} + \overline{OC}$

Для этого разложим вектор $\overline{AH}$ по векторам $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$.

$$\overline{AH} = \alpha\overline{OB} + \beta\overline{OC} \qquad (1)$$

Сделаем параллельный перенос векторов $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$ на вектор $\overline{OA}$ (рис. 11.2). Проведя $HE \parallel OC$ и $HD \parallel OB$, получим ромб $AEHD$:

$$\overline{AH} = \overline{AE} + \overline{AD}$$

Покажем, что $\overline{AE} = \overline{OB}$. Пусть диагонали ромба пересекаются в точке N. Поскольку $\angle ANE = 90°$ и $\angle NAE = \angle M_1OB$ и $OM_1 = AN$ (M_1 — середина стороны BC), то треугольники ANE и OM_1B равны, значит, $\overline{AE} = \overline{OB}$. Аналогично доказывается, что $\overline{AD} = \overline{OC}$. Итак, $\overline{AH} = \overline{OB} + \overline{OC}$, окончательно

$$\overline{OH} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}.$$

Третий способ

$$|\overline{OB} + \overline{OC}| = \sqrt{(\overline{OB} + \overline{OC})^2} = \sqrt{R^2 + R^2 + 2R^2\cos 2A} = \sqrt{2R^2(1+\cos 2A)} = 2R\,|\cos A| = |\overline{AH}|$$

(воспользовались формулой $|\overline{AH}| = 2R\,|\cos A|$).

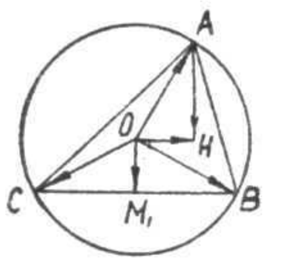


Рис. 11.1

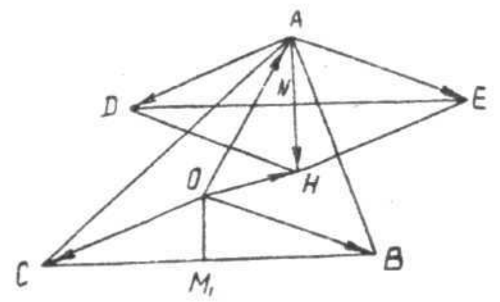


Рис. 11.2

Итак, $|\overline{OB}+\overline{OC}| = |\overline{AH}|$. Но сумма $\overline{OB}+\overline{OC}$ есть вектор $2\overline{OM}_1$, коллинеарный и сонаправленный с $\overline{AH}$, поэтому

$$\overline{OB}+\overline{OC}=\overline{AH}.$$

Поскольку $\overline{AH}=\overline{OH}-\overline{OA}$, то $\overline{OB}+\overline{OC}=\overline{OH}-\overline{OA}$, значит, $\overline{OB}+\overline{OC}+\overline{OA}=\overline{OH}$

Четвертый способ

Из условия следует, что

$$\overline{AH}\cdot\overline{BC}=0,$$

или

$$(\overline{OH}-\overline{OA})(\overline{OC}-\overline{OB})=0 \qquad (1)$$

Поскольку $\overline{OB}^2=\overline{OC}^2$, то

$$\overline{OB}^2-\overline{OC}^2=0 \text{ или}$$

$$(\overline{OC}+\overline{OB})(\overline{OC}-\overline{OB})=0 \qquad (2)$$

Вычтем равенства (1) и (2) почленно:

$$(\overline{OC}-\overline{OB})(\overline{OH}-\overline{OA}-\overline{OB}-\overline{OC})=0 \qquad (3)$$

Аналогично из условий:

$$\overline{BH}\cdot\overline{CA}=0,\quad \overline{OC}^2=\overline{OA}^2$$

следует равенство

$$(\overline{OA}-\overline{OC})(\overline{OH}-\overline{OA}-\overline{OB}-\overline{OC})=0 \qquad (4)$$

Векторные равенства (3) и (4) запишем так:

$$\overline{BC}(\overline{OH}-\overline{OA}-\overline{OB}-\overline{OC})=0$$

$$\overline{CA}(\overline{OH}-\overline{OA}-\overline{OB}-\overline{OC})=0,$$

причем $\overline{BC}\neq\overline{0}$, $\overline{CA}\neq\overline{0}$

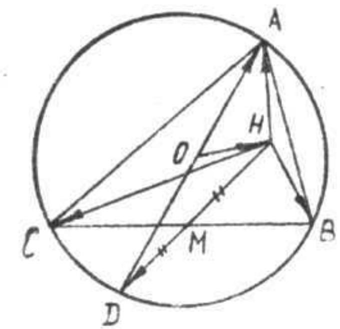


Рис. 11.3

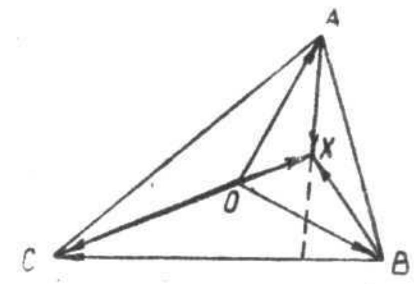


Рис. 11.4

Если допустить, что $\overline{OH}-\overline{OA}-\overline{OB}-\overline{OC}\neq 0$, то из полученных соотношений следует, что этот вектор перпендикулярен каждому из векторов $\overline{BC}$ и $\overline{CA}$, что невозможно. Поэтому $\overline{OH}=\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}$.

Пятый способ

Воспользуемся свойством точки D, симметричной точке H относительно середины BC (рис. 11.3). Предлагаем доказать самостоятельно, что эта точка диаметрально противоположна точке A. Итак

$$\overline{HD}=\overline{HC}+\overline{HB}$$

$$\overline{HA}=\overline{HO}+\overline{OA}$$

Поскольку $AO=OD$, то

$$\overline{HO}=\frac{1}{2}(\overline{HA}+\overline{HD})$$

$$\overline{HO}=\frac{1}{2}(3\overline{HO}+\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC})$$

откуда $\overline{OH}=\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}$

Задача 1.

Доказать, что если

$$\overline{OX}=\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC},$$

где X — некоторая точка, а O — центр окружности, описанной около треугольника ABC, то X — ортоцентр треугольника ABC.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Докажем, например, что $AX\perp BC$ (рис. 11.4). Ясно, что $\overline{AX}=\overline{AO}+\overline{OX}=\overline{AO}+(\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC})=\overline{OB}+\overline{OC}$ и $\overline{BC}=-\overline{OB}+\overline{OC}$.

Поэтому скалярное произведение векторов $\overline{AX}$ и $\overline{BC}$ равно $\overline{OC}^2$ —

$-\overline{OB}^2 = R^2 - R^2 = 0$ (R — радиус описанной окружности), значит, векторы AX и BC — перпендикулярны.

Задача 2.

Охарактеризовать взаимное расположение четырех точек A, B, C, D, принадлежащих одной окружности с центром O, если

1) $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD} = \overline{0}$

2) $\overline{OD} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$

3) $\overline{OA} + \overline{OB} = \overline{OC} + \overline{OD}$

РЕШЕНИЕ

1) Учитывая формулу Гамильтона и условие, имеем

$\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD} = \overline{OH} + \overline{OD} = \overline{0}$,

$\overline{OH} = -\overline{OD}$.

Следовательно, точка H принадлежит данной окружности. Но тогда треугольник ABC — прямоугольный, причем точка D является диаметрально противоположной вершине прямого угла треугольника. Итак, точки A, B, C, D образуют прямоугольник.

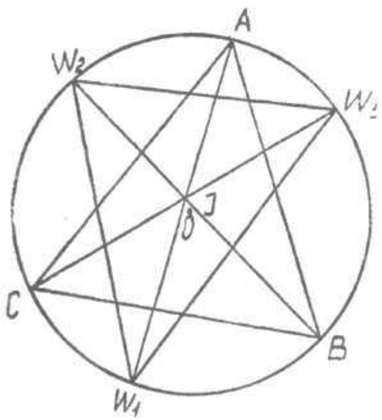


Рис. 11.5

2) Пусть D^1 — точка, диаметрально противоположная точке D. Тогда $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD}^1 = \overline{0}$, т. е. (см. случай 1) точки A, B, C, D^1 являются вершинами прямоугольника; точки A, B, C являются вершинами прямоугольного треугольника, а точка D совпадает с вершиной прямого угла.

3) Пусть C^1 и D^1 — точки, диаметрально противоположные соответственно точкам C и D. Тогда $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}^1 + \overline{OD}^1 = \overline{0}$, т. е. (см. случай 1) точки A, B, C^1, D^1 являются вершинами прямоугольника, а из точек A, B, C, D совпадают либо A с C и B с D, либо A с D и B с C.

Задача 3.

Дан треугольник ABC, I — центр вписанной окружности, W_1, W_2, W_3 — точки пересечения биссектрис его внутренних углов с описанной окружностью, центр которой — точка O. Доказать, что

$$\overline{OI} = \overline{OW}_1 + \overline{OW}_2 + \overline{OW}_3$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Докажите самостоятельно, что точка I — ортоцентр треугольника $W_1W_2W_3$ (рис. 11.5). Значит, по формуле Гамильтона для треугольника $W_1W_2W_3$:

$$\overline{OI} = \overline{OW}_1 + \overline{OW}_2 + \overline{OW}_3$$

Задача 4.

Доказать, что в треугольнике ABC центроид M, ортоцентр H, центр описанной окружности — точка O принадлежит одной прямой (прямая Эйлера), причем $OM : MH = 1 : 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Известно, что если X — произвольная точка пространства, то

$$3\overline{XM} = \overline{XA} + \overline{XB} + \overline{XC}$$

Если X совпадает с точкой O, то

$$3\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$$

Учитывая формулу Гамильтона, имеем

$$3\overline{OM} = \overline{OH},$$

а это доказывает утверждение задачи.

Задача 5.

Точки O и I — центры описанной около треугольника ABC и вписанной в него окружностей, R и r — их радиусы. Доказать, что $OI^2 = R^2 - 2Rr$ (формула Эйлера).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Мы доказали, что $\overline{OI} = \overline{OW}_1 + \overline{OW}_2 + \overline{OW}_3$

Возведем обе части равенства в скалярной квадрат, учитывая, что

$$r = 4R \sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2}$$

Получим

$$OI^2 = (\overline{OW}_1 + \overline{OW}_2 + \overline{OW}_3)^2 = 3R^2 - 2R^2(\cos A + \cos B + \cos C) =$$
$$= 3R^2 - 2R\left(1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right) =$$
$$= 3R^2 - 2R(r + R) = R^2 - 2Rr.$$

Задача 6.

В окружность с центром O вписан треугольник ABC. На окружности взяты точки L и K такие, что сумма квадратов расстояний от точки L до вершин треугольника ABC имеет наименьшее значение, а от точки K до вершин треугольника — наибольшее. Доказать, что ортоцентр H и точки O, L, K принадлежат одной прямой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть X — произвольная точка окружности, описанной около треугольника ABC, R — радиус окружности (рис. 11.6).

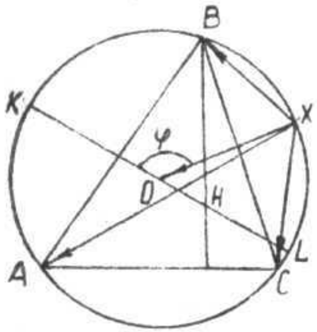


Рис 11.6

Пусть

$$S(X) = XA^2 + XB^2 + XC^2$$

Тогда

$$S(X) = (\overline{XO} + \overline{OA})^2 + (\overline{XO} + \overline{OB})^2 + (\overline{XO} + \overline{OC})^2 = 3\overline{XO}^2 + \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 + 2\overline{XO}\,(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC})$$

Применяя формулу Гамильтона, имеем

$$S(X) = 6R^2 + 2\overline{XO}\cdot\overline{OH} = 6R^2 + 2XO\cdot OH\cos\varphi$$

$$(\varphi = 180^\circ - \angle HOX)$$

Очевидно, что $S(X)$ будет минимальной, т. е. $L \equiv X$, если $\varphi = 180^\circ$ и максимально, т. е. $K \equiv X$, когда $\varphi = 0$. А это значит, что точки Q, L, K, H принадлежат одной прямой.

Задача 7.

Доказать, что прямая, которой принадлежит центр описанной около треугольника окружности и центр вписанной в него окружности, есть прямой Эйлера треугольника $K_1K_2K_3$, вершины которого — точки касания сторон и вписанной окружности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Треугольник $K_1K_2K_3$ гомотетичен треугольнику $W_1W_2W_3$ (рис. 11.7). Обозначим k — коэффициент гомотетии, H_k — ортоцентр треугольника $K_1K_2K_3$. Поскольку I — центр окружности, описанной около этого треугольника, то по формуле Гамильтона

$$\overline{OI} = \overline{OW}_1 + \overline{OW}_2 + \overline{OW}_3 = k(\overline{IK}_1 + \overline{IK}_2 + \overline{IK}_3) = k\overline{IH}_k.$$

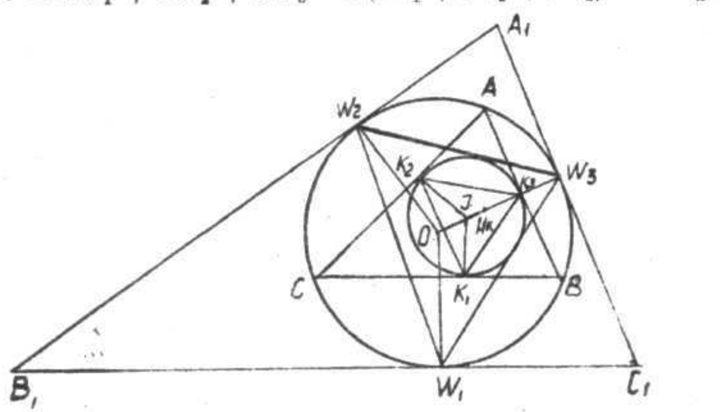


Рис. 11.7

Вновь применяя формулу Гамильтона к выражению в скобках, получим $\overline{OI} = k\overline{IH}_k$, т. е. точки O, I, H_k принадлежат одной прямой.

Задача 8.

Доказать, что сумма квадратов расстояний от произвольной точки окружности, описанной около правильного треугольника, до его вершин не зависит от положения точки на окружности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть X — произвольная точка окружности с центром O. Точки A, B, C — вершины правильного треугольника, вписанного в эту окружность (рис. 11.6); R — радиус окружности. Учитывая решение задачи 6, можно записать, что

$$S(X) = 6R^2 + 2\overline{XO}\cdot\overline{OH}, \text{ где}$$

H — ортоцентр треугольника ABC. Поскольку в равностороннем треугольнике $\overline{OH} = \overline{0}$, то $S(X) = 6R^2$, что доказывает утверждение задачи.

Задача 9.

В треугольнике ABC a, b, c — длины сторон, причем $b > a > c$. В этот треугольник вписана окружность с центром I и около треугольника описана окружность с центром O. Доказать что

1) если прямая OI перпендикулярна к биссектрисе угла BAC, то стороны треугольника ABC составляют арифметическую прогрессию;

2) если прямая OM, где M — центроид ΔABC, перпендикулярна к медиане, проведенной через вершину A, то квадраты сторон треугольника составляют арифметическую прогрессию.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Биссектриса угла BAC пересекает описанную окружность в точке W_1 (рис. 11.8). Используя условие задачи, можно записать, что $AI = IW_1$ и $2\overline{OI} = \overline{OW}_1 + \overline{OA}$. Учитывая формулу Гамильтона (11.1), имеем:

$$2(\overline{OW}_2 + \overline{OW}_3) = \overline{OA} - \overline{OW}_1$$

Поскольку $|\overline{OW}_1| = |\overline{OW}_2| = |\overline{OW}_3| = R$, ($R$ — радиус описанной окружности), то

$$8R^2 - 8R^2\cos A = 2R^2(1 - \cos(A + 2C))$$

или

$$2\sin\frac{A}{2} = \sin\left(\frac{A}{2} + C\right)$$

Откуда

$$2\sin A = \sin B + \sin C \text{ или } 2a = b + c$$

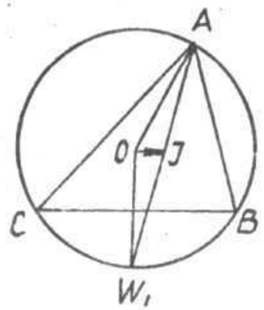


Рис. 11.8

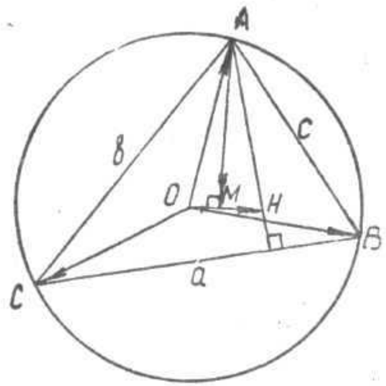


Рис. 11.9

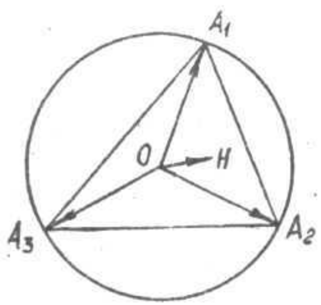


Рис. 11.10

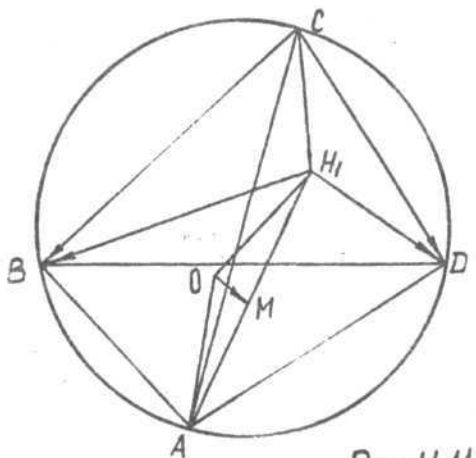


Рис. 11.11

2) Так как ортоцентр H принадлежит прямой OM, то $\overline{OH}\cdot\overline{AM}=0$, $3\overline{OM}=\overline{OH}$, $\overline{AM}=\overline{OM}-\overline{OA}$ (рис. 11.9)
По формуле Гамильтона $3\overline{AM}=\overline{OC}+\overline{OB}-2\overline{OA}$, и учитывая условие, получим:
$(\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC})(2\overline{OA}-\overline{OB}-\overline{OC})=0$. Поскольку $|\overline{OB}|=|\overline{OC}|=|\overline{OA}|=R$, то $2\overline{OB}\cdot\overline{OC}-\overline{OA}\cdot\overline{OB}-\overline{OA}\cdot\overline{OC}=0$ или $2\cos 2A=\cos 2B+\cos 2C$ и $2\sin^2 A=\sin^2 B+\sin^2 C$, а значит, $2a^2=b^2+c^2$

Задача 10.

На плоскости даны три вектора $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$, равные m по модулю. Доказать, что если

$$0<(\widehat{\bar{a}_1, \bar{a}_2})<\pi,$$

$$0<(\widehat{\bar{a}_2, \bar{a}_3})<\pi,$$

$$0<(\widehat{\bar{a}_3, \bar{a}_1})<\pi,$$

то

$$|\bar{a}_1+\bar{a}_2+\bar{a}_3|<m.$$

РЕШЕНИЕ

Построим векторы $\overline{OA}_1$, $\overline{OA}_2$, $\overline{OA}_3$, равные соответственно $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$. Точка O служит центром окружности $A_1A_2A_3$ (рис. 11.10) Этот треугольник (согласно условию) остроугольный, и поэтому ортоцентр H треугольника лежит внутри треугольника, а значит, и внутри окружности. Таким образом $|\overline{OH}|<R=m$. Но по формуле Гамильтона

$$\overline{OA}_1+\overline{OA}_2+\overline{OA}_3=\overline{OH}$$

Значит,

$$|\bar{a}_1+\bar{a}_2+\bar{a}_3|=|\overline{OA}_1+\overline{OA}_2+\overline{OA}_3|=|\overline{OH}|<m.$$

Задача 11.

Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Пусть H_1, H_2, H_3, H_4 — ортоцентры треугольников BCD, CDA, DAB, ABC. Доказать, что отрезки AH_1, BH_2, CH_3, DH_4 пересекаются в одной точке.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть, например, M — середина отрезка AH_1 (рис. 11.11), где O — центр окружности, описанной около четырехугольника. Тогда

$$\overline{OM}=\frac{1}{2}(\overline{OA}+\overline{OH}_1)=\frac{1}{2}(\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}+\overline{OD}).$$

Для середин трех других отрезков получим такое же выражение, а значит, утверждение задачи доказано.

12. ПРИМЕНЕНИЕ ВЕКТОРОВ ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ МНОЖЕСТВ ТОЧЕК

Для нахождения определенного множества точек необходимо уметь пользоваться векторными соотношениями, которые рассматривались в разделах 2 и 8. Полученное по ходу решения векторное соотношение позволяет распознать искомое множество.

Задача 1

Составить векторное уравнение прямой, проходящей через две данные точки A и B.

РЕШЕНИЕ

Пусть X — произвольная точка пространства, а C — произвольная точка прямой AB. Учитывая формулу (2.7), имеем

$$\overline{XC} = (1-k)\,\overline{XA} + k\overline{XB}$$

Значит, для каждой точки C мы имеем определенное значение k, а для каждого действительного числа k находим определенную точку C на прямой AB.

Задача 2

Даны отрезок AB и точка O не принадлежащая прямой AB. Найдите множество точек M, для которых

$$\overline{OM} = \alpha\overline{OA} + \beta\overline{OB}, \quad \alpha + \beta = 1.$$

$$\alpha > 0, \quad \beta > 0$$

РЕШЕНИЕ

По условию $\beta = 1 - \alpha$. Учитывая, что $\overline{OM} = \alpha\overline{OA} + \beta\overline{OB}$, имеем

$\overline{OM} = \alpha\overline{OA} + (1-\alpha)\,\overline{OB}$, или

$\overline{OM} - \overline{OB} = \alpha\overline{OA} - \alpha\overline{OB}$, или

$\overline{BM} = \alpha\overline{BA}$, где (по условию)

$0 < \alpha < 1$

Значит, искомое множество — множество концов вектора вида $\alpha \cdot \overline{BA}$ Это будет отрезок AB, исключая его концы.

Задача 3

Даны две пересекающиеся в точке О прямые ОА и ОВ. Найдите множество точек M, для которых

$$\overline{OM} = \alpha\overline{OA} + \beta\overline{OB},$$

$$\alpha \cdot \beta > 0 \text{ (рис. 12.1)}$$

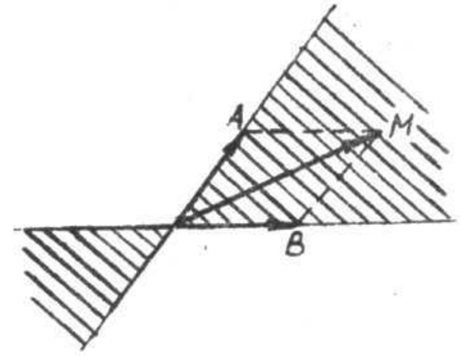


Рис 12.1

РЕШЕНИЕ

Представленная в условии формула $\overline{OM} = \alpha\,\overline{OA} + \beta\,\overline{OB}$ есть формула разложения вектора $\overline{OM}$ по векторам $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$. Учитывая, что $\alpha \cdot \beta > 0$ делаем вывод, что искомым множеством точек M являются точки внутри угла AOB и вертикального с ним угла, причем прямые OA и OB не принадлежат этому множеству.

Задача 4

Найдите множество точек M, для которых

$$\overline{OM} = \overline{OA} + k\bar{a}$$

где O и A — данные точки, $\bar{a}$ — данный ненулевой вектор, причем

1) $k \geqslant 0$, 2) $k > 0$, 3) $-1 \leqslant k \leqslant 1$, 4) $-\infty < k < \infty$

РЕШЕНИЕ

По условию

$$\overline{OM} = \overline{OA} + k\bar{a}, \text{ или } \overline{OM} - \overline{OA} = k\bar{a}$$

или $\overline{AM} = k\bar{a}$, значит множество точек М совпадает с множеством концов векторов вида $k\bar{a}$. А это значит, что если

1) $k \geqslant 0$, то искомым множеством будет луч, сонаправленый $\bar{a}$ с началом в точке A

2) $k > 0$ открытый луч

3) $|k| \leqslant 1$, отрезок длиной 2

4) $-\infty < k < \infty$ — прямая, параллельная вектору $\bar{a}$ и проходящая через т. A.

Задача 5

Найдите множество точек M, для которых

$$\overline{OM} = k\overline{OA} + l\overline{OB}$$

где $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$ — данные неколлинеарные векторы, O — данная точка, причем

1) $\begin{cases}0\leqslant k\leqslant 1\\0\leqslant l\leqslant 1\end{cases}$ 2) $\begin{cases}k\geqslant 0\\l\geqslant 0\end{cases}$ 3) $l\geqslant 0,\quad k=0$ 4) $-\infty<k<\infty,\quad l=0$

РЕШЕНИЕ

Заданная в условии формула

$$\overline{OM}=k\overline{OA}+l\overline{OB}$$

представляет разложение вектора $\overline{OM}$ по двум неколлинеарным векторам $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$, поэтому искомым множеством будет:

1) параллелограмм, построенный на векторах $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$ при $0\leqslant k\leqslant 1;\ 0\leqslant l\leqslant 1$

2) угол AOB и точки внутри него при $k\geqslant 0,\quad l\geqslant 0$

3) луч OB при $l\geqslant 0$ и $k=0$

4) прямая OA при $-\infty<k<\infty$ и $l=0$

Задача 6

Найдите множество M, для которых

$$\overline{OM}=k\overline{OA}+l\overline{a}$$

где O и A — данные точки, $\overline{a}$ — данный вектор, причем $-1\leqslant k\leqslant 1$, $-\infty<l<\infty$ (векторы $\overline{a}$ и $\overline{OA}$ неколлинеарны)

РЕШЕНИЕ

Если вектор $\overline{OM}$ разложить по векторам $\overline{OA}$ и $\overline{a}$, то множеством точек M будет полоса, границей которой являются две симметричные относительные точки O прямые, параллельные направлению данного вектора (рис. 12.2), причем одна из них содержит точку A.

Задача 7

Даны отрезок AB и точка O, не принадлежащая прямой AB. Найдите множество точек M, для которых

$$\overline{OM}=l\,(k\overline{OA}+(1-k)\,\overline{OB}),\ (\text{рис. } 12.3)$$

причем $0\leqslant k\leqslant 1,\quad 1\leqslant l\leqslant 2$

РЕШЕНИЕ

Рассмотрим выражение

$$\overline{OM}=k\overline{OA}+(1-k)\,\overline{OB}\quad(0\leqslant k\leqslant 1)$$

Поскольку $k+(1-k)=1$, то в этом случае по задаче 2 искомым множеством является отрезок AB. Если же $\overline{OM}=l\overline{t}$, где $\overline{t}=k\overline{OA}+(1-k)\,\overline{OB}$ и $1\leqslant l\leqslant 2$, то искомым множеством будет трапеция AA_1B_1B в которой

$$|\overline{OA_1}|:|\overline{OA}|=|\overline{OB_1}|:|\overline{OB}|=2:1.$$

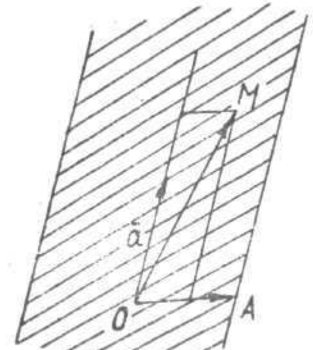


Рис. 12.2

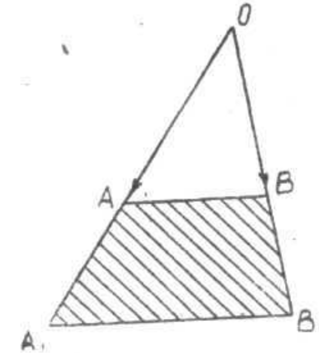


Рис. 12.3

Задача 8

Даны треугольник ABC и некоторая точка O. Найдите множество всех точек M, для которых

$$\overline{OM}=\alpha\overline{OA}+\beta\overline{OB}+\gamma\overline{OC},\quad \alpha+\beta+\gamma=1.$$

РЕШЕНИЕ

Преобразуем заданное равенство

$$\overline{OM}=\alpha\overline{OA}+\beta\overline{OB}+\overline{OC}\,(1-\alpha-\beta)$$

$$\overline{OM}-\overline{OC}=\alpha\,(\overline{OA}-\overline{OC})+\beta\,(\overline{OB}-\overline{OC}),\ \text{или}$$

$$\overline{CM}=\alpha\overline{CA}+\beta\overline{CB}$$

т. е. искомым множеством точек M будет плоскость треугольника ABC.

Задача 9

Даны точки A, O и отрезок BC, причем точка A не принадлежит отрезку BC. Найдите множество всех точек M, для которых

$$\overline{AM}=\overline{OA}+\overline{OD}$$

где O — данная точка, а D — любая точка отрезка BC. (рис. 12.4)

РЕШЕНИЕ

Для любой точки D отрезка BC перенесем параллельно вектор $\overline{OD}$ в точку A. Получим вектор $\overline{AD_1}$. Ввиду того, что искомое множество точек M совпадает с множеством точек D_1, и что при параллельном переносе равные отрезки переходят в равные, находим ответ — отрезок B_1C_1, полученный в результате параллельного переноса отрезка BC на вектор $\overline{OA}$.

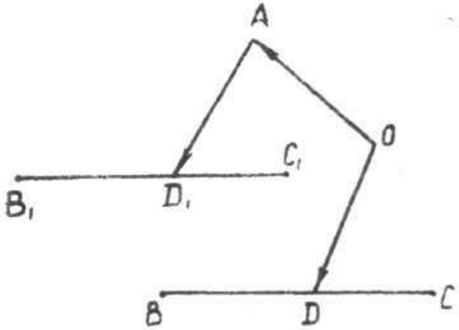


Рис. 12.4

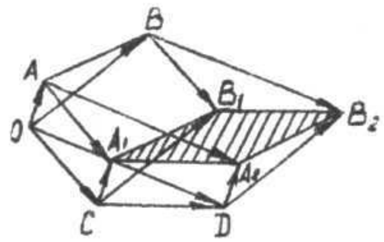


Рис. 12.5

Задача 10

Даны два отрезка AB и CD и точка O. Найдите множество всех точек M, для которых

$$\overline{OM} = \overline{OP} + \overline{OQ},$$

где $P \in [AB]$, $Q \in [CD]$.

РЕШЕНИЕ

Согласно предыдущей задаче, для любой точки X отрезка CD множеством искомых точек M является отрезок AB, перенесенный на вектор $\overline{OX}$. При этом множество образов точки C будет отрезок A_1B_1, полученный перенесением отрезка AB на вектор $\overline{OC}$ (рис. 12.5). Чтобы найти искомое множество M, необходимо от каждой точки A_1B_1 отложить вектор $\overline{CQ}$. Нетрудно видеть, что множеством точек является множество точек параллелограмма, вершинами которого являются образы точек А и В при переносах векторов $\overline{OC}$ и $\overline{OD}$.

Задача 11 (Ск. IV, 15.158)

Найти множество точек M, для которых $MA^2 + MB^2 = 2MC^2$, где ABC — прямоугольный треугольник с прямым углом C.

РЕШЕНИЕ

Поскольку

$$\overline{MA} = \overline{MC} + \overline{CA}$$

$$\overline{MB} = \overline{MC} + \overline{CB}, \text{ (рис. 12.6)},$$

то

$$2\overline{MC}^2 = (\overline{MC} + \overline{CA})^2 + (\overline{MC} + \overline{CB})^2$$

Отсюда $2\overline{MC}\,(\overline{CA} + \overline{CB}) + \overline{CA}^2 + \overline{CB}^2 = 0$. Если M_1 — середина гипотенузы, то $\overline{CA}^2 + \overline{CB}^2 = 4\overline{CM}_1^2$

поэтому последнее равенство принимает вид

$$\overline{MC} \cdot \overline{CM}_1 + \overline{CM}_1^2 = 0,$$

или

$$\overline{CM}_1\,(\overline{MC} + \overline{CM}_1) = 0$$

Окончательно

$$\overline{CM}_1 \cdot \overline{MM}_1 = 0$$

Итак, геометрическое место точек M есть прямая, проходящая через середину M_1 гипотенузы AB перпендикулярно к медиане CM_1.

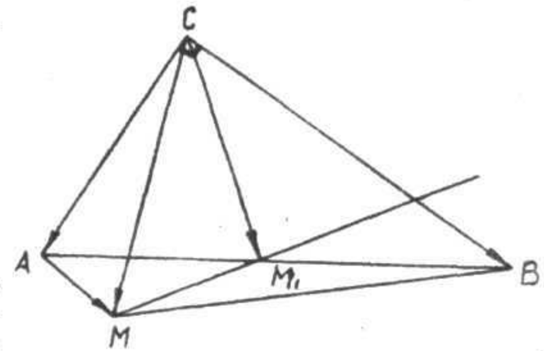


Рис. 12.6

Задача 12 (Ск. IV, 15.168)

Даны две различные точки А и В. Найти множество таких точек M, что $MA^2 + MB^2 = d^2$, $d \neq 0$

РЕШЕНИЕ

Пусть X — произвольная точка. Тогда, учитывая условие, имеем

$$(\overline{XA} - \overline{XM})^2 + (\overline{XB} - \overline{XM})^2 = d^2, \text{ или}$$

$$2\overline{XM}^2 - 2\overline{XM}\,(\overline{XA} + \overline{XB}) = d^2 - \overline{XA}^2 - \overline{XB}^2,$$

откуда

$$\left(\overline{XM} - \frac{\overline{XA} + \overline{XB}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\,(2d^2 - (\overline{XA} - \overline{XB})^2)$$

$$(\overline{XM} - \overline{XM}_1)^2 = \frac{1}{4}\,(2d^2 - (\overline{XA} - \overline{XB})^2),$$

где M_1 — середина AB. $MM_1^2 = \frac{1}{4}\,(2d^2 - AB^2)$

Если $d^2 > \frac{1}{2}\,AB^2$ то искомое геометрическое место точек представляет собой окружность радиуса $\frac{1}{2}\sqrt{2d^2 - AB^2}$ с центром в середине отрезка AB.

Если $d^2 = \frac{1}{2}\,AB^2$, то геометрическое место точек — одна точка — середина отрезка AB.

Если $d^2 < \frac{1}{2}\,AB^2$, то геометрическое место точек не существует.

Задача 13

Найти множество точек M, для которых разность квадратов расстояний до двух различных точек A и B постоянна и равна k^2.

РЕШЕНИЕ

Пусть X — некоторый полюс. По условию

$$\overline{MA}^2 - \overline{MB}^2 = k^2, \text{ или}$$

$$(\overline{XA} - \overline{XM})^2 - (\overline{XB} - \overline{XM})^2 = k^2, \text{ или}$$

$2(\overline{XB} - \overline{XA})\,\overline{XM} = k^2 - \overline{XA}^2 - \overline{XB}^2 = \text{const}$, итак $\overline{AB} \cdot \overline{XM} = \text{const}$. Разложим вектор $\overline{XM}$ на два составляющих $\overline{XX_0} \,||\, \overline{AB}$ и $\overline{X_0M} \perp \overline{AB}$ (рис. 12.7). $\overline{AB} \cdot (\overline{XX_0} + \overline{X_0M}) = \text{const}$. $\overline{AB} \cdot \overline{XX_0} = \text{const}$, т. е. точка M соответствует любому вектору $\overline{X_0M}$, перпендикулярному $\overline{AB}$.

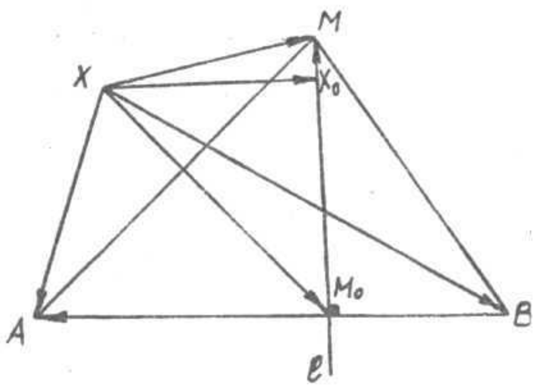


Рис. 12.7

Итак, искомое геометрическое место точек на плоскости — прямая l, перпендикулярная отрезку AB (рис. 12.7).

Найдем точку M_0 пересечения прямой l и прямой AB.

Обозначим

$$\alpha = \frac{\overline{BM_0}}{\overline{BA}}$$

Тогда

$$\begin{cases} \overline{XM_0} = \alpha\,\overline{XA} + (1-\alpha)\,\overline{XB} \\ 2(\overline{XB} - \overline{XA})\,\overline{XM_0} = k^2 - \overline{XA}^2 - \overline{XB}^2 \end{cases}$$

Подставляя $\overline{XM_0}$ из первого равенства во второе, получим после преобразований

$$\alpha = \frac{2XB^2 + AB^2 - k^2}{2AB^2}$$

Если полюс выбрать в точке B, то

$$\alpha = \frac{AB^2 - k^2}{2AB^2}, \quad \overline{AM_0} = \frac{AB^2 + k^2}{2AB^2} \cdot \overline{AB}$$

Задача 14

Найти множество точек M, для которых отношение расстояний до двух данных точек A и B постоянно и равно k.

РЕШЕНИЕ

Согласно условию задачи

$$|\overline{MA}| : |\overline{MB}| = k$$

Пусть X — произвольная точка. Тогда

$$(\overline{XA} - \overline{XM})^2 = k^2 * (\overline{XB} - \overline{XM})^2, \text{ или}$$

$$(1-k^2)\,XM^2 - 2(\overline{XA} - k^2\overline{XB})\,\overline{XM} = k^2\overline{XB}^2 - \overline{XA}^2, \text{ или}$$

$$\left(\overline{XM} - \frac{\overline{XA} - k^2\overline{XB}}{1-k^2}\right)^2 = \frac{k^2\overline{XB}^2 - \overline{XA}^2}{1-k^2} + \frac{(\overline{XA} - k^2\overline{XB})^2}{(1-k^2)^2}$$

Если $k^2 \neq 1$, то искомое геометрическое место точек M представляет окружность (она называется окружностью Аполлония) (рис. 12.8)

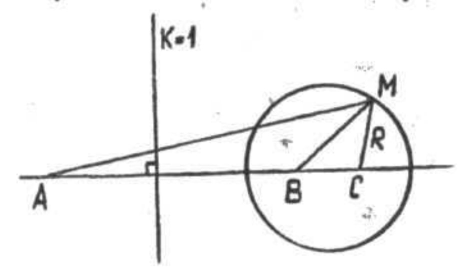


Рис 12.8

Центр окружности Аполлония определяется так:

$$\overline{XC} = \frac{\overline{XA} - k^2\overline{XB}}{1-k^2} \quad (k \neq 1)$$

Радиус этой окружности определяется формулой

$$R = \frac{k}{1-k^2}\,AB$$

Задача 15. (Ск. IV., 15.169)

Даны три различные точки A, B и C. Найти множество таких точек M, что $MA^2 + MB^2 + MC^2 = S$ где $S > 0$

РЕШЕНИЕ

Возьмем точки M и M_1, отличные от A, B, и C.

G — центроид треугольника ABC. Тогда

$$\overline{MC} = \overline{MG} + \overline{GC}$$
$$\overline{MA} = \overline{MG} + \overline{GA}$$
$$\overline{MB} = \overline{MG} + \overline{GB}$$

Учитывая, что $\overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC} = \overline{0}$, имеем

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GC^2 + GA^2 + GB^2$$

Аналогично

$$M_1A^2 + M_1B^2 + M_1C^2 = 3M_1G^2 + GC^2 + GA^2 + GB^2$$

Поскольку по условию $MA^2 + MB^2 + MC^2 = M_1A^2 + M_1B^2 + M_1C^2$, то $MG = M_1G$ и искомым множеством является окружность с центром в точке G, радиус которой:

$$MG = \sqrt{\frac{S - (GA^2 + GB^2 + GC^2)}{3}}$$

Задача 16 (Ск. IV., 15.166)

Даны две различные точки A и B. Найти множество таких точек, M, что $\overline{MA}\cdot\overline{MB}=k^2$, где k — данное число, отличное от нуля.

РЕШЕНИЕ

Данное равенство $\overline{MA}\cdot\overline{MB}=k^2$ можно записать так: $(\overline{XA}-\overline{XM})(\overline{XB}-\overline{XM})=k^2$, где X — произвольная точка пространства. Последнее равенство преобразуем

$$\overline{XA}\cdot\overline{XB}-(\overline{XA}+\overline{XB})\cdot\overline{XM}+\overline{XM}^2=k^2,$$

Если за полюс принять O — середину отрезка AB, и $|\overline{OA}|$ обозначить R, то $\overline{OA}+\overline{OB}=\overline{0}$ и $\overline{OA}\cdot\overline{OB}=-R^2$ Таким образом, данное

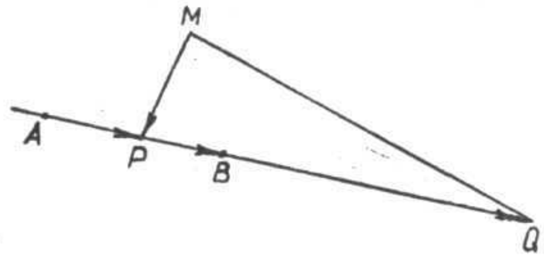


Рис. 12.9

равенство приводится к виду $|OM|^2=k^2+R^2$. Отсюда следует, что искомое множество точек представляет собой сферу радиуса $\sqrt{k^2+R^2}$.

Задача 17 (Ск. IV., 15.167)

Даны две различные точки A и B. Найти множество таких точек M, что $MA^2=k^2MB^2$, $k\neq 0$

РЕШЕНИЕ

На прямой AB возьмем точки P и Q, (рис. 12.9) причем

$$\frac{\overline{AQ}}{\overline{BQ}}=k,\quad \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}=k$$

Тогда

$$\overline{MQ}=\frac{k\overline{MB}-\overline{MA}}{k-1},\quad \overline{MP}=\frac{1}{k+1}\overline{MA}+\frac{k}{k+1}\overline{MB}$$

$$MQ^2+MP^2=$$

$$=\frac{(2MA^2-2k\overline{MB}\cdot\overline{MA})(k+1)^2+(k-1)^2(2\overline{MA}^2+2k\overline{MA}\cdot MB)}{(k^2-1)^2}=$$

$$=\frac{4MA^2(k^2+1)-8k^2\overline{MA}\cdot\overline{MB}}{(k^2-1)^2}$$

Но

$$\overline{PQ}=\frac{k}{k-1}\overline{MB}-\frac{\overline{MA}}{k-1}-\frac{1}{k+1}\overline{MA}-\frac{k}{k+1}\overline{MB}=$$

$$=\frac{2k(\overline{MB}-\overline{MA})}{k^2-1};\quad PQ^2=\frac{4MA^2(k^2+1)-8k^2\overline{MA}\cdot\overline{MB}}{(k^2-1)^2}$$

т. е. $MQ^2+MP^2=PQ^2$, значит, точка M принадлежит окружности с диаметром PQ, где P и Q — точки, делящие отрезок AB в отношении k внешним и внутренним образом.

Задача 18.

Пусть $ABCD$ — произвольный прямоугольник. Найти множество точек M пространства, чтобы

1) $\overline{MA}\cdot\overline{MC}=\overline{MB}\cdot\overline{MD}$

2) $\overline{MA}^2+\overline{MC}^2=\overline{MB}^2+\overline{MD}^2$

РЕШЕНИЕ

Докажем, что для любой точки M пространства $\overline{MA}\cdot\overline{MC}=\overline{MB}\cdot\overline{MD}$ и $\overline{MA}^2+\overline{MC}^2=\overline{MB}^2+\overline{MD}^2$

Пусть O — точка пересечения диагоналей прямоугольника ABCD (рис. 12.10) Поскольку в прямоугольнике диагонали равны и точкой пересечения делятся пополам, то

$$|\overline{MA}-\overline{MC}|=|\overline{MB}-\overline{MD}| \quad (1)$$

$$\overline{MO}=\frac{1}{2}(\overline{MA}+\overline{MC})=\frac{1}{2}(\overline{MB}+\overline{MD}) \quad (2)$$

Из соотношения (2) имеем

$$\overline{MA}+\overline{MC}=\overline{MB}+\overline{MD} \quad (3)$$

Возведем в скалярный квадрат левые и правые части равенств (1) и (3)

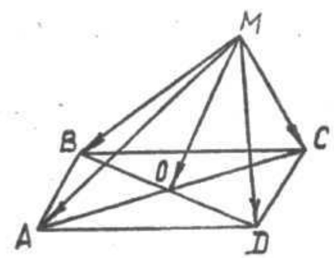


Рис 12.10

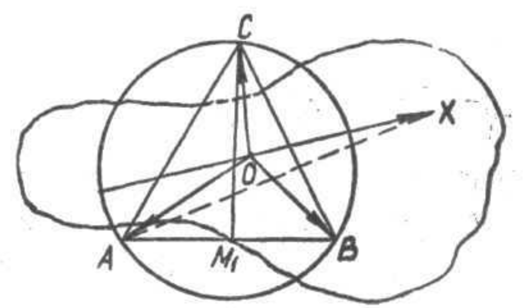


Рис.12 11

Получим

$$\overline{MA}^2 - 2\overline{MA}\cdot\overline{MC} + \overline{MC}^2 = \overline{MB}^2 - 2\overline{MB}\cdot\overline{MD} + \overline{MD}^2 \qquad (4)$$

$$\overline{MA}^2 + 2\overline{MA}\cdot\overline{MC} + \overline{MC}^2 = \overline{MB}^2 + 2\overline{MB}\cdot\overline{MD} + \overline{MD}^2 \qquad (5)$$

Вычитая и складывая равенства (4) и (5) имеем:

$$\overline{MA}\cdot\overline{MC} = \overline{MB}\cdot\overline{MD}$$

$$MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$$

Задача 19.

Дан треугольник ABC. Найти множество точек пространства X таких, что $XA^2 + XB^2 = 2XC^2$

РЕШЕНИЕ

Пусть O — центр окружности, описанной около треугольника ABC (рис. 12.11). Равенство, данное в условии, запишем так:

$$(\overline{OA} - \overline{OX})^2 + (\overline{OB} - \overline{OX})^2 = 2(\overline{OC} - \overline{OX})^2$$

или

$$-4\overline{OX}\cdot\overline{OC} + 2\overline{OX}\cdot\overline{OA} + 2\overline{OX}\cdot\overline{OB} = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 - 2\overline{OC}^2$$

Отсюда $\overline{OX}\cdot(\overline{OA} + \overline{OB} - 2\overline{OC}) = 0$

Учитывая формулу Гамильтона (11.1) и соотношения $3\overline{OM} = \overline{OH}$, получим $3\overline{OX}\ (\overline{OM} - \overline{OC}) = 0$. Значит, $\overline{OX}\cdot\overline{CM} = 0$, или $\overline{OX} \perp \overline{CM_1}$ где M_1 — середина отрезка AB. Итак, искомое множество есть плоскость, перпендикулярная к медиане треугольника, проведенной из вершины C и проходящая через центр O описанной около треугольника окружности.

Задача 20

Докажите, что множество всех точек X, для которых $\overline{OX}^2 - 2\bar{a}\cdot\overline{OX} + M = 0$, $\bar{a}^2 > M$, где $\bar{a}$ — данный вектор, O — данная точка, есть сфера.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Имеем $(\overline{OX} - \bar{a})^2 = \bar{a}^2 - M = R^2$

Если $\bar{a} = \overline{OP}$, то получаем сферу $\overline{PX}^2 = R^2$ с центром P радиуса R.

Задача 21

Докажите, что множество всех точек X, для которых $\bar{n}\cdot\overline{OX} = p$, где $\bar{n} \neq \bar{0}$ — данный вектор, p — данное число, O — данная точка, есть плоскость.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть $\bar{n}\cdot\overline{OX_1} = p$. Тогда $\bar{n}(\overline{OX_1} - \overline{OX}) = 0$, $\bar{n}\cdot\overline{XX_1} = 0$. Но множество всех таких точек X, что $\overline{X_1X} \perp \bar{n}$, есть плоскость, проходящая через X_1 перпендикулярно $\bar{n}$.

13. ФОРМУЛА РАДИУС — ВЕКТОРА

Пусть X — произвольная точка пространства. В треугольнике ABC возьмем на сторонах CA и CB соответственно точки B_1 и A_1, которые делят стороны в отношениях:

$$CB_1 : B_1A = p; \quad CA_1 : A_1B = q$$

Обозначим Y точку пересечения прямых AA_1 и BB_1. Тогда имеет место формула

$$\overline{XY} = \frac{p\overline{XA} + q\overline{XB} + \overline{XC}}{p + q + 1} \qquad (13.1)$$

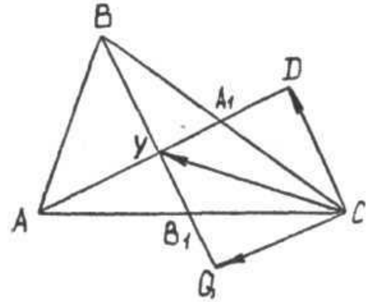


Рис. 13.1

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Рассмотрим векторы $\overline{CQ}$ и $\overline{CD}$, сонаправленные с векторами $\overline{YA}$ и $\overline{YB}$, причем

$$\overline{CY} = \overline{CQ} + \overline{CD} \quad \text{(рис. 13.1)}$$

Из подобия треугольников AYB_1, и CQB_1, BA_1Y и CA_1D, имеем

$$\overline{CY} = p\overline{YA} + q\overline{YB}$$

Поскольку $\overline{CY} = \overline{CX} + \overline{XY}$, то

$$p\overline{YA} + q\overline{YB} = \overline{CX} + \overline{XY}$$

Но $\overline{YA} = \overline{YX} + \overline{XA}$, $\overline{YB} = \overline{YX} + \overline{XB}$. Поэтому $p(\overline{YX} + \overline{XA}) + q(\overline{YX} + \overline{XB}) = \overline{CX} + \overline{XY}$, или

$$\overline{XY}(p + q + 1) = p\overline{XA} + q\overline{XB} + \overline{XC}.$$

Итак, формула (13.1) доказана. Покажем применение этой формулы.

Задача 1.

Доказать, что в треугольнике ABC

1) медианы AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке;

2) если X — произвольная точка пространства, а M — точка пересечения медиан, то

$$\overline{XM} = \frac{1}{3}(\overline{XA} + \overline{XB} + \overline{XC}) \qquad (1)$$

$$3)\ \overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = \bar{0} \qquad (2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

1) Допустим, что медианы AA_1 и BB_1 пересекаются в точке M_1, а медианы AA_1 и CC_1 в точке M_2. Для данного случая найдем значения p и q:

$$p = CB_1 : B_1A = 1$$
$$q = CA_1 : A_1B = 1$$

Подставим эти значения в формулу (13.1) и учитывая, что $AC_1 : C_1B = 1$, получим

$$\overline{XM}_1 = \frac{\overline{XA}+\overline{XB}+\overline{XC}}{3}$$

и

$$\overline{XM}_2 = \frac{\overline{XA}+\overline{XB}+\overline{XC}}{3}$$

Значит, $\overline{XM}_1 = \overline{XM}_2$, т. е. точки M_1 и M_2 совпадают.

2) Пусть в формуле (13.1) $Y \equiv M$. Поскольку MA_1, MB_1, MC_1 — отрезки медиан, то $p = q = 1$. Тогда

$$\overline{XM} = \frac{1}{3}(\overline{XA}+\overline{XB}+\overline{XC})$$

3) Положим в формуле (13.1) $X \equiv M \equiv Y$. Тогда $\overline{XM} = \bar{0}$ и $\overline{MA}+\overline{MB}+\overline{MC} = \bar{0}$.

Задача 2.

Доказать, что в треугольнике ABC

1) высоты пересекаются в одной точке H;

2) $\overline{HA}\operatorname{tg}A + \overline{HB}\operatorname{tg}B + \overline{HC}\operatorname{tg}C = \bar{0}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

1) Допустим, что высоты $\overline{AA_1}$ и $\overline{BB_1}$ пересекаются в точке H_1, а высоты AA_1 и CC_1 в точке H_2. Из треугольников ABB_1 и CBB_1 имеем:

$$\operatorname{tg}A = \frac{BB_1}{B_1A}, \quad \operatorname{tg}C = \frac{BB_1}{B_1C}$$

Из треугольников BAA_1 и CAA_1 запишем, что

$$\operatorname{tg}B = \frac{AA_1}{A_1B}, \quad \operatorname{tg}C = \frac{AA_1}{A_1C}$$

Теперь можно ввести обозначения:

$$p = CB_1 : B_1A = \operatorname{tg}A : \operatorname{tg}C,$$
$$q = CA_1 : A_1B = \operatorname{tg}B : \operatorname{tg}C$$

Пусть X — произвольная точка пространства. Тогда по формуле (13.1)

$$\overline{XH}_1 = \frac{\overline{XA}\operatorname{tg}A + \overline{XB}\operatorname{tg}B + \overline{XC}\operatorname{tg}C}{\operatorname{tg}A + \operatorname{tg}B + \operatorname{tg}C}$$

Рассмотрим высоты, которые пересекаются в точке H_2, и введем новые обозначения:

$$p = BC_1 : C_1A = \operatorname{tg}A : \operatorname{tg}B,$$
$$q = BA_1 : A_1C = \operatorname{tg}C : \operatorname{tg}B$$

Считая в формуле (13.1) $Y \equiv H_2$, запишем:

$$\overline{XH}_2 = \frac{\overline{XA}\operatorname{tg}A + \overline{XB}\operatorname{tg}B + \overline{XC}\operatorname{tg}C}{\operatorname{tg}A + \operatorname{tg}B + \operatorname{tg}C}$$

Итак, $\overline{XH}_1 = \overline{XH}_2$, т. е. $H_1 \equiv H_2 \equiv H$ и

$$\overline{XH} = \frac{\overline{XA}\operatorname{tg}A + \overline{XB}\operatorname{tg}B + \overline{XC}\operatorname{tg}C}{\operatorname{tg}A + \operatorname{tg}B + \operatorname{tg}C} \qquad (3)$$

2) Пусть $X \equiv H$. Тогда $\overline{XH} = \bar{0}$ и формула (3) будет иметь вид

$$\overline{HA}\operatorname{tg}A + \overline{HB}\operatorname{tg}B + \overline{HC}\operatorname{tg}C = \bar{0}$$

Задача 3

Доказать, что в тетраэдре $DABC$:

1) отрезки, которые соединяют вершины пирамиды с точками пересечения медиан противоположных граней, пересекаются в одной точке M;

2) если X — произвольная точка пространства, то

$$\overline{XM} = \frac{1}{4}(\overline{XA}+\overline{XB}+\overline{XC}+\overline{XD}) \qquad (4)$$

3) каждый из отрезков, которые соединяют вершины тетраэдра с точками пересечения медиан противоположных граней, делятся точкой M в отношении $3:1$, считая от вершины;

4) выполняется равенство:

$$\overline{MA}+\overline{MB}+\overline{MC}+\overline{MD} = \bar{0}$$

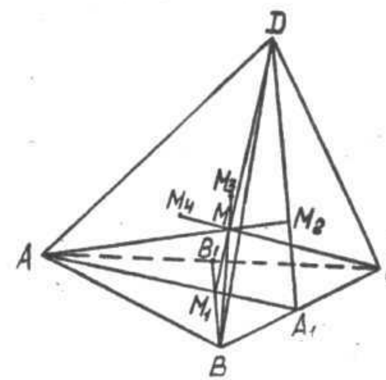


Рис 13.2

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

1) Обозначим точки пересечения медиан граней тетраэдра $DABC$ как M_1, M_2, M_3, M_4 (рис. 13.2) и допустим, что отрезки, которые соединяют вершины пирамиды с точками M_1, M_2, M_3, M_4 не пересекаются в одной точке.

Пусть отрезок DM_1 и отрезок AM_2 пересекаются в точке Q. Вводим обозначения: прямая AM_1 и отрезок BC пересекаются в точке A_1; прямая BM_1 и отрезок AC пересекаются в точке B_1. По свойству медиан AA_1 и DA_1 запишем, что

$$A_1M_1 : M_1A = 1:2 = p,$$
$$A_1M_2 : M_2D = 1:2 = q$$

Теперь по формуле ((3.1) для произвольной точки X пространства имеем

$$\overline{XQ} = \frac{\overline{XA_1} + \frac{1}{2}\overline{XA} + \frac{1}{2}\overline{XD}}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{1}{4}(\overline{XA} + \overline{XD} + 2\overline{XA_1}) =$$
$$= \frac{1}{4}(\overline{XA} + \overline{XB} + \overline{XC} + \overline{XD})$$

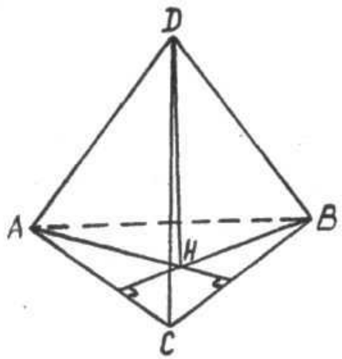


Рис 13.3

Обозначим теперь точку пересечения отрезков BM_3 и DM_1 как L. Тогда

$$\overline{XL} = \frac{\overline{XB_1} + \frac{1}{2}\overline{XB} + \frac{1}{2}\overline{XD}}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}$$

Это означает, что $\overline{XQ} = \overline{XL} = \overline{XM}$, т. е.

$$Q \equiv L \equiv M$$

Аналогично доказываем, что отрезок CM_4 пересекает отрезок BM_3 в точке M, отрезок DM_1 и отрезок CM_4 пересекаются в точке M, т. е. отрезки DM_1, BM_3, CM_4, AM_2 пересекаются в точке M.

2) Теперь очевидно, что

$$\overline{XM} = \frac{1}{4}(\overline{XA} + \overline{XB} + \overline{XC} + \overline{XD})$$

3) Пусть в формуле (4) точка X совпадает с M_1. Тогда

$$\overline{M_1M} = \frac{1}{4}(\overline{M_1A} + \overline{M_1B} + \overline{M_1C} + \overline{M_1D}) =$$
$$= \frac{1}{4}(\overline{M_1A} + \overline{M_1B} + \overline{M_1C}) + \frac{1}{4}\overline{M_1D} = \frac{1}{4}\overline{M_1D}$$

Итак, $\overline{DM} = 3\overline{MM_1}$

4) Пусть $X \equiv M$. Тогда $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} + \overline{MD} = \overline{0}$.

Задача 4

В тетраэдре $DABC$ плоские углы при вершине D прямые. Доказать, что отрезок, который соединяет вершину D с точкой пересечения высот основания ABC, есть высота пирамиды.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть в тетраэдре $DABC$ (рис. 13.3) точка H — ортоцентр треугольника ABC; a, b, c — длины его сторон. Пусть в формуле (3) X совпадает с D.
Тогда

$$\overline{DH} = \frac{\overline{DA}\,\mathrm{tg}\,A + \overline{DB}\,\mathrm{tg}\,B + \overline{DC}\,\mathrm{tg}\,C}{\mathrm{tg}\,A + \mathrm{tg}\,B + \mathrm{tg}\,C}$$

Но
$$DA^2 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} = bc\cos A$$

(докажите!)

$$DB^2 = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2} = ac\cos B \qquad (5)$$
$$DC^2 = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} = ab\cos C$$

$$\overline{DH}\cdot\overline{BC} = \overline{DH}(\overline{DC} - \overline{DB}) = \frac{1}{\mathrm{tg}\,A + \mathrm{tg}\,B + \mathrm{tg}\,C}(DC^2\,\mathrm{tg}\,C - DB^2\,\mathrm{tg}\,B).$$

Согласно равенствам (5), запишем

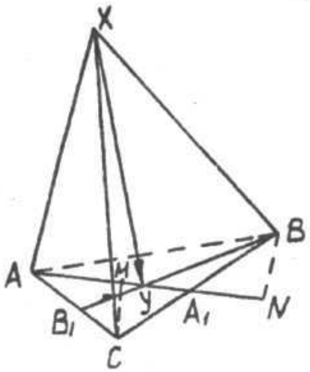
$$DC^2\,\mathrm{tg}\,C - DB^2\,\mathrm{tg}\,B = ab\cos C\,\mathrm{tg}\,C - ac\cos B\,\mathrm{tg}\,B =$$
$$= ab\sin C - ac\sin B = 2S_{ABC} - 2S_{ABC} = 0$$

Отсюда $\overline{DH}\cdot\overline{BC} = 0$, значит, отрезок DH перпендикулярен отрезку BC.

Аналогично докажем, что $\overline{DH}\cdot\overline{AC} = 0$, т. е. отрезок DH перпендикулярен к отрезку AC. Итак, прямая DH перпендикулярна к плоскости треугольника ABC.

14. ОБ ОДНОЙ ВЕКТОРНОЙ ФОРМУЛЕ ДЛЯ ТЕТРАЭДРА

Рассмотрим формулу, аналогичную формуле (13.1). Рассмотрим тетраэдр $XABC$ (рис. 14.1). Обозначим в треугольнике ABC на сторонах CA и CB точки B_1 и A_1 такие, что $CB_1 : B_1A = p$, $CA_1 : A_1B = q$. Точку пересечения отрезков AA_1 и BB_1 обозначим Y. Тогда



Рuc 14.1

$$\overline{XY} = \frac{S_1 \cdot \overline{XA} + S_2 \cdot \overline{XB} + S_3 \cdot \overline{XC}}{S_1 + S_2 + S_3} \qquad (14.1)$$

где S_1 — площадь треугольника CYB, S_2 — площадь треугольника AYC;

S_3 — площадь треугольника AYB.

Докажем формулу (14.1)

Из точек B и C проведем отрезки CM и BN, которые перпендикулярны прямой AA_1. Поскольку треугольники A_1NB и A_1MC подобны, то

$$q = CA_1 : A_1B = CM : BN$$

Треугольники AYB и AYC имеют общую сторону AY, поэтому их площади относятся как соответственные высоты, т. е.

$$\frac{S_2}{S_3} = \frac{CM}{BN} = q$$

Аналогично

$$\frac{S_1}{S_3} = p$$

Подставляя значения p и q в формулу (13.1) получаем формулу (14.1)

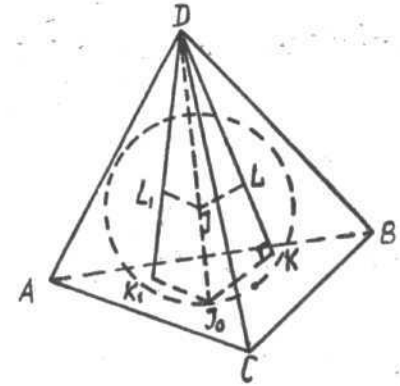
С помощью формулы (14.1) решим задачи.

Задача 1.

В тетраэдре $DABC$ точка I — центр вписанной сферы, I_0— точка пересечения прямой DI с плоскостью ABC. Доказать, что

$$II_0 = \frac{\overline{IA} \cdot S_1 + \overline{IB} \cdot S_2 + \overline{IC} \cdot S_3}{S_1 + S_2 + S_3},$$

где S_1, S_2, S_3 — площади граней BDC, DAC, DBA соответственно.



Рuc. 14.2

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

По формуле (14.1)

$$\overline{II_0} \cdot S_{ABC} = \overline{IA} \cdot S_{CI_0B} + \overline{IB} \cdot S_{AI_0C} + \overline{IC} \cdot S_{AI_0B} \qquad (1)$$

Из точки I_0 опустим перпендикуляры I_0K и I_0K_1 на грани BCD и ABD тетраэдра (рис. 14.2). Нетрудно показать, что эти перпендикуляры равны. Действительно, прямоугольные треугольники DIL и DIL_1, где L и L_1 — точки касания вписанной сферы к граням DBC и DAB, равны. Значит, $\angle KDI_0 = \angle K_1DI_0$. Отсюда $\triangle DI_0K = \triangle DI_0K_1$, значит, $I_0K = I_0K_1$.

Обозначим длину каждого перпендикуляра, проведенного из точки I_0 к грани как l, а высоту тетраэдра $DABC$, опущенную на грань ABC как h. Тогда

$$V_{DI_0BA} = \frac{1}{3} S_{I_0AB} \cdot h = \frac{1}{3} S_{DAB} \cdot l,$$

$$V_{DI_0BC} = \frac{1}{3} S_{I_0BC} \cdot h = \frac{1}{3} S_{DBC} \cdot l,$$

$$V_{DABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot h = \frac{1}{3} (S_{DAB} + S_{ACD} + S_{DCB})\, l.$$

Из этих формул получим:

$$S_{I_0AC} = S_{DAC} \cdot \frac{l}{h};$$

$$S_{I_0BA} = S_{DAB} \cdot \frac{l}{h};$$

$$S_{I_0BC} = S_{DBC} \cdot \frac{l}{h};$$

$$S_{ABC} = (S_{DAB} + S_{ACD} + S_{DCB}) \cdot \frac{l}{h}$$

Подставляя эти соотношения в (1), получим:

$$\overline{II_0} = \frac{\overline{IA} \cdot S_1 + \overline{IB} \cdot S_2 + \overline{IC} \cdot S_3}{S_1 + S_2 + S_3}$$

Задача 2.

Доказать, что в тетраэдре $DABC$ выполняется равенство

$$\overline{IA}\cdot S_1+\overline{IB}\cdot S_2+\overline{IC}\cdot S_3+\overline{ID}\cdot S_4=\overline{0},$$

где I — центр вписанной сферы;
S_1, S_2, S_3, S_4 — площади граней соответственно DBC, DAC, DAB и ABC.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть r — радиус вписанной в тетраэдр $DABC$ сферы, h — высота тетраэдра, проведенная к основанию ABC (рис. 14.3)

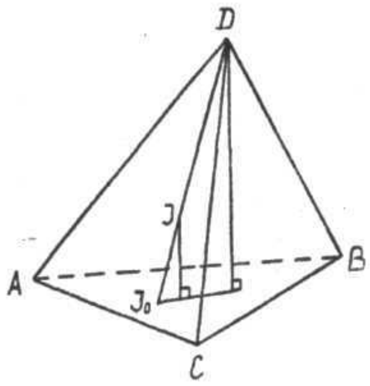


Рис 14.3

Тогда

$$\frac{DI_0}{II_0}=\frac{h}{r} \qquad (1),$$

где I_0 — точка пересечения прямой DI с плоскостью ABC.

Поскольку $r=\frac{3V}{S}$ (докажите!),

где $S=S_1+S_2+S_3+S_4$, а $3V=h\cdot S_4$, то

$$\frac{DI_0}{II_0}=\frac{DI+II_0}{II_0}=1+\frac{DI}{II_0} \qquad (2)$$

Сравним выражения (1) и (2). Поскольку векторы $\overline{II_0}$ и $\overline{DI}$ сонаправлены, то

$$\overline{II_0}=\overline{DI}\cdot\frac{S_4}{S_1+S_2+S_3}$$

Поскольку $\overline{II_0}=\dfrac{\overline{IA}\cdot S_1+\overline{IB}\cdot S_2+\overline{IC}\cdot S_3}{S_1+S_2+S_3}$, то

$$\overline{IA}\cdot S_1+\overline{IB}\cdot S_2+\overline{IC}\cdot S_3+\overline{ID}\cdot S_4=\overline{0}.$$

Задача 3.

В тетраэдре $DABC$ разложить вектор $\overline{DM}$ по векторам $\overline{DA}$, $\overline{DB}$ и $\overline{DC}$ (M — точка пересечения медиан треугольника ABC).

РЕШЕНИЕ

Обозначим S_1, S_2, S_3, S — площади треугольников AMC, BMC, AMB, ABC. Поскольку $S_1=S_2=S_3=\frac{1}{3}S$, то по формуле (14.1)

$$\overline{DM}\cdot S=\overline{DA}\cdot\frac{1}{3}S+\overline{DB}\cdot\frac{1}{3}S+\overline{DC}\cdot\frac{1}{3}S,$$

откуда

$$\overline{DM}=\frac{1}{3}(\overline{DA}+\overline{DB}+\overline{DC})$$

Задача 4

Разложить вектор $\overline{DI}$ по векторам $\overline{DA}$, $\overline{DB}$ и $\overline{DC}$ (I — центр окружности, вписанной в треугольник ABC)

РЕШЕНИЕ

Обозначим S_a, S_b, S_c — площади треугольников IBC, IAC, IAB. Пусть r — радиус окружности, вписанной в треугольник ABC, p — полупериметр треугольника ABC.

Поскольку $S_a=\frac{1}{2}r\cdot a$; $Sb=\frac{1}{2}r\cdot b$, $Sc=\frac{1}{2}r\cdot c$, то по формуле (14.1)

$$\overline{DI}=\frac{a}{2p}\overline{DA}+\frac{b}{2p}\overline{Db}+\frac{c}{2p}\overline{DC}$$

Задача 5.

Разложить вектор $\overline{DO}$ по векторам $\overline{DA}$, $\overline{DB}$, $\overline{DC}$ (O — центр описанной около треугольника ABC окружности).

РЕШЕНИЕ

Поскольку O — центр описанной около треугольника ABC окружности, R — радиус этой окружности, то площади треугольников AOC, BOC, AOB равны соответственно

$$\frac{1}{2}R^2\sin 2B;\quad \frac{1}{2}R^2\sin 2A;\quad \frac{1}{2}R^2\sin 2C,$$

а площадь треугольника ABC равна $2R^2\sin A\sin B\sin C$. Тогда по формуле (14.1)

$$\overline{DO}\cdot 2R^2\sin A\sin B\sin C=\overline{DA}\cdot\frac{1}{2}R^2\sin 2A+\overline{DB}\times$$

$$\times\frac{1}{2}R^2\sin 2B+\overline{DC}\cdot\frac{1}{2}R^2\sin 2C$$

Откуда

$$\overline{DO}=\frac{\cos A}{2\sin B\sin C}\overline{DA}+\frac{\cos B}{2\sin A\sin C}\overline{DB}+\frac{\cos C}{2\sin B\sin A}\overline{DC}$$

Задача 6. Основание тетраэдра $DABC$ — равносторонний треугольник ABC, X — произвольная точка внутри этого треугольника, S — его площадь; X_1, X_2, X_3 — расстояние от точки X соответственно до сторон $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ треугольника. Доказать, что

1) $\overline{DX}=\dfrac{\overline{X}_1\overline{DA}+\overline{X}_2\overline{DB}+\overline{X}_3\overline{DC}}{\overline{X}_1+\overline{X}_2+\overline{X}_3}$

2) $\sqrt[4]{3S^2}\cdot\overline{DX}=\overline{X}_1^2\overline{DA}+\overline{X}_2\overline{DB}+\overline{X}_3\overline{DC}$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

1) Пусть a — длина стороны треугольника ABC. Тогда

$$S_{BXC} = \frac{1}{2} x_1 \cdot a$$

$$S_{AXC} = \frac{1}{2} x_2 a, \quad S_{AXB} = \frac{1}{2} x_3 a,$$

$$S = \frac{1}{2} a (x_1 + x_2 + x_3)$$

Таким образом, $\overline{DX} = \frac{x_1\overline{DA} + x_2\overline{DB} + x_3\overline{DC}}{x_1 + x_2 + x_3}$

2) Поскольку $x_1 + x_2 + x_3 = h$ (h — высота треугольника ABC) и $h = \sqrt[4]{3S^2}$, то задача доказана.

15. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ ПОВОРОТА ВЕКТОРА НА 90°

Возьмем некоторый вектор $\bar{a}$ и повернем его на 90° против часовой стрелки. Получим вектор $\bar{b}$, который обозначим через $i\bar{a}$. Множитель i показывает действие поворота.

Обратим внимание на такие свойства поворота вектора на 90°

1) $|i\bar{a}| = |\bar{a}|$;
2) $i(\bar{a} + \bar{b}) = i\bar{a} + i\bar{b}$;
3) $i\bar{0} = \bar{0}$;
4) $i(i\bar{a}) = -\bar{a}$.

Проанализируем два типа задач: на доказательство векторных равенств и на доказательство перпендикулярности прямых или отрезков.

Рассмотрим задачи первого типа.

Пусть, например, требуется доказать, что для векторов $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ и чисел k, l, m существует соотношение.

$$k\bar{x} + l\bar{y} + m\bar{z} = \bar{0} \tag{1}$$

Найдем, если это возможно, такие три вектора $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, при повороте на 90° коллинеарные одному из векторов, для которого справедливо равенство (1).

Например, вектор $i\bar{a}$ коллинеарен вектору $\bar{x}$. Кроме того, существует некоторая зависимость, например $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = \bar{0}$. Следовательно, $i\bar{a} = \alpha\bar{x}$, $i\bar{b} = p\bar{y}$, $i\bar{c} = \gamma\bar{z}$

По свойству 1)

$$\alpha = \frac{|i\bar{a}|}{|\bar{x}|} = \frac{|\bar{a}|}{|\bar{x}|}$$

Аналогично,

$$\beta = \frac{|\bar{b}|}{|\bar{p}|}, \quad \gamma = \frac{|\bar{c}|}{|\bar{z}|}$$

По свойствам 2 и 3

$$i\bar{a} + i\bar{b} + i\bar{c} = \alpha\bar{x} + \beta\bar{y} + \gamma\bar{z} = \bar{0}$$

Если $\alpha = k$, $\beta = l$, $\gamma = m$, то равенство (1) доказано.

Задача 1.

Доказать, что в непрямоугольном треугольнике ABC:

1) $\operatorname{tg} A \cdot \overline{AH} + \operatorname{tg} B \cdot \overline{BH} + \operatorname{tg} C \cdot \overline{CH} = \bar{0}$, где A, B, C — углы треугольника, H — точка пересечения высот.

2) $\operatorname{tg} A \cdot \overline{AH} = \operatorname{ctg} C \cdot \overline{AB} + \operatorname{ctg} B \cdot \overline{AC}$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

1) В треугольнике ABC

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = \bar{0}$$

Повернем векторы $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ на 90° (рис. 15.1). Получим векторы $i\overline{AB}$, $i\overline{BC}$, $i\overline{CA}$. Вектор $i\overline{BC}$ коллинеарен вектору $\overline{AH}$, значит, $i\overline{BC} = \alpha\overline{AH}$. Таким образом, $\alpha = \frac{|i\overline{BC}|}{|\overline{AH}|} = \frac{|\overline{BC}|}{|\overline{AH}|}$ (свойство 1).

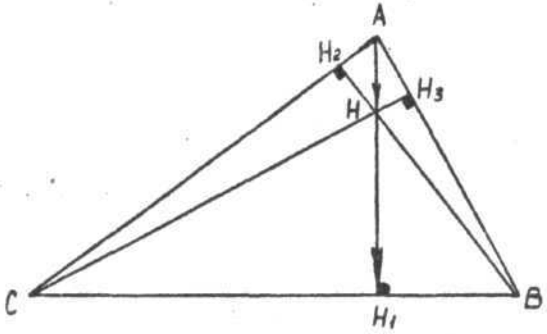


Рис. 15.1

Докажем, что $\frac{|\overline{BC}|}{|\overline{AH}|} = \operatorname{tg} A$

Действительно, обозначив через R радиус описанной около треугольника ABC окружности, H_1, H_2, H_3 — основания высот, проведенных из вершин A, B, C, получим:

$$AH = \frac{AH_3}{\sin B} = \frac{AC\cos A}{\sin B} = \frac{2R\sin B\cdot\cos A}{\sin B} = 2R\cdot\cos A$$

Поскольку $BC = 2R\sin A$, то $\frac{BC}{AH} = \frac{2R\sin A}{2R\cos A} = \operatorname{tg} A$

Следовательно

$$\operatorname{tg} A \cdot \overline{AH} = i\overline{BC}$$

Аналогично $i\overline{AB} = \operatorname{tg} C \cdot \overline{CH}$, $i\overline{AC} = \operatorname{tg} B \cdot \overline{BH}$. По свойству (2)

$$i\overline{AB} + i\overline{BC} + i\overline{CA} = \bar{0}.$$

Следовательно

$$\operatorname{tg} A \cdot \overline{AH} + \operatorname{tg} B \cdot \overline{BH} + \operatorname{tg} C \cdot \overline{CH} = \bar{0}$$

2) Имеем $\overline{BC} = \overline{BH} + \overline{HC}$. Повернем векторы $\overline{BC}$, $\overline{BH}$, $\overline{HC}$ на 90°. Получим векторы $i\overline{BC}$, $i\overline{BH}$, $i\overline{HC}$, коллинеарные векторам $\overline{AH}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$. Из предыдущей задачи известно, что $i\overline{BC} =$

$= \operatorname{tg} A \cdot \overline{AH}$. Вектор $i\overline{BH} = \operatorname{ctg} B \cdot \overline{AC}$. Аналогично, $i\overline{HC} = \operatorname{ctg} C \cdot \overline{AB}$. Поскольку $i\overline{BC} = i\overline{BH} + i\overline{HC}$, то

$$\operatorname{tg} A \cdot \overline{AH} = \operatorname{ctg} C \cdot \overline{AB} + \operatorname{ctg} B \cdot \overline{AC}$$

Задача 2.

В треугольнике ABC точка I — центр вписанной окружности K_1, K_2, K_3 — точки касания этой окружности со сторонами треугольника. Доказать, что $BC \cdot \overline{IK_1} + AC \cdot \overline{IK_2} + AB \cdot \overline{IK_3} = \bar{0}$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Повернем векторы $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{AB}$ $\overline{AC}$ на (—90°) (рис. 15.2). Вектор $i\overline{BC}$ будет коллинеарен вектору $\overline{IK_1}: i\overline{BC} = \alpha\overline{IK_1}$. Откуда $\alpha =$

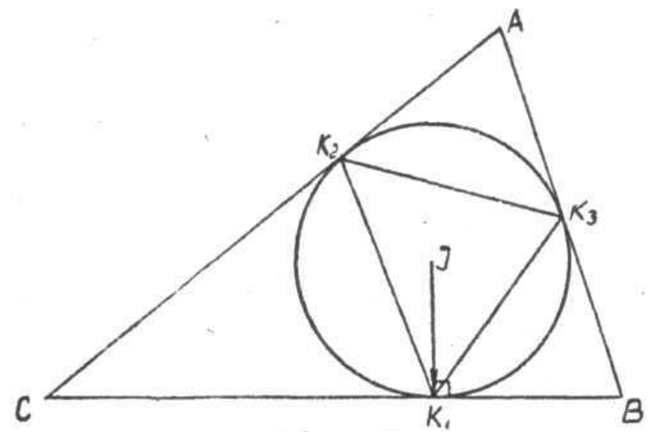


Рис 15.2

$= \frac{|\overline{BC}|}{|\overline{IK_1}|} = \frac{BC}{r}$, где r — радиус вписанной в треугольник ABC окружности. Следовательно,

$$i\overline{BC} = \frac{BC\cdot\overline{IK_1}}{r}$$

Аналогично $i\overline{AC} = \frac{AC\cdot\overline{IK_2}}{r}$, $i\overline{AB} = \frac{AB\cdot\overline{IK_3}}{r}$

Теперь воспользовавшись равенством (2), получим:

$$BC \cdot \overline{IK_1} + AC \cdot \overline{IK_2} + AB \cdot \overline{IK_3} = \bar{0}$$

Задача 3.

A, B, C — углы треугольника ABC; O — центр описанной окружности. Доказать, что

$$\overline{OA}\sin 2A + \overline{OB}\sin 2B + \overline{OC}\sin 2C = \bar{0}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Рассмотрим треугольник $H_1H_2H_3$, где H_1, H_2, H_3 — основания высот остроугольного треугольника ABC (рис. 15.3).

Имеем:

$$\overline{H_1H_2} + \overline{H_2H_3} + \overline{H_3H_1} = \bar{0}$$

Повернем эти векторы на 90°. Поскольку радиус $OA = R$ перпендикулярен к отрезку H_2H_3 (докажите!), то $i\overline{H_2H_3} = \alpha\overline{OA}$, т. е. $\alpha = \frac{H_2H_3}{OA}$. Но $H_2H_3 = AH \sin A = R \sin 2A$, т. е.

$$\alpha = \sin 2A,\ i\overline{H_2H_3} = \sin 2A \cdot \overline{OA}$$

Аналогично

$$i\overline{H_3H_1} = \sin 2B \cdot \overline{OB},\ i\overline{H_1H_2} = \sin 2C \cdot \overline{OC}$$

Следовательно,

$$\overline{OA} \cdot \sin 2A + \overline{OB} \cdot \sin 2B + \overline{OC} \sin 2C = \bar{0}$$

Задача 4.

Многоугольник $A_1A_2 \ldots A_n$ касается вписанной окружности в точках K_1, K_2, K_3, ..., K_n. O — центр окружности, a_1, a_2, a_3, ..., a_n — длины сторон, A_1, A_2, A_3, ..., A_n — величины внутренних углов. Доказать, что

1) $a_1\overline{OK}_1 + a_2\overline{OK}_2 + a_3\overline{OK}_3 + \cdots + a_n\overline{OK}_n = \bar{0}$;
2) $\overline{OA}_1 \sin A_1 + \overline{OA}_2 \sin A_2 + \cdots + \overline{OA}_n \cdot \sin A_n = \bar{0}$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

1) Обозначим $\overline{A_1A_2} = \bar{a}_1$, $\overline{A_2A_3} = \bar{a}_2$, ..., $\overline{A_nA_1} = \bar{a}_n$ (рис. 15.4). Повернем векторы $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, ..., $\bar{a}_n$ на 90°. Получим векторы $i\bar{a}_1$, $i\bar{a}_2$, ..., $i\bar{a}_n$. Эти векторы коллинеарны векторам $\overline{OK}_1$, $\overline{OK}_2$, ..., $\overline{OK}_n$. Имеем $i\bar{a}_1 = \alpha\overline{OK}_1$, т. е. $\alpha = \frac{|\bar{a}_1|}{|\overline{OK}_1|} = \frac{a_1}{r}$ (r — радиус окружности), следовательно, $i\bar{a}_1 = \frac{a_1 \cdot \overline{OK}_1}{r}$

Аналогично

$$i\bar{a}_2 = \frac{a_2\overline{OK}_2}{r},\ \ldots,\ i\bar{a}_n = \frac{a_n \cdot \overline{OK}_n}{r}.$$

Так как

$$i\bar{a}_1 + i\bar{a}_2 + \cdots + i\bar{a}_n = \bar{0}$$

то

$$a_1\overline{OK}_1 + a_2\overline{OK}_2 + a_3\overline{OK}_3 + \cdots + a_n\overline{OK}_n = \bar{0}.$$

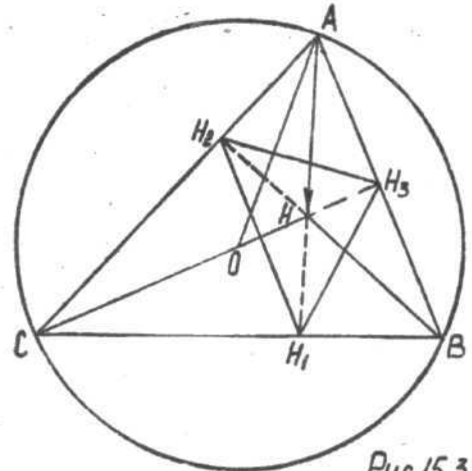


Рис. 15.3

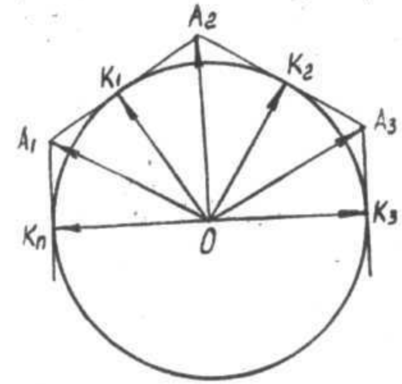


Рис 15.4

2) Очевидно, что отрезок $\overline{K_nK_1}$ перпендикулярен отрезку OA_1. Повернем векторы $\overline{K_1K_2}$, ..., $\overline{K_nK_1}$ на 90°. Вектор $i\overline{K_nK_1}$ коллинеарный вектору $\overline{OA}_1$, т. е. $i\overline{K_nK_1} = \alpha\overline{OA}_1$

$$\alpha = \frac{K_nK_1}{OA_1} = \sin A_1;\ i\overline{K_nK_1} = \sin A_1 \cdot \overline{OA}_1$$

Следовательно,

$$\overline{OA}_1 \cdot \sin A_1 + \overline{OA}_2 \cdot \sin A_2 + \cdots + \overline{OA}_n \sin A_n = \bar{0}$$

Рассмотрим теперь задачи второго типа. Отметим, что нужно выбрать, если это возможно, такие отрезки a и b, чтобы поворот вектора на 90° давал возможность записать равенство $\bar{a} = i\bar{b}$, причем по свойству 1) $\alpha = \frac{|\bar{a}|}{|\bar{b}|}$.

Это дает возможность воспользоваться свойствами (1—4), а также другими векторными соотношениями.

Задача 5.

Дан равнобедренный прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90°$), Стороны BC, CA, AB ориентированы и поделены точками A_1, B_1, C_1 в равных отношениях. Доказать, что отрезки A_1B_1 и CC_1 перпендикулярны и равны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Из рис. 15.5 имеем:

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{m}{n}$$

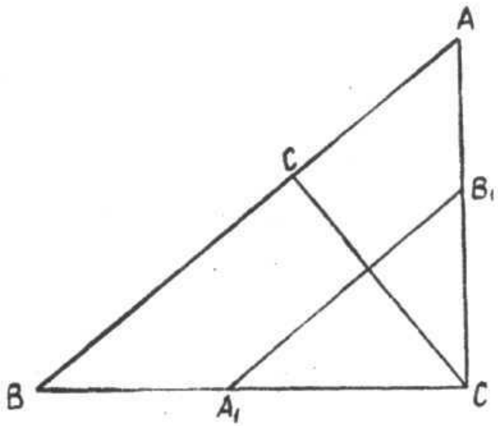


Рис 15.5

Тогда

$$\overline{CC_1} = \frac{n}{m+n}\overline{CA} + \frac{m}{m+n}\overline{CB},$$

$$\overline{A_1B_1} = \frac{m}{m+n}\overline{CA} + \frac{n}{m+n}\overline{BC}.$$

Но

$$i\overline{CA} = CB, \quad i\overline{CB} = \overline{AC},$$

$$i\overline{CC_1} = i\frac{n}{m+n}\overline{CA} + i\frac{m}{m+n}\overline{CB} =$$

$$= \frac{n}{m+n} i\overline{CA} + \frac{m}{m+n} i\overline{CB} = \frac{n}{m+n}\overline{CB} + \frac{m}{m+n}\overline{AC} = \overline{B_1A_1}$$

то есть

$$i\overline{CC_1} = \overline{B_1A_1}$$

а это значит, что отрезки CC_1 и A_1B_1 перпендикулярны и равны.

Задача 6.

В плоскости треугольника ABC дана точка P. От этой точки отложены векторы $\overline{PA_1}$, $\overline{PB_1}$, $\overline{PC_1}$, полученные соответственно из векторов $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ поворотом их на 90°. Доказать, что точка P есть точка пересечения медиан треугольника $A_1B_1C_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

В треугольнике ABC $\overline{BC} + \overline{CA} + \overline{AB} = \bar{0}$. Повернем эти векторы на 90°. Тогда по условию

$$i\overline{BC} = \overline{PA_1}, \; i\overline{CA} = \overline{PB_1}, \; i\overline{AB} = \overline{PC_1}$$

Следовательно

$$\overline{PA_1} + \overline{PB_1} + \overline{PC_1} = i\overline{BC} + i\overline{CA} + i\overline{AB} = i(\overline{BC} + \overline{CA} + \overline{AB}) = \bar{0}$$

А это значит, что точка P есть точка пересечения медиан треугольника $A_1B_1C_1$

Задача 7.

На сторонах AB и BC треугольника ABC извне построены квадраты $ABMN$ и $BCQP$. Доказать, что центры этих квадратов и середины отрезков CA и MP образуют квадрат.

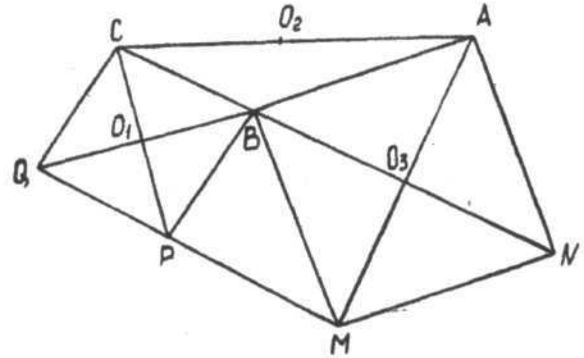


Рис. 15.6

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Обозначим центры квадратов O_1 и O_3, середины отрезков CA, MP соответственно через O_2 и O_4: $\overline{BC} = \bar{a}$, $\overline{BA} = \bar{b}$ (рис. 15.6).

Докажем что векторы $\overline{O_1O_2}$ и $\overline{O_2O_3}$ равны и перпендикулярны. Действительно,

$$\overline{O_1O_2} = \overline{BO_2} - \overline{BO_1} = \frac{1}{2}(\bar{a} + \bar{b}) - \overline{BO_1},$$

$$\overline{BO_1} = \frac{1}{2}(\overline{BC} + \overline{BP}) = \frac{1}{2}(\bar{a} + i\bar{a}) = \frac{1}{2}\bar{a} + \frac{1}{2} i\bar{a},$$

$$\overline{O_1O_2} = \frac{1}{2}\bar{a} + \frac{1}{2}\bar{b} - \frac{1}{2}\bar{a} - \frac{1}{2} i\bar{a},$$

$$\overline{O_2O_3} = \overline{BO_3} - \overline{BO_2} = \frac{1}{2}\bar{b} - \frac{1}{2} i\bar{b} - \frac{1}{2}\bar{a} - \frac{1}{2}\bar{b} =$$

$$= -\frac{1}{2} i\bar{b} - \frac{1}{2}\bar{a},$$

$$i\overline{O_2O_3} = i\left(-\frac{1}{2} i\bar{b} - \frac{1}{2}\bar{a}\right) = -\frac{1}{2} i\bar{a} + \frac{1}{2}\bar{b}$$

Следовательно,

$$\overline{O_1O_2} = i\overline{O_2O_3}$$

Аналогично можно доказать, что $\overline{O_4O_1} = i\,\overline{O_4O_3}$, а это значит, что $O_1O_2O_3O_4$ — квадрат.

Задача 8.

В четырехугольнике $ABCD$ (рис. 15.7) O — точка пересечения диагоналей, H_1, H_2 — ортоцентры треугольников BOA и COD. Доказать, что отрезок H_1H_2 перпендикулярен отрезку G_1G_2 (G_1 и G_2 — точки пересечения медиан $\triangle COB$ и $\triangle DOA$).

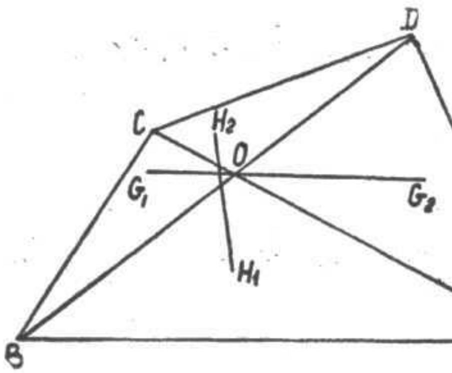


Рис. 15.7

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Обозначим $\angle AOB = \angle COD = \varphi$, $\overline{BA} = \bar{a}$, $\overline{CD} = \bar{b}$.

Тогда

$$OH_1 = AB \cdot \operatorname{ctg}\varphi,\ OH_2 = CD \cdot \operatorname{ctg}\varphi$$

Поскольку

$$\overline{OH}_1 = i\bar{a}\operatorname{ctg}\varphi,\ \overline{OH}_2 = -i\bar{b}\operatorname{ctg}\varphi \text{ и}$$

$$\overline{H_2H}_1 = \overline{OH}_1 - \overline{OH}_2,$$

то

$$\overline{H_2H}_1 = i\bar{a}\operatorname{ctg}\varphi + i\bar{b}\operatorname{ctg}\varphi = i(\bar{a} + \bar{b})\operatorname{ctg}\varphi$$

Далее

$$\overline{OG}_1 = \frac{1}{3}(\overline{OB} + \overline{OC}),$$

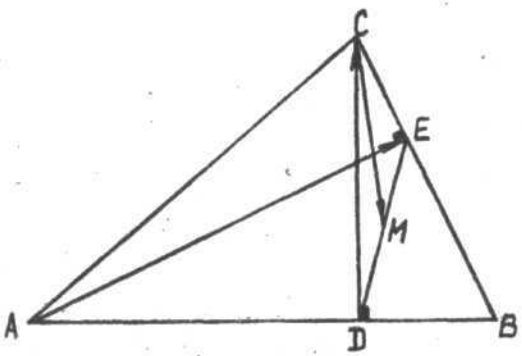


Рис. 15.8

$$\overline{OG}_2 = \frac{1}{3}(\overline{OA} + \overline{OD}),$$

$$\overline{G_1G}_2 = \overline{OG}_2 - \overline{OG}_1 = \frac{1}{3}(\overline{OA} + \overline{OD} - \overline{OB} - \overline{OC}) = \frac{1}{3}(\overline{BA} + \overline{CD}) = \frac{1}{3}(\bar{a} + \bar{b}),$$

т. е. отрезки $\overline{H_2H}_1$ и $\overline{G_2G}_1$ перпендикулярны.

Задача 9.

В равнобедренном треугольнике ABC ($AC = CB$) проведена высота CD и перпендикуляр DE (точка E принадлежит стороне BC). Точка M — середина отрезка DE. Доказать, что отрезки AE и CM перпендикулярны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Из подобия треугольников DEC и BDC (рис. 15.8) получим $\frac{DE}{CE} = \frac{DB}{CD} = k$

Следовательно,

$$\overline{ED} = ki\overline{EC},\ \overline{DA} = ki\overline{DC}$$

Поскольку

$$\overline{AE} = \overline{AD} + \overline{DE},$$

то

$$\overline{AE} = ki\overline{CD} + ki\overline{CE} = ki(\overline{CD} + \overline{CE})$$

Но

$$\frac{1}{2}(\overline{CD} + \overline{CE}) = \overline{CM}$$

Таким образом, $\overline{AE} = 2ki\overline{CM}$, т. е. отрезки EA и CM перпендикулярны.

16. ВЕКТОРНО-КООРДИНАТНЫЙ МЕТОД

Пара взаимно перпендикулярных единичных векторов $\bar{i}$, $\bar{j}$ образуют прямоугольный базис на плоскости. Для любого вектора $\bar{a}$ существует единственная пара чисел x, y таких, что

$$\bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j}$$

Числа x, y называют координатами вектора: $\bar{a} = (x; y)$.

Любой вектор в пространстве можно разложить по трем данным некомпланарным векторам.

Тройка взаимно перпендикулярных единичных векторов $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ образуют прямоугольный базис в пространстве. Для любого вектора $\bar{a}$ существует единственная тройка чисел x, y, z, таких что

$$\bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}.$$

Числа x, y, z называют координатами вектора:

$$\bar{a} = (x;\ y;\ z)$$

1. Известно, что если вектор $\bar{a}$ задается парой (A, B) и $A\ (x_1; y_1; z_1)$ $B\ (x_2;\ y_2;\ z_2)$, то вектор $\bar{a} = \overline{AB}$ имеет следующие прямоугольные координаты:

$$x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1$$

2. Координаты $(x;\ y;\ z)$ середины отрезка с концами $A_1\ (x_1; y_1; z_1)$ и $A_2\ (x_2;\ y_2;\ z_2)$ находятся по формулам

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y = \frac{y_1 + y_2}{2},\ z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

Пусть $\bar{a}\,(x_1;\ y_1;\ z_1)$; $\bar{b}\,(x_2;\ y_2;\ z_2)$

3. $\bar{a} \pm \bar{b} = (x_1 \pm x_2;\ y_2 \pm y_2;\ z_1 \pm z_2)$

4. $p\bar{a} = (px_1;\ py_1;\ pz_1)$

5. $|\bar{a}| \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$

6. Единичный вектор $\bar{e}$, сонаправленный с $\bar{a}$, находится по формуле $\bar{e} = \dfrac{\bar{a}}{|\bar{a}|}$.

7. Скалярное произведение векторов

$$\bar{a}\,(x_1;\ y_1;\ z_1),\ \ \bar{b}\,(x_2;\ y_2;\ z_2)$$

выражается формулой $\bar{a} \cdot \bar{b} = x_1x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$

8. Угол φ между векторами

$$\cos\varphi = \frac{\bar{a}\bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

9. Расстояние между двумя точками $A_1\ (x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $A_2\ (x_2;\ y_2;\ z_2)$ определяется по формуле

$$|\overline{A_1A_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

10. $|\bar{a}| = \sqrt{\bar{a}^2}$

11. Необходимое и достаточное условие перпендикулярности векторов $\bar{a}\ (x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $\bar{b}\ (x_2;\ y_2;\ z_2)$ имеет вид

$$\bar{a}\bar{b} = \bar{0} \ \text{ или } \ x_1 \cdot x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0 \qquad (11)$$

12. Уравнение плоскости, проходящей через точку $M\ (x_1;\ y_1;\ z_1)$ и перпендикулярной вектору $\bar{n} = (a;\ b;\ c)$ имеет вид

$$a\,(x - x_1) + b\,(y - y_1) + e\,(z - z_1) = 0.$$

13. Выразим через координатные орты $\bar{i}$ и $\bar{j}$ вектор $\overline{AB}$, если $A\ (x_1; y_1)$, $B\ (x_2, y_2)$.

Рассмотрим векторы $\overline{OA} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j}$ и $\overline{OB} = x_2\bar{i} + y_2\bar{j}$

$$\overline{AB} = \overline{AO} + \overline{OB}, \text{ или}$$

$$\overline{AB} = (x_2 - x_1)\,\bar{i} + (y_2 - y_1)\,\bar{j} \qquad (13)$$

Задача 1.

Найдите угол между векторами $\bar{a} + \bar{b}$ и $\bar{a} - \bar{b}$, если $\bar{a} = (0;\ -1; 2)$, $b = (2;\ 1;\ 2)$

РЕШЕНИЕ

Найдем координаты векторов $\bar{a} + \bar{b}$ и $\bar{a} - \bar{b}$: $\bar{a} + \bar{b} = (2;\ 0;\ 4)$, $\bar{a} - \bar{b} = (-2;\ -2;\ 0)$. Обозначим угол между векторами $\bar{a} + \bar{b}$ и $\bar{a} - \bar{b}$ как α. Тогда

$$\cos\alpha = \frac{2 \cdot (-2) + 0 \cdot (-2) + 4 \cdot 0}{\sqrt{4 + 0 + 16}\sqrt{4 + 4 + 0}} = -\frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\alpha = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$$

Задача 2

Даны векторы $\bar{p} = (0;\ -4;\ 3)$ и $\bar{q} = \left(\frac{1}{2};\ -\frac{1}{2};\ 1\right)$.

Найдите длину вектора $\bar{a} = 2\bar{p} - 4\bar{q}$.

РЕШЕНИЕ

$$2\bar{p} = (0;\ -8;\ 6); \quad 4\bar{q} = (2;\ -2;\ 4);$$

$$\bar{a} = (-2;\ -6;\ 2)$$

$$|\bar{a}| = \sqrt{(-2)^2 + (-6)^2 + 2^2} = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}.$$

Задача 3

Найдите вектор $\bar{c}$, коллинеарный вектору $\bar{a} = (2;\ 1;\ -1)$ и удовлетворяющий условию $\bar{c} \cdot \bar{a} = 3$

РЕШЕНИЕ

Обозначим координаты вектора $\bar{c}$ через x, y и z, т. е. $\bar{c} = (x;\ y;\ z)$. Из условия коллинеарности векторов $\bar{c}$ и $\bar{a}$ следует, что

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$$

Так как по условию $\bar{a} \cdot \bar{c} = 3$, то $2x + y - z = 3$

Решим полученную систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1} \\ 2x + y - z = 3 \end{cases}$$

Введем новую переменную t:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1} = t.$$

Тогда $x = 2t$, $y = t$, $z = -t$. Подставляя x, y и z во второе уравнение системы найдем t:

$$2 \cdot 2t + t + t = 3,$$

$$t = \frac{1}{2}$$

Значит,

$$x = 1,\ y = \frac{1}{2};\ z = -\frac{1}{2}.$$

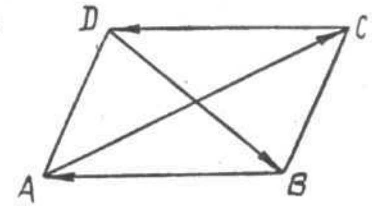
Задача 4.

Точки $A\ (1;\ 0;\ 2)$, $B\ (2;\ 1;\ 0)$ и $C\ (1;\ 2;\ 0)$ являются тремя последовательными вершинами параллелограмма. Найдите четвертую его вершину и угол между диагоналями.

РЕШЕНИЕ

Пусть координаты точки D будут x; y; z. Так как $ABCD$ — параллелограмм, то $\overline{BA} = \overline{CD}$ (рис. 16.1). Найдем координаты векторов $\overline{BA}$ и $\overline{CD}$.

$$\overline{BA} = (-1;\ -1;\ 2),\quad \overline{CD} = (x - 1;\ y - 2;\ z)$$



Так как векторы $\overline{BA}$ и $\overline{CD}$ равны, то равны их соответствующие координаты:

$$\begin{cases} x - 1 = -1 \\ y - 2 = -1 \\ z = 2 \end{cases}$$

Отсюда $x = 0$; $y = 1$; $z = 2$.

Значит, координаты $D\ (0;\ 1;\ 2)$

Найдем координаты векторов $\overline{AC}$ и $\overline{DB}$: $\overline{AC} = (0;\ 2;\ -2)$, $\overline{DB} = (2;\ 0;\ -2)$

Рис 16.1

$$\cos(\widehat{\overline{AC},\ \overline{DB}}) = \frac{0 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + (-2)(-2)}{\sqrt{0+4+4}\sqrt{4+0+4}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Итак,

$$\widehat{\overline{AC},\ \overline{DB}} = 60°.$$

Задача 5. (Ск. V, 17.109)

Найти вектор $\bar{b}$, коллинеарный вектору $a = (2\sqrt{2};\ -1;\ 4)$, если $|\bar{b}| = 10$

РЕШЕНИЕ

Пусть $\bar{b} = p\bar{a}$. Тогда $\bar{b} = (2p\sqrt{2};\ -p;\ 4p)$ и

$$|\bar{b}| = \sqrt{8p^2 + p^2 + 16p^2} = 5|p|$$

Но $|\bar{b}| = 10$, поэтому $|p| = 2$, и $\bar{b} = (\pm 4\sqrt{2};\ \mp 2;\ \pm 8)$

Задача 6 (Ск. V, 17.108)

Даны два вектора $\overline{OA}\ (-1;\ 2)$ и $\overline{OB}\ (-4;\ -2)$, где O — начало координат. Найти длину отрезка AB, площадь треугольника OAB и длину медианы OM. (рис. 16.2)

РЕШЕНИЕ

$$\overline{OM} = \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OB}) = \frac{1}{2}(-5;\ 0) = (-2{,}5;\ 0)$$

$$|\overline{OM}| = 2{,}5$$

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = (-3;\ -4)$$

$$|\overline{AB}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,\ |\overline{OA}| = \sqrt{5};\ |\overline{OB}| = 2\sqrt{5}$$

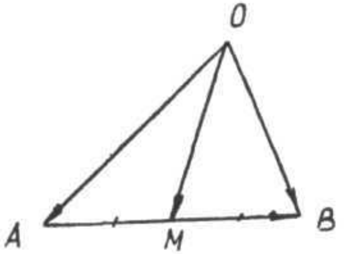


Рис. 16.2

Пусть φ — угол между векторами $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$. Тогда

$$\cos\varphi = \frac{\overline{OA}\cdot\overline{OB}}{|\overline{OA}|\cdot|\overline{OB}|} = \frac{4-4}{\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{5}} = 0$$

следовательно, $\varphi = 90°$.

$$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}OA\cdot OB = 5 \text{ (кв. ед).}$$

Задача 7. (Ск. V, 17.107)

Даны векторы $\overline{a}$ (3; 2; 2) и $\overline{b}$ (18;—22;—5). Найти вектор $\overline{x}$, если он перпендикулярен векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$, образует с осью Oy тупой угол, а его длина равна 14.

РЕШЕНИЕ

Обозначим координаты вектора $\overline{x}$ как $\overline{x}$ $(t; y; z)$. Учитывая условие, имеем

$$\begin{cases} 3t+2y+2z=0 \\ 18t-22y-5z=0 \\ t^2+y^2+z^2=14^2 \\ y<0 \end{cases}$$

Отсюда, $x = -4$, $y = -6$, $z = 12$

Итак, $\overline{x}$ (—4; —6; 12)

Задача 8. (Ск. V, 17.106)

Даны векторы $\overline{a}$ (2; —1; 3); $\overline{b}$ (1; —3; 2); $\overline{c}$ (3; 2; —4). Найти вектор $\overline{x}$, если $\overline{x}\overline{a} = -5$, $\overline{x}\overline{b} = -11$, $\overline{x}\cdot\overline{c} = 20$.

РЕШЕНИЕ

Пусть $\overline{x}$ (t, y, z). Учитывая условие,

$$\begin{cases} 2t-y+3z=-5 \\ t-3y+2z=-11 \\ 3t+2y-4z=20 \end{cases}$$

Отсюда $t = 2$; $y = 3$; $z = -2$

$$\overline{x}\,(2;\ 3;\ -2)$$

Задача 9. (Ск. V, 17.104)

На плоскости заданы точки A (—6; —1); B (—4; —4) C (—1; —6), D (—3; —3). Доказать, что $ABCD$ — ромб и вычислить его площадь.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Найдем координаты векторов $\overline{AC}$ и $\overline{BD}$

$$\overline{AC}\,(5;\ -5);\quad \overline{BD}\,(1;\ 1)$$

Найдем координаты середины отрезков AC и BD:

$$x_1 = \frac{-1-6}{2} = -3{,}5,\ y_1 = \frac{-6-1}{2} = -3{,}5$$

$$x_2 = \frac{-4-3}{2} = -3{,}5,\ y_2 = \frac{-4-3}{2} = -3{,}5$$

Середины диагоналей совпадают

Поскольку $\overline{AC}\cdot\overline{BD} = 5-5 = 0$, то $\overline{AC}\perp\overline{BD}$ в четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются под прямым углом и делятся пополам. Значит, четырехугольник $ABCD$ — ромб.

$$|\overline{AC}| = \sqrt{25+25} = 5\sqrt{2},\ |\overline{BD}| = \sqrt{2}$$

$$S = \frac{1}{2}5\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 5 \text{ кв. ед.}$$

Задача 10. (Ск. V, 17.085)

Найти модуль проекции вектора $\overline{a}$ (7; —4) на ось, параллельную вектору $\overline{b}$ (—8; 6)

РЕШЕНИЕ

$$|\overline{a}| = \sqrt{49+16} = \sqrt{65}$$

$$\cos\varphi = \frac{-56-24}{\sqrt{65}\cdot\sqrt{100}} = -\frac{8}{\sqrt{65}}$$

Обозначим модуль проекции вектора $\overline{a}$ как $|\overline{a}'|$

$$|\overline{a}'| = ||\overline{a}|\cos\varphi| = \left|-\frac{8}{\sqrt{65}}\cdot\sqrt{65}\right| = 8.$$

Задача 11. (Ск. V, 17.083)

Даны вершины треугольника M (1; 1; 4), N (1; 4; 4) и K (3; 3; 2). Доказать, что $\overline{ON}\perp\overline{MK}$, где O — середина стороны MK. Определить вид треугольника MNK.

РЕШЕНИЕ

Найдем координаты точки O (x, y, z) (рис. 16.3)

$$x = \frac{1+3}{2} = 2;\quad y = 2;\quad z = 3$$

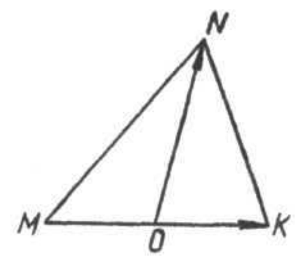


Рис 16.3

итак $O(2;\ 2;\ 3)$, $\overline{ON}(-1;\ 2;\ 1)$, $\overline{MK}(2;\ 2;\ -2)$

$$\overline{ON}\cdot\overline{MK} = -2+4-2=0,$$

значит, $\overline{ON}\perp\overline{MK}$.

Поскольку медиана NO перпендикулярна стороне MK, то треугольник MNK — равнобедренный.

Задача 12. (Ск. V, 17.080)

Даны векторы $\bar a\,(6;\ -8;\ 5\sqrt{2})$ и $\bar b\,(2;\ -4;\ \sqrt{2})$. Найти угол, образуемый вектором $\bar a-\bar b$ с осью OZ

РЕШЕНИЕ

$\bar a-\bar b=(4;\ -4;\ 4\sqrt{2})$. Пусть $(\widehat{\bar a-\bar b;\ \overline{Oz}})=\gamma$

Тогда

$$\cos\gamma=\frac{(\bar a-\bar b)\,\overline{Oz}}{|\bar a-\bar b|\cdot|\overline{OZ}|}=\frac{4\cdot\sqrt{2}\cdot4\sqrt{2}}{\sqrt{4^2+4^2+(4\sqrt{2})^2}\cdot\sqrt{4\sqrt{2}}}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2},\ \text{следовательно,}\ \gamma=\frac{\pi}{4}$$

Пусть $\bar c=\bar a-\bar b$; z — единичный вектор, направленный вдоль оси Oz. Тогда искомый угол $\gamma=(\widehat{c;\ z})$; $\bar c=(4;\ -4;\ 4\sqrt{2})$; $z=(0;\ 0;\ 1)$

Имеем:

$$\cos\gamma=\frac{c\cdot z}{|c|\cdot|z|}=\frac{4\cdot0-4\cdot0+4\sqrt{2}\cdot1}{\sqrt{4^2+4^2+(4\sqrt{2})^2}\,\sqrt{0+0+1}}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

следовательно, $\gamma=\frac{\pi}{4}$

Задача 13. (Ск. V, 17.078)

Даны вершины треугольника $A(-1;\ 1)$; $B(-5;\ 4)$ $C(7;\ 2)$. Найти скалярное произведение $\overline{AB}\cdot\overline{AC}$ и площадь треугольника.

РЕШЕНИЕ

Найдем координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$

$$\overline{AB}(-5-(-1);\ 4-1)=(-4;\ 3)$$

$$\overline{AC}(8;\ 1)$$

$$\overline{AB}\cdot\overline{AC}=-4\cdot8+3\cdot1=-29$$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin\angle BAC$$

$$\cos\angle BAC=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{|\overline{AB}||\overline{AC}|}=\frac{-29}{\sqrt{16+9}\cdot\sqrt{64+1}}=-\frac{29}{5\sqrt{65}}$$

$$\sin\angle BAC=\sqrt{1-\frac{29^2}{25\cdot65}}$$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{65}\cdot5\cdot\frac{28}{\sqrt{65}\cdot5}=14\ \text{кв. ед.}$$

Задача 14. (Ск. V, 17.072)

Даны два вектора: $\bar a\,(x;\ 1;\ -1)$ и $\bar b\,(1;\ 0;\ 1)$. При каком значении x справедливо равенство $(\bar a+3\bar b)^2=(\bar a-2\bar b)^2$?

РЕШЕНИЕ

$$\bar a+3\bar b=(3+x;\ 1;\ 2)$$

$$\bar a-2\bar b=(-2+x;\ 1-0;\ -3)$$

По условию $(\bar a+3\bar b)^2=(\bar a-2\bar b)^2$

или

$$(3+x)^2+1^2+2^2=(x-2)^2+1^2+3^2$$

Откуда $x=0$.

Задача 15. (Ск. V. 17.069)

Вектор $\overline{OA}$ составляет с осями O_x, O_y и O_z углы, соответственно равные $\alpha=\frac{\pi}{3}$; $\beta=\frac{\pi}{3}$; $\gamma=\frac{\pi}{4}$, точка B имеет координаты $(-2;\ -2;\ -2\sqrt{2})$.

Найти угол между векторами $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$.

РЕШЕНИЕ

Обозначим координаты вектора $\overline{OA}$ $(x,\ y,\ z)$. Пусть $\overline{OX}$, $\overline{OY}$, $\overline{OZ}$ — единичные векторы, направленные вдоль соответствующих осей. Тогда

$$\cos\alpha=\frac{\overline{OA}\cdot\overline{OX}}{|\overline{OA}|\cdot|\overline{OX}|}=\frac{1}{2}\tag{1}$$

$$\cos\beta=\frac{\overline{OA}\cdot\overline{OY}}{OA\cdot OY}=\frac{1}{2}\tag{2}$$

$$\cos\gamma=\frac{\overline{OA}\cdot\overline{OZ}}{OA\cdot OZ}=\frac{\sqrt{2}}{2}\tag{3}$$

Имеем систему

$$\begin{cases}2x=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\\ 2y=\sqrt{x^2+y^5+z^2}\\ \sqrt{2}\,z=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\end{cases}$$

откуда $x = y = 2$, $z = 2\sqrt{2}$. Итак, $\overline{OA} = (2;\ 2;\ 2\sqrt{2})$, $\overline{OB} = (-2;\ -2;\ -2\sqrt{2})$. Очевидно, что $\overrightarrow{OA} \uparrow\downarrow \overrightarrow{OB}$ и

$$\angle BOA = \pi$$

Задача 16. (Ск. V 17.067)

Дан вектор $\bar{a}$ (1; —2; 5). Найти координаты вектора $\bar{b}$, лежащего в плоскости xOy и перпендикулярного вектору $\bar{a}$, если $|\bar{b}| = 2\sqrt{5}$.

РЕШЕНИЕ

Поскольку вектор $\bar{b}$ лежит в плоскости XOY, то $\bar{b} = (x;\ y;\ 0)$.

$$\begin{cases} |\bar{b}| = \sqrt{x^2 + y^2 + 0} = 2\sqrt{5} \\ \bar{a} \cdot \bar{b} = \sqrt{1 \cdot x} - 2y + 5 \cdot 0 = 0 \end{cases}$$

отсюда $x = \pm 4$, $y = \pm 2$,

значит, $\bar{b} = (\pm 4;\ \pm 2;\ 0)$.

Задача 17. (Ск. V, 17.060)

Даны координаты вершин пирамиды: S (0; 0; 2), A (0; 0; 0), B (1; 0; 0), C (0; 1; 0). Найти координаты точки M, лежащей на оси OZ, и координаты точки N, лежащей в плоскости SBC, если известно, что $\overline{MN}\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ 0\right)$.

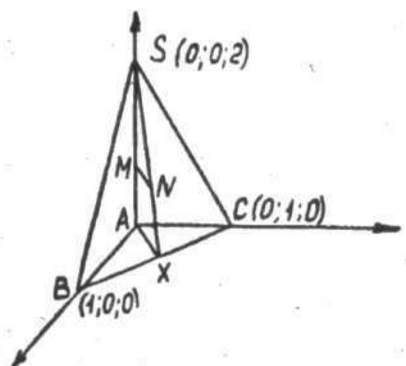


Рис 16.4

РЕШЕНИЕ

Пусть точки M и N имеют координаты

$$M(x_1;\ y_1;\ z_1); \quad N(x_2,\ y_2,\ z_2)$$

Тогда $\overline{MN}\ (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1)$ (рис. 16.4)

Учитывая условие, видим, что $x_1 = 0$, $y_1 = 0$ и $x_2 - x_1 = \frac{1}{3}$, $y_2 - y_1 = \frac{1}{3}$, $z_2 = z_1 = 0$ то $x_2 = \frac{1}{3}$, $y_2 = \frac{1}{3}$. Далее: $|\overline{MN}| = \sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$, $AX = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $(x \in BC;\ AX \perp BC)$

Из подобия треугольников SMN и SAX имеем

$$\frac{MN}{AX} = \frac{SM}{SA}, \text{ или } SM = \frac{4}{3}$$

Значит, $AM = \frac{6-4}{3} = \frac{2}{3}$, или $Z = \frac{2}{3}$ Итак, $M\left(0;\ 0;\ \frac{2}{3}\right)$ и $N\left(\frac{1}{3};\ \frac{1}{3};\ \frac{2}{3}\right)$.

Задача 18 (Ск. V, 17.053)

Даны координаты вершин четырехугольника A (—1; 2; 3), B (—1; 3; 1), C (—1; 7; 3), D (—1; 6; 5). Доказать, что $ABCD$ — прямоугольник.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

$$\overline{AB}\ (-1-(-1);\ 3-2,\ 1-3) = (0;\ 1;\ -2)$$
$$\overline{CD}\ (-1-(-1);\ 6-7;\ 6-3) = (0;\ -1;\ 3)$$
$$\overline{BC}\ (-1-(-1);\ 7-3,\ 3-1) = (0;\ 4;\ 2)$$
$$\overline{AD}\ (-1-(-1);\ 6-2;\ 5-3) = (0;\ 4;\ 2)$$

Поскольку $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ и $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ (координаты векторов пропорциональны), то четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм. Поскольку $\overline{AB} \cdot \overline{BC} = 0 + 4 - 4 = 0$, то $\overline{AB} \perp \overline{BC}$, и параллелограм $ABCD$ — прямоугольник

Задача 19 (Ск. V, 17.051)

Даны векторы $\bar{a}$ (2; —3; 5), $\bar{b}$ (—1; 1; —3) и $\bar{c}$ (3; 7; 1) Найти координаты вектора $\bar{p}$ $(x,\ y,\ z)$, если $\bar{p} \cdot \bar{a} = 12$, $\bar{p} \cdot \bar{b} = -6$ и $\bar{p} \perp \bar{c}$.

РЕШЕНИЕ

Если $\bar{a}\ (x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $\bar{b}\ (x_2,\ y_2,\ z_2)$, то $\bar{a} \cdot \bar{b} = (x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2)$

Учитывая условие, имеем

$$\begin{cases} 2x - 3y + 5z = 12 \\ -x + y = -3z = -6 \\ 3x + 7y + z = 0 \end{cases}$$

Решая систему, получим $x = 2$, $y = -1$, $z = 1$

Ответ: $\bar{p}$ (2; —1; 1)

Задача 20 (Ск. V, 17.038)

При каких значения x и y векторы $(x;\ -2;\ 5)$ и $(1;\ y;\ -4)$ коллинеарны?

РЕШЕНИЕ

$$\frac{x}{1} = \frac{-2}{y} = \frac{5}{-4} = k,$$

откуда $x = -\frac{5}{4}$; $y = \frac{8}{5}$.

Задача 21 (Ск. V, 12.300).

Найти косинус угла между непересекающимися диагоналями двух смежных боковых граней правильной треугольной призмы, у которой боковое ребро равно стороне основания.

7 4—1185

РЕШЕНИЕ

Пусть ребра AA и AB призмы $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 16.5) совпадают с осями Z и Y системы координат XOY

Тогда $\overline{OA_1}=(0;\ 0;\ a)$, $\overline{OB}\ (0;\ a;\ 0)$, $\overline{OC}\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};\ \frac{a}{2};\ 0\right)$ $\overline{OC_1}=\left(\frac{a\sqrt{3}}{2},\ \frac{a}{2},\ a\right)$, где a — сторона основания призмы.

$$\overline{C_1B}=\overline{OB}-\overline{OC_1}=\left(-\frac{a\sqrt{3}}{2};\ \frac{a}{2};\ -a\right)$$

$$\overline{A_1C}=\overline{OC}-\overline{OA_1}=\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};\ \frac{a}{2};\ -a\right)$$

Так как искомый $\cos\varphi=\cos(\widehat{\overline{A_1C},\overline{C_1B}})=\frac{\overline{A_1C}\cdot\overline{C_1B}}{|\overline{A_1C}|\cdot|\overline{C_1B}|}=$

$$=\frac{-\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}+\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}+a\cdot a}{\sqrt{\frac{3a^2}{4}+\frac{a^2}{4}+a^2}\sqrt{\frac{3a^2}{4}+\frac{a^2}{4}+a^2}}=\frac{a^2}{4a^2}=\frac{1}{4}$$

Задача 22.

Доказать, что если три ребра куба, выходящие из одной вершины, пересечь плоскостью, то в сечении получится треугольник, все углы которого острые.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть куб $AA_1BB_1CC_1DD_1$ пересечен плоскостью MNP, как предлагает условие задачи (рис. 16.6). Обозначим $\overline{AM}=\bar a$, $\overline{AN}=\bar b$, $\overline{AP}=\bar c$. Тогда $\overline{MP}=\bar c-\bar a$, $\overline{MN}=\bar b-\bar a$ Рассмотрим угол α между

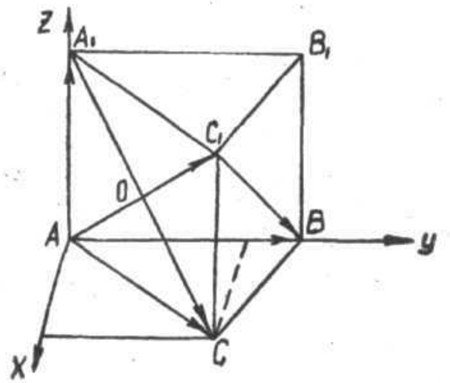


Рис 16.5

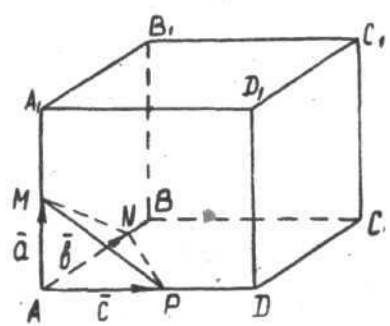


Рис 16 6

векторами $\bar b-\bar a$ и $\bar c-\bar a$

$$\cos\alpha=\frac{(\bar b-\bar a)(\bar c-\bar a)}{|\bar b-\bar a|\,|\bar c-\bar a|}$$

$(\bar b-\bar a)(\bar c-a)=\bar b\bar c-\bar a\bar c-\bar a\bar b+a^2=0-0-0+a^2>0$. Итак, $(\bar b-\bar a)(\bar c-\bar a)>0$, следовательно, $\cos\alpha>0$ и α — острый угол.

Задача 23.

Диагонали четырехугольника $ABCD$ перпендикулярны и равны. На его сторонах даны точки P, Q, R, S такие, что $\overline{AP}:\overline{PB}=\overline{BQ}:\overline{QC}=\overline{CR}:\ \overline{RD}=\overline{DS}:\overline{SA}$. Доказать перпендикулярность и равенство отрезков PR и QS.

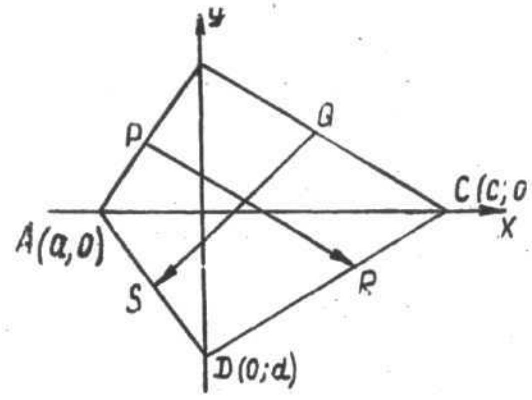


Рис. 16.7

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Рассмотрим прямоугольную систему координат: AC — ось абсцисс, DB — ось ординат (рис. 16.7) Пусть заданные отношения равняются $1:\lambda$. Далее, координаты точек $A\ (a;\ 0)$; $B\ (0;\ b)$; $C\ (c;\ 0)$; $D\ (0;\ d)$

Тогда

$$P\left(\frac{\lambda a}{1+\lambda};\ \frac{b}{1+\lambda}\right),\quad R\left(\frac{\lambda c}{1+\lambda};\ \frac{d}{1+\lambda}\right)$$

$$Q\left(\frac{c}{1+\lambda};\ \frac{\lambda b}{1+\lambda}\right),\quad S\left(\frac{a}{1+\lambda};\ \frac{\lambda d}{1+\lambda}\right)$$

$$\overline{PR}=\left(\frac{\lambda}{1+\lambda}(c-a);\ \frac{1}{1+\lambda}(d-b)\right)$$

$$\overline{QS}=\left(\frac{1}{1+\lambda}(a-c);\ \frac{\lambda}{1+\lambda}(d-b)\right)$$

Так как $AC=BD$, то $|a-c|=|b-d|$ Учитывая это, можно проверить, что $PR=QS$ и $\overline{PR}\cdot\overline{QS}=0$.

Задача 24.

В основании прямой треугольной призмы $ABC\ A_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ($AB=BC$), высота которого опущенная из вершины B, равна $\sqrt{3}$ см. На ребре BB_1 расположена точка P так, что угол A_1PC равен $\frac{\pi}{2}$, $A_1P=2\sqrt{2}$ см и $PC=\sqrt{5}$ см. Найти объем призмы.

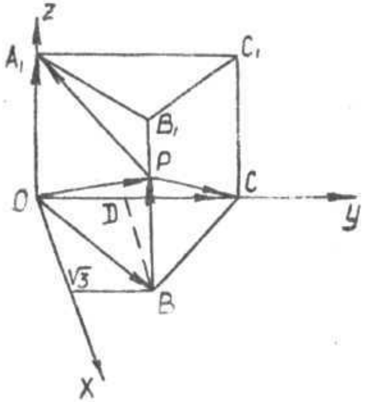


Рис 16.8

РЕШЕНИЕ

Построим прямоугольную систему координат как показало на рис. 16.8. Обозначим апликату вектора $\overline{OP}$ как Z_1 и апликату вектора $\overline{OA}_1$—Z_2. Пусть $AC = A_1C_1 = a$

Тогда $OB\left(\sqrt{3};\ \frac{a}{2};\ 0\right)$, $OA\ (0; 0; 0)$; $\overline{OA}_1\ (0;\ 0;\ z_2)$; $\overline{OC} = (0;\ a;\ 0)$; $\overline{OP} = \left(\sqrt{3};\ \frac{a}{2};\ z_1\right)$ Так как $\angle A_1PC = 90°$, то $\overline{A_1P}\cdot\overline{PC} = 0$ или $(\overline{OP} - \overline{OA}_1)(\overline{OC} - \overline{OP}) = 0$, или в координатной форме:

$$\left(\sqrt{3};\ \frac{a}{2};\ z_1 - z_2\right)\cdot\left(-\sqrt{3};\ \frac{a}{2};\ -z_1\right) = 0$$

Значит,

$$z_1^2 - z_1z_2 - \frac{a^2}{4} + 3 = 0 \qquad (1)$$

Так как $\overline{A_1C} = \overline{OC} - \overline{OA}_1 = (0;\ 0;\ -z_2)$, то $A_1C^2 = a^2 + z_2^2 = A_1P^2 + PC^2 = 13$ (по условию), значит,

$$a^2 = 12 - z_2^2 \qquad (2)$$

Подставим выражение (2) в (1), получим $4z_1^2 - 4z_1z_2 + z_2^2 - 1 = 0$ откуда $z_1 = \frac{z_1 \pm 1}{2}$ Но $\overline{PC} = \left(-\sqrt{3},\ \frac{a}{2},\ -z_1\right)$ и $|\overline{PC}| = \sqrt{5}$ следовательно, $|\overline{PC}|^2 = 3 + \frac{a^2}{4} + \frac{(z_2 \pm 1)}{4} = 5$ учитывая (2) имеем

$$12 + (13 - z_2^2)^2 + (z_2 \pm 1)^2 = 20, \quad z_2 = 3 \quad (z_2 > 0),$$

следовательно, $a^2 = 13 - 9 = 4$, $a = 2$ (см)

$$S_{ABC} = \frac{AC\cdot BD}{2} = \sqrt{3}\ (\text{см}^2), \quad OA_1 = 3 \text{ см}$$

$$V_{\text{призмы}} = OA_1\cdot S_{ABC} = 3\sqrt{3}\ (\text{см}^3).$$

17. ВЕКТОРЫ И НЕРАВЕНСТВА

Покажем применение векторов к доказательству неравенств. Заметим, что имеют место векторные неравенста:

$$\|\bar{a}| - |\bar{b}\| \leqslant |\bar{a} + \bar{b}| \leqslant |\bar{a}| + |\bar{b}| \qquad (1)$$
$$|\bar{a}\cdot\bar{b}| \leqslant |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|.$$

Задача 1

В треугольнике ABC

$$\cos A + \cos B + \cos C \leqslant \frac{3}{2}$$

Доказать.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Обозначим K_1, K_2, K_3 — точки касания вписанной окружности сторон BC, AC, AB, I — центр этой окружности. (рис. 17.1) Имеем

$$(\overline{IK}_1 + \overline{IK}_2 + \overline{IK}_3)^2 \geqslant 0$$

Пусть $|\overline{IK}_1| = 1$. Тогда $\overline{IK}_1^2 = 1$, $\overline{IK}_1\cdot\overline{IK}_2 = -\cos C$

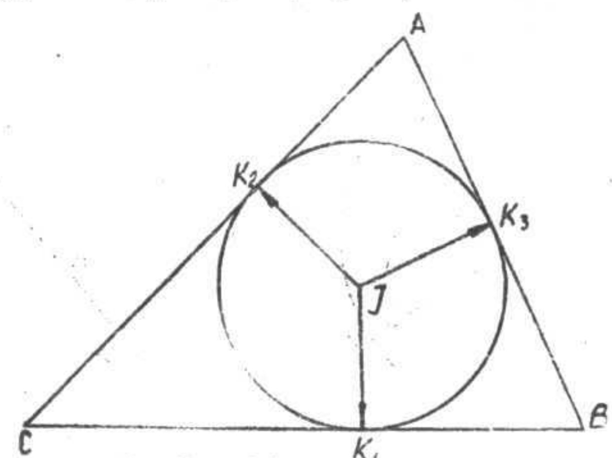


Рис.17.1

Вычислив скалярный квадрат, получим

$$\cos A + \cos B + \cos C \leqslant \frac{3}{2},$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда $\angle A = \angle B = \angle C$

Задача 2. (Ск. V, 17.045)

Доказать, что в треугольнике ABC:

$$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C \geqslant -\frac{3}{2}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть O — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Тогда (рис. 17.12)

$$(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC})^2 \geqslant 0$$

Задача 3.

В треугольнике ABC медиана AM_1 перпендикулярна медиане BM_2. Доказать, что

$$\frac{1}{2} < \frac{a}{b} < 2,$$

где $a = BC$, $b = AC$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Учитывая условие (рис. 17.3), имеем $\overline{BM_2} \cdot \overline{AM_1} = 0$, значит

$$(-2\bar{b} + \bar{a})(-2\bar{a} + \bar{b}) = 0,$$

или

$$5\bar{a} \cdot \bar{b} - 2a^2 - 2b^2 = 0, \text{ или } 5ab\cos\alpha - 2a^2 - 2b^2 = 0,$$

но $\cos\alpha = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$, значит, $5c^2 = a^2 + b^2$.

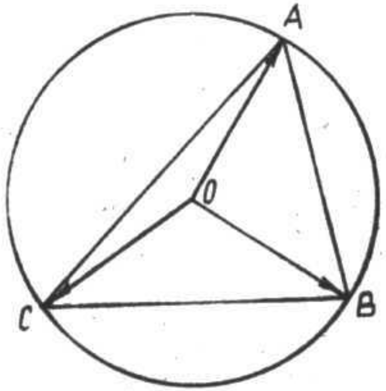


Рис. 17.2

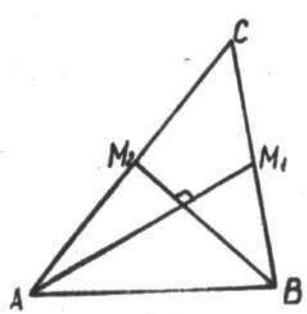


Рис. 17.3

Так как $c < a + b$ и $c > |a - b|$, то треугольник ABC существует, если

$$\begin{cases} 5(a+b)^2 > a^2 + b^2 \\ 5(a-b)^2 < a^2 + b^2, \end{cases} \quad \begin{cases} 4a^2 + 10ab + 4b^2 > 0 & (1) \\ \left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{5}{3}\left(\frac{a}{b}\right) + 1 < a & (2) \end{cases}$$

Неравенство (1) тождественно.

Неравенство (2) верно при $\frac{1}{2} < \frac{a}{b} < 2$

Так как $\overline{OA} \cdot \overline{OB} = R^2 \cos 2C$,
$\overline{OA} \cdot \overline{OC} = R^2 \cos 2B$,
$\overline{OB} \cdot \overline{OC} = R^2 \cos 2A$

После возведения в квадрат $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$ получим:

$$3R^2 + 2R^2(\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C) \geqslant 0$$

или

$$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C \geqslant -\frac{3}{2}$$

Задача 4.

Доказать, что в треугольнике ABC

$$AB^2 + BC^2 + CA^2 \leqslant 9R^2$$

где R — радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 = (\overline{OB} - \overline{OA})^2 + (\overline{OC} - \overline{OB})^2 + (\overline{OA} - \overline{OC})^2 = 6R^2 - 2R^2(\cos 2C + \cos 2B + \cos 2A)$$

Учитывая предыдущую задачу,

$$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C \geqslant -\frac{3}{2}$$

значит,

$$AB^2 + BC^2 + CA^2 \leqslant 9R^2$$

Задача 5. (Ск. V, 17.122)

Дан треугольник ABC; M — точка пересечения его медиан. Доказать, что

$$OM < \frac{1}{3}(OA + OB + OC),$$

где O — произвольная точка пространства.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

$$\overline{OM} = \frac{1}{3}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC})$$

Так как векторы $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}$ не коллинеарны, то

$$|\overline{OM}| < \frac{1}{3}(|\overline{OA}| + |\overline{OB}| + |\overline{OC}|)$$

Задача 6. (Ск. V, 17.121)

Точки M и N — середины отрезков AB и CD. Доказать, что $MN \leqslant \frac{1}{2}(AC + BD)$, $MN \leqslant \frac{1}{2}(BC + DA)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Возьмем произвольную точку X (рис. 17.4)

Тогда $\overline{XM} = \frac{1}{2}(\overline{XA} + \overline{XB})$,

$$\overline{XN} = \frac{1}{2}(\overline{XC} + \overline{XD}).$$

Выразим вектор $\overline{MN}$ через векторы $\overline{AD}$ и $\overline{BC}$:

$$\overline{MN} = \overline{XN} - \overline{XM} = \frac{1}{3}(\overline{XC} + \overline{XD} - \overline{XA} - \overline{XB}) = \frac{1}{2}(\overline{AD} + \overline{BC}) =$$

$$= \frac{1}{2}(\overline{AC} + \overline{BD}).$$

Так как данные отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ расположены произвольно, то имеет место

$$|MN| \leqslant \frac{1}{2}(|AD| + |BC|)$$

Равенство возможно лишь в том случае, если $\overline{AD} \uparrow\uparrow \overline{BC}$ или $\overline{AC} \uparrow\uparrow \overline{BD}$, т. е. четырехугольник $ABCD$ — трапеция.

Задача 7.

Около правильной треугольной пирамиды $SABC$ описана сфера с центром в точке O. Доказать, что углы $\varphi = \angle AOS$ и $\alpha = \angle OAB$ связаны неравенством

$$\cos\varphi + \cos\alpha \geqslant -\frac{2}{3}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Имеем (рис. 17.5)

$$(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OS})^2 \geqslant 0,$$

или

$$4R^2 + 6R^2\cos\varphi + 6R^2\cos\alpha \geqslant 0$$

(R — радиус описанной сферы), откуда

$$\cos\varphi + \cos\alpha \geqslant -\frac{2}{3}$$

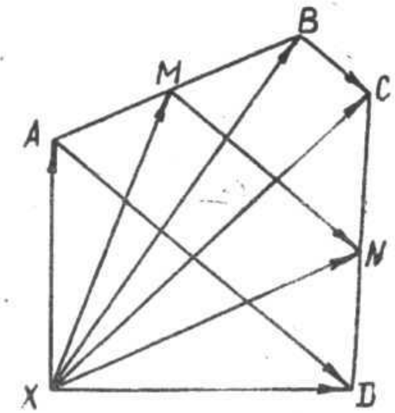


Рис. 17.4

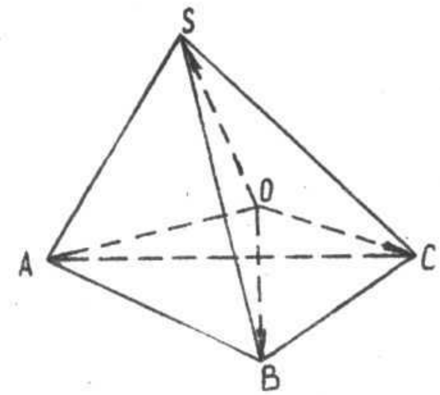


Рис. 17.5

Задача 8.

Доказать, что если a, b, c — длины ребер тетраэдра, имеющих общую вершину, a_1, b_1, c_1 — длины трех остальных ребер и R — радиус описанной около него сферы, то

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 \leqslant$$
$$\leqslant a^2 + b^2 + c^2 + 4R^2$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть $\overline{S} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} - \overline{OD}$, где O — центр сферы, описанной около тетраэдра $DABC$ (рис. 17.6)

Отсюда

$$\overline{S}^2 = (\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} - \overline{OD})^2 \geqslant 0$$

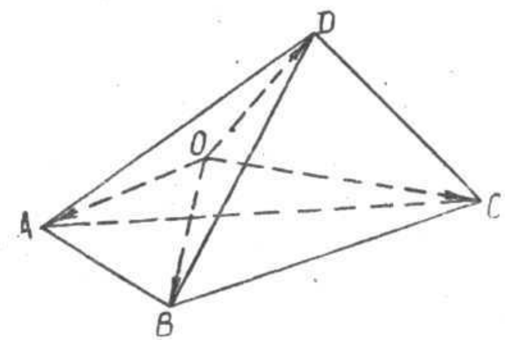


Рис. 17.6

После возведения в квадрат получим

$$4R^2 + 2(\overline{OA}\cdot\overline{OB} + \overline{OA}\cdot\overline{OC} + \overline{OB}\cdot\overline{OC} - \overline{OA}\cdot\overline{OD} - \overline{OB}\cdot\overline{OD} -$$
$$- \overline{OC}\cdot\overline{OD}).$$

Но $2\overline{OA}\cdot\overline{OB} = 2R^2 - c_1^2$, $2\overline{OA}\cdot\overline{OC} = 2R^2 - b_1^2$,
$2\overline{OA}\cdot\overline{OD} = 2R^2 - a^2$, $2\overline{OB}\cdot\overline{OC} = 2R^2 - a_1^2$,

$$2\overline{OB}\cdot\overline{OD} = 2R^2 - b^2, \quad 2OC - OD = 2R^2 - c^2.$$

Тогда

$$4R^2 - a_1^2 - b_1^2 - c_1^2 - a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 0,$$

или

$$a_1^2+b_1^2+c_1^2\leqslant a^2+b^2+c^2+4R^2$$

Знак равенства имеет место в случае $\overline{OD}=\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}=3\overline{OG}$, где G — точка пересечения медиан треугольника ABC.

Задача 9.

Найти наибольшее и наименьшее значение функции

$$y=\sqrt{x}+4\sqrt{1-\frac{x}{2}}$$

РЕШЕНИЕ

Рассмотрим векторы $\bar{a}=(1;\ 2\sqrt{2})$ и $\bar{b}\,(\sqrt{x};\ \sqrt{2-x})$ и пусть $(\widehat{\bar{a},\ \bar{b}})=\alpha$. Ввиду того, что координаты этих векторов неотрицательны, имеем

$$0^\circ\leqslant\alpha<90^\circ,\quad 0<\cos\alpha\leqslant 1$$

Далее

$$|\bar{a}|=\sqrt{(1)^2+(2\sqrt{2})^2}=3$$

$$|\bar{b}|=\sqrt{(\sqrt{x})^2+(\sqrt{2-x})^2}=\sqrt{2}$$

С одной стороны, $y=\bar{a}\cdot\bar{b}=\sqrt{x}+4\sqrt{1-\frac{x}{2}}$

С другой стороны, $y=\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cos\alpha\leqslant|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|=3\sqrt{2}$

Значит, $y_{\max}=3\sqrt{2}$. Это значение y достигает в случае, когда $\bar{a}=k\bar{b}$ или $k\sqrt{x}=1$, $k\sqrt{2-x}=2\sqrt{2}$, отсюда $x=\frac{2}{9}$. При указанных ограничениях для α, чем больше α, тем меньше y. Наибольшее значение α достигает в случае, когда $\bar{b}=(\sqrt{2},\ 0)$, отсюда $x=2$ и

$$y_{\min}=y\,(2)=\sqrt{2}$$

Итак,

$$y_{\max}=y\left(\frac{2}{9}\right)=3\sqrt{2},$$

$$y_{\min}=y\sqrt{2}.$$

Задача 10.

Доказать, что в прямоугольном треугольнике с катетами a и b и гипотенузой c имеет место следующее неравенство

$$a+b\leqslant c\sqrt{2}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть $\bar{x}=(1;\ 1)$, $\bar{y}=(a;\ b)$ согласно формуле (2)

$$\bar{x}\cdot\bar{y}\leqslant|\bar{x}|\cdot|\bar{y}|\ \text{ т. е.}$$

$$a+b\leqslant\sqrt{2}\cdot\sqrt{a^2+b^2},\ \text{ или }\ a+b\leqslant\sqrt{2}\cdot c$$

Задача 11.

Доказать, что неравенство

$$\sqrt{a+1}+\sqrt{2a-3}+\sqrt{50-3a}\leqslant 12$$

выполняется при всех значениях a, при которых определена его левая часть. (Это неравенство было предложено на республиканской олимпиаде школьников Украины в 1984 г.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Рассмотрим векторы $\bar{x}\,(1;\ 1;\ 1)$ и $y\,(\sqrt{a+1},\ \sqrt{2a-3},\ \sqrt{50-3a})$. Из формулы (2) следует, что

$$\sqrt{a+1}+\sqrt{2a-3}+\sqrt{50-3a}\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{3}\cdot\sqrt{(a+1)^2-(2a-3)^2+(50-3a)^2}=12$$

Задача 12 (Ск. V, 15.214).

Даны четыре луча OA, OB, OC и OD. Доказать, что

$$\cos\angle AOB+\cos\angle BOC+\cos\angle COD+\cos\angle DOA+$$

$$+\cos\angle AOC+\cos\angle BOD\geqslant-2$$

На данных лучах отложим единичные векторы $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$, $\bar{e}_4$. Преобразовав очевидное неравенство

$$(\bar{e}_1+\bar{e}_2+\bar{e}_3+\bar{e}_4)\geqslant 0$$

с помощью формулы $(\bar{a}+\bar{b})^2=\bar{a}^2+2\bar{a}\bar{b}+\bar{b}^2$ и учтя, что $|\bar{e}_1|=|\bar{e}_2|=|\bar{e}_3|=|\bar{e}_4|=1$, получим доказываемое неравенство.

Задача 13.

Доказать, что если $a+b+c=k$, то

$$\sqrt{2a+1}+\sqrt{2b+1}+\sqrt{2c+1}\leqslant\sqrt{6k+9}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Так как $\bar{x}\cdot\bar{y}=|\bar{x}|\cdot|\bar{y}|\cos\varphi$, а $\cos\varphi\leqslant 1$, то $|\bar{x}\cdot\bar{y}|\leqslant|\bar{x}|\times\times|\bar{y}|$. Поэтому, если даны векторы $\bar{x}=(x_1,\ y_1)$ и $\bar{y}=(x_2,\ y_2)$, то $\bar{x}\cdot\bar{y}=x_1\cdot x_2+y_1y_2$ и, следовательно,

$$x_1x_2+y_1y_2\leqslant\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}\tag{1}$$

Аналогично для трехмерного пространства

$$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2 \leqslant \sqrt{x_1^2+y_1^2-z_2^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2} \qquad (2)$$

Обозначим координаты соответствующих векторов $\bar{x}$ и $\bar{y}$ следующим образом:

$$\bar{x}\,(\sqrt{2a+1},\quad \sqrt{2b+1},\quad \sqrt{2c+1}),\quad \bar{y}\,(1;\ 1;\ 1)$$

Согласно формуле (2), имеем

$$\sqrt{2a+1}+\sqrt{2b+1}+\sqrt{2c+1}\leqslant\sqrt{2a+1+2b+1+2c+1}\times$$
$$\times\sqrt{3}=\sqrt{2(a+b+c)+3}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{2k+3}=\sqrt{6k+9}$$

Докажем, что равенство достигается при $a=b=c=\frac{1}{3}k$. Действительно, $\bar{x}\cdot\bar{y}=|\bar{x}|\cdot|\bar{y}|$, когда векторы $\bar{x}$ и $\bar{y}$ — коллинеарны, т. е. $a=b=c=\frac{k}{3}$.

Задача 14.

Какое наибольшее и какое наименьшее значение может принимать выражение $5\sin x-12\cos x$?

РЕШЕНИЕ

Пусть $\bar{a}=(5;\ -12)$; $b=(\sin x,\ \cos x)$

Тогда $5\sin x-12\cos x$ есть скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$:

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=5\sin x-12\cos x$$

Учитывая неравенство

$$|\bar{a}\cdot\bar{b}|<|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|,$$

имеем

$$(\bar{a}\cdot\bar{b})^2\leqslant\bar{a}^2-\bar{b}^2$$

Для данного условия

$$(5\sin x-12\cos x)^2\leqslant 13^2(\sin^2 x+\cos^2 x),$$

откуда $(5\sin x-12\cos x)^2\leqslant 13^2$.

Отсюда $15\sin x-12\cos x\leqslant 13$ или

$$-13\leqslant 5\sin x-12\cos x\leqslant 13.$$

Таким образом, наибольшее значение данного выражения равно 13, наименьшее (—13).

Задача 15.

Доказать, что для любого четырехугольника со сторонами a_1, a_2, a_3, a_4 имеет место соотношение

$$a_1^2+a_2^2+a_3^2>\frac{1}{3}a_4^2$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть $\overline{AB}=\bar{a}_1$, $\overline{BC}=a_2$, $\overline{CD}=\bar{a}_3$, $\overline{DA}=\bar{a}_4$ (рис. 17.7)

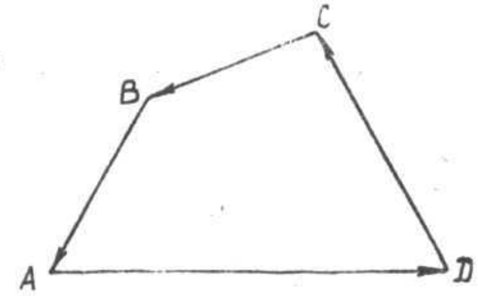


Рис. 17.7

Поскольку

$\bar{a}_1+\bar{a}_2+\bar{a}_3=-\bar{a}_4$, то

$\bar{a}_4^2=(\bar{a}_1+\bar{a}_2+\bar{a}_3)^2=a_1^2+$
$+a_2^2+a_3^2+2(\bar{a}_1\bar{a}_2+\bar{a}_1\bar{a}_3+$
$+\bar{a}_2\bar{a}_3)$, откуда

$3(\bar{a}_1^2+\bar{a}_2^2+\bar{a}_3^2)=\bar{a}_4^2+$
$+(\bar{a}_1-\bar{a}_2)^2+(\bar{a}_1-\bar{a}_3)^2+$
$+(\bar{a}_2-\bar{a}_3)^2$. Но $(\bar{a}_1-\bar{a}_2)^2>0$,

$(\bar{a}_1-\bar{a}_3)^2>0$, $(\bar{a}_2-\bar{a}_3)^2>0$, поэтому

$$3(a_1^2+a_2^2+a_3^2)>a_4^2 \text{ и } a_1^2+a_2^2+a_3^2>\frac{1}{3}a_4^2.$$

Задача 16.

Доказать, что

$$|ma+nb+c|\leqslant\sqrt{2},$$

если $m^2+n^2=a^2+b^2+c^2=1$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Векторы $(m,\ n,\ 1)$ и $(a,\ b,\ c)$ имеют по условию длину, равную соответственно $\sqrt{2}$ и 1, поэтому их скалярное произведение $ma+nb+c$ по модулю не превосходит $\sqrt{2}$.

Задача 17

Для каких чисел из множества $A=\{1;\ 2;\ 3\}$ неравенство

$$2\sin x\cos y\sin z-\cos x\sin y\cos z\leqslant a$$

выполняется для всех значений x, y, z.

РЕШЕНИЕ

При $x=z=\frac{\pi}{2}$, $y=0$ левая часть неравенства равна 2; поэтому $a=1$ не является решением.

Рассмотрим векторы

$$\bar{a}=(2\sin x\cos y;\ \cos x\sin y)$$
$$\bar{b}=(\sin z;\ -\cos z)$$

С одной стороны левая часть неравенства равна $\bar{a}\cdot\bar{b}$.

С другой стороны,

$$|\bar{a}|^2 = 4\sin^2 x\cos^2 y + \cos^2 x\cdot\sin^2 y \leqslant$$
$$\leqslant 4\sin^2 x + \cos^2 x = \sin^2 x + 1 \leqslant 4$$

значит, $|\bar{a}| \leqslant 2$; $|\bar{b}| = 1$ и $\bar{a}\cdot\bar{b} \leqslant 2$

Следовательно, числа 2 и 3 являются решениями.

Задача 18.

Точка D принадлежит стороне BC треугольника ABC. Доказать, что $AD\cdot BC \leqslant AB\cdot DC + AC\cdot BD$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

По формуле (2.7) $\alpha\overline{AB} + (1-\alpha)\overline{AC} = \overline{AD}$

Поскольку $\alpha = \frac{DC}{BC}$, то $1-\alpha = \frac{BD}{BC}$

$$|\overline{AD}| = |\alpha\cdot\overline{AB} + (1-\alpha)\overline{AC}| \leqslant \alpha|\overline{AB}| + (1-\alpha)|\overline{AC}| =$$
$$= \frac{DC}{BC}|\overline{AB}| + \frac{BD}{BC}|\overline{AC}|$$

Итак,

$$AD\cdot BC \leqslant DC\cdot AB + AD\cdot AC$$

Задача 19.

Доказать, что в треугольнике ABC

$$aa_1^2 + bb_1^2 + cc_1^2 \geqslant abc,$$

где $a_1 = XA_1 b_1 = XB_1 c_1 = XC$
(X — произвольная точка).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть I — инцентр. Тогда (стр. 127)

$$a\overline{IA} + b\overline{IB} + c\overline{IC} = \bar{0}$$

Верно и обратное утверждение. Поэтому для произвольной точки X, не совпадающей с I, имеем

$$a\overline{XA} + b\overline{XB} + c\overline{XC} = \bar{S} \neq \bar{0},$$

следовательно,

$$\bar{S}^2 = (a\overline{XA} + b\overline{XB} + c\overline{XC})^2 \geqslant 0$$

После возведения в квадрат

$$a^2a_1^2 + b^2b_1^2 + c^2c_1^2 + ab(a_1^2 + b_1^2 - c^2) +$$
$$+ bc(b_1^2 + c_1^2 - a^2) + ca(c_1^2 + a_1^2 - b^2) \geqslant 0,$$

или

$$a_1^2(a^2 + ab + ac) + b_1^2(b^2 + ba + bc) +$$
$$+ c_1^2(c^2 + ca + cb) \geqslant abc\cdot 2p$$

Выполнив сокращение на $2p$, получим искомое неравенство. Знак равенства имеет место только для центра I вписанной в треугольник ABC окружности.

Задача 20.

Доказать неравенство

$$\sin x\sin y\sin z + \cos x\cos y\cos z \leqslant 1$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Рассмотрим векторы

$$\bar{a} = (\sin x\sin y,\ \cos x\cos y),\quad \bar{b} = (\sin z,\ \cos z).$$

Тогда

$$|\bar{b}| = 1,\ |\bar{a}| = \sqrt{\sin^2 x\sin^2 y + \cos^2 x\cos^2 y} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x} = 1 \text{ и } |\bar{a}\cdot\bar{b}| \leqslant |\bar{a}|\cdot|\bar{b}| \leqslant 1.$$

Таким образом,

$$\sin x\sin y\sin z + \cos x\cos y\cos z \leqslant 1.$$

18. О ЕДИНИЧНЫХ ВЕКТОРАХ

Рассмотрим два вида задач: в первом — единичные векторы задаются в условии задачи, во втором — задачи решаются с помощью единичного вектора. Их целесообразно применять при доказательстве равенства углов, перпендикулярности прямых, в метрических соотношениях.

1. Единичные векторы в условии.

Задача 1. (Ск. V. 17.092)

Единичные вектора $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ и $\bar{e}_3$ удовлетворяют условию $\bar{e}_1+\bar{e}_2+\bar{e}_3=\bar{0}$. Найти $\bar{e}_1\cdot\bar{e}_2+\bar{e}_2\cdot\bar{e}_3+\bar{e}_3\cdot\bar{e}_1$.

РЕШЕНИЕ

Поскольку $\bar{e}_1+\bar{e}_2+\bar{e}_3=\bar{0}$, то векторы $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ и $\bar{e}_3$ образуют треугольник, а поскольку модули их равны, то треугольник равносторонний, значит, угол между двумя векторами равен 120°, а

$$\bar{e}_1\cdot\bar{e}_2+\bar{e}_2\cdot\bar{e}_3+\bar{e}_3\cdot\bar{e}_1=3\cdot\cos 120° - \frac{3}{2}$$

Задача 2 (Ск.V., 17.096)

Найти единичный вектор, перпендикулярный векторам $\bar{a}=\bar{i}+\bar{j}+2\bar{k}$ и $\bar{b}=2\bar{i}+\bar{j}+\bar{k}$

РЕШЕНИЕ

Запишем искомый вектор $\bar{c}$ в виде

$$\bar{c}=\alpha\bar{i}+\beta\bar{j}+\gamma\bar{k}$$

По условию $|\bar{c}|=|\bar{i}|=|\bar{j}|=|\bar{k}|=1$

Так как векторы $\bar{a}$ и $\bar{c}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ перпендикулярны, то их скалярные произведения равны нулю и

$$\begin{cases}\bar{a}\cdot\bar{c}=\alpha i^2+\beta j^2+2\gamma k^2=0\\ \bar{b}\cdot\bar{c}=2\alpha i^2+\beta j^2+\gamma k^2=0\\ c^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1\end{cases}$$

Решаем полученную систему уравнений:

$$\begin{cases}\alpha i^2-\gamma k^2=0\\ 3\alpha i^2+2\beta\gamma^2+3\gamma k^2=0\\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1,\end{cases}\qquad \begin{cases}\gamma=\alpha\\ 3\alpha+2\beta+\gamma=0\\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1\end{cases}$$

$$\begin{cases}\gamma=\alpha\\ \beta=-3\alpha\\ \alpha^2+9\alpha^2+\alpha^2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{11}}\\ \beta=\pm\frac{3}{\sqrt{11}}\\ \gamma=\pm\frac{1}{\sqrt{11}}.\end{cases}$$

Следовательно,

$$\bar{c}=\pm\frac{1}{\sqrt{11}}\bar{i}\pm\frac{3}{\sqrt{11}}\bar{j}\pm\frac{1}{\sqrt{11}}\bar{k}$$

Задача 3

В треугольнике ABC от каждой вершины отложены по сторонам три единичных вектора $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$. Доказать, что

$$\bar{e}_1\sin A+\bar{e}_2\sin B+\bar{e}_3\sin C=\bar{0}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

$$\bar{a}=\bar{e}_1|\bar{a}|=\bar{e}_1 2R\sin A,$$

где R — радиус окружности, описанной около треугольника ABC (рис. 18.1). Аналогично, $\bar{B}=\bar{e}_2\,2R\sin B$, $\bar{c}=\bar{e}_3\,2R\sin C$. Так как

$$\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}=\bar{0},$$

то $2R(\bar{e}_1\sin A+\bar{e}_2\sin B+\bar{e}_3\sin C)=\bar{0}$, что доказывает утверждение задачи.

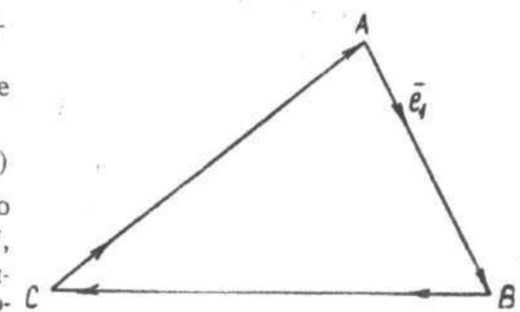


Рис. 18.1

Задача 4. (Ск. V, 17.054)

В треугольнике ABC дано $\overline{AB}=4i+2j$; $AC=3i+4j$, где $\bar{i}$ и $\bar{j}$ — единичные взаимно перпендикулярные векторы. Доказать, что треугольник ABC прямоугольный и вычислить его площадь.

РЕШЕНИЕ

Выразим вектор $\overline{CB}$ через векторы $\bar{i}$, $\bar{j}$. $\overline{CB} = \overline{AB} - \overline{AC} = \bar{i} - 2\bar{j}$. Векторы $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{CB}$ в базисе $\bar{i}$, $\bar{j}$ имеют координаты: $\overline{AB}(4;\ 2)$; $\overline{AC}(3;\ 4)$, $\overline{CB}(1;\ -2)$.

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 20; \quad \overline{AC} \cdot \overline{CB} = -5;$$

$\overline{AB} \cdot \overline{CB} = 4 - 4 = 0$, значит $\angle ABC = 90°$.

Поскольку $|\overline{AB}| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$, $|\overline{CB}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$, то

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CB = 5 \text{ кв. единиц}$$

Задача 5. (Ск. V, 15.237)

Даны два неколлинеарных единичных вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Доказать, что длина вектора $(\bar{a} \cdot \bar{c})\,\bar{b} - (\bar{b} \cdot \bar{c})\,\bar{a}$ не зависит от направления $\bar{c}$, если $\bar{c}$ — единичный вектор, компланарный с $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ имеют координаты: $\bar{a}\,(m;\ n)$, $\bar{b}\,(p;\ q)$, $\bar{c}\,(x;\ y)$,

причем $x^2 + y^2 = 1$, так как $|\bar{c}| = 1$.

Тогда

$$\bar{e} = \bar{a}(\bar{b} \cdot \bar{c}) - \bar{b}(\bar{a} \cdot \bar{c}) =$$

$$= m(px + qy),\ n(px + qy) - p(mx + ny),\ q(mx + ny) =$$

$$= (y(mq - np),\ x(np - mq)),$$

значит,

$|\bar{e}| = \sqrt{(mq - np)^2 + (x^2 + y^2)} = \sqrt{(mq - np)^2 + 1} = |mq - np| =$ $= |\bar{a} \cdot \bar{b}| = |\cos(\widehat{\bar{a}, \bar{b}})|$ не зависит от x и y, значит утверждение задачи доказано.

Задача 6 (Ск. V. 17.077)

Пусть $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ — единичные векторы, направленные вдоль координатных осей, и $\bar{a} = 2\bar{i} + \bar{j} + 3\bar{k}$, $\bar{b} = \alpha^2\bar{i} + 4\bar{j} - 3\bar{k}$. При каких значениях α векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ перпендикулярны.

РЕШЕНИЕ

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = (2\bar{i} + \bar{j} + 3\alpha\bar{k})(\alpha^2\bar{i} + 4\bar{j} - 3\alpha\bar{k}) = 2\alpha^2 i^2 - 9\alpha k^2 + 4j^2 = 0$$

Поскольку $|\bar{i}| = |\bar{j}| = |\bar{k}| = 1$, то

$$2\alpha^2 - 9\alpha + 4 = 0$$

$$\alpha = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 32}}{4}$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}; \quad \alpha_2 = 4$$

Задача 7. (Ск. V, 17.068)

Пусть $\bar{i}$, $\bar{j}$ и $\bar{k}$ единичные векторы, направленные вдоль координатных осей и $\bar{a} = 6\bar{i} - 2\bar{j} - 3k$. Найти косинусы углов, образуемых вектором $\bar{a}$ с векторами $\bar{k}$, $\bar{i}$ и $\bar{j}$.

РЕШЕНИЕ

В базисе $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ вектор $\bar{a}$ имеет координаты $(6;\ -2;\ -3)$.

$$|\bar{i}| = |\bar{j}| = |\bar{k}| = 1$$

$$|\bar{a}| = \sqrt{6^2 + 2^2 + 3^2} = 7$$

$$\cos(\bar{a}, \bar{i}) = \frac{\bar{a} \cdot \bar{i}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{i}|} = \frac{6}{7}$$

$$\cos(\bar{a}, \bar{j}) = \frac{\bar{a} \cdot \bar{j}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{j}|} = -\frac{2}{7}$$

$$\cos(\bar{a}, \bar{k}) = \frac{\bar{a} \cdot \bar{k}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{k}|} = -\frac{3}{7}$$

Задача 8.

Заданы точки $A\,(2;\ 0)$, $B\,(0;\ 3)$, $C\,(-2;\ -1)$. В треугольнике ABC проведем высоту BD.

а) Найти орт вектора $\overline{CA}$.

б) зная орт вектора $\overline{CA}$ вычислить длину отрезка CD и найти вектор $\overline{CD}$.

в) найти вектор $\overline{BD}$.

РЕШЕНИЕ

а) $\overline{CA} = 4\bar{i} + \bar{j}$

Пусть $\bar{e}$ — единичный вектор (орт) вектора $\overline{CA}$. Тогда

$$\bar{e} = \frac{\overline{CA}}{|\overline{CA}|} = \frac{4\bar{i} + \bar{j}}{\sqrt{17}}$$

б) $|\overline{CD}| = \overline{CB} \cdot \bar{e} = \dfrac{(2\bar{i} + 4\bar{j}) \cdot (4\bar{i} + \bar{j})}{\sqrt{17}} = \dfrac{12}{\sqrt{17}}$

$$\overline{CD} = |\overline{CD}|\,\bar{e} = \frac{12}{17}(4\bar{i} + \bar{j})$$

в) $\overline{BD} = \overline{BC} + \overline{CD} = \dfrac{14}{17}(\bar{i} - 4\bar{j})$.

Задача 9.

Вектор r образует с осями O_x, O_y, O_z углы α, β, γ соответственно. Косинусы этих углов называются направляющими косинусами вектора $\bar{r}$. Доказать, что

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть точка A_1 имеет координаты x_1, y_1, z_1 и $\overline{OA_1} = \bar{r}$. Тогда

$$\frac{x_1}{r_1} = \cos\alpha, \quad \frac{y_1}{r_1} = \cos\beta, \quad \frac{z_1}{r_1} = \cos\gamma$$

Взяв $|\bar{r}_1| = 1$, получим

$$\bar{r}_1 = \bar{i}\cos\alpha + \bar{j}\cos\beta + \bar{k}\cos\gamma$$

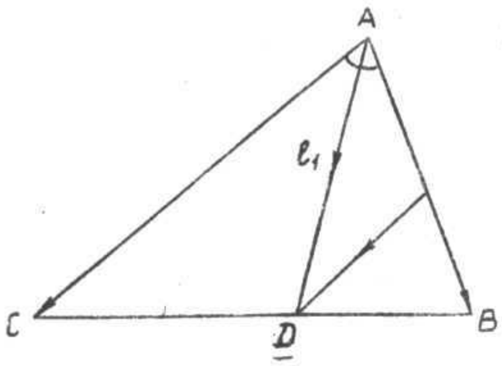


Рис. 18.2

Возведя в скалярный квадрат обе части равенства, найдем

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Задача 10.

Найти единичный вектор, коллинеарный вектору, направленному по биссектрисе угла BAC треугольника ABC, если заданы его вершины $A(1;1;1)$ $B(3;0;1)$, $C(0;3;1)$.

РЕШЕНИЕ

Найдем координаты и модули векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$.

Имеем $\overline{AB}(2; -1; 0)$, $\overline{AC}(-1; -2; 0)$

$$|\overline{AB}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{5},$$
$$|\overline{AC}| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 0^2} = \sqrt{5},$$

следовательно биссектриса $\overline{AD}$ имеет координаты $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$ и $|\overline{AD}| = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Обозначим $\bar{e}$ — единичный вектор, сонаправленный с $\overline{AD}$ (рис. 18.2).

$$\bar{e} = \frac{\overline{AD}}{|\overline{AD}|}, \text{ окончательно } \bar{e}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

Применение единичных векторов

Задача 11.

Даны четыре вектора $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, $\overline{OD}$ единичной длины, сумма которых есть нуль-вектор. Доказать, что угол между любыми двумя векторами равен углу между двумя остальными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

По условию $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD} = \bar{0}$. Тогда $(\overline{OA} + \overline{OB}) = (\overline{OC} + \overline{OD})$. Если векторы равны, то их скалярные квадраты также равны, т. е. $(\overline{OA} + \overline{OB})^2 = (\overline{OC} + \overline{OD})^2$. Отсюда следует, что

$$\overline{OA} \cdot \overline{OB} = \overline{OC} \cdot \overline{OD}$$

Поскольку рассматриваются векторы единичной длины, то $\cos\angle AOB = \cos\angle COD$ или $\angle AOB = \angle COD$.

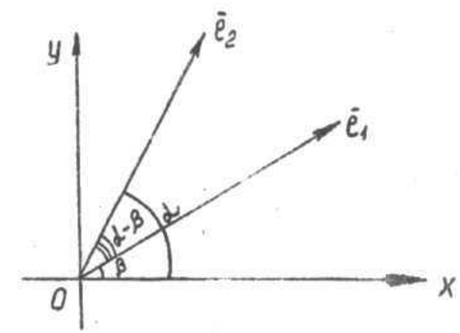


Рис. 18.3

Задача 12

Доказать формулу

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть $\bar{e}_1$ — единичный вектор, который образует с осью OX угол β, $\bar{e}_2$ — единичный вектор, который образует с осью OX угол α (рис. 18.3), тогда векторы $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ образуют между собой угол $\alpha - \beta$ и потому

$$\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2 = \cos(\alpha - \beta) \qquad (1)$$

С другой стороны вектор $\bar{e}_1$ имеет координаты $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, а вектор $\bar{e}_2$ — координаты $\cos\beta$, $\sin\beta$. Значит,

$$\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2 = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \qquad (2)$$

Сравнивая (1) и (2), получим

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

Задача 13.

Найти наибольшее значение суммы

$$S = 3\cos x + 4\sin x$$

РЕШЕНИЕ

Введем два вектора $\bar{e}(\cos x; \sin x)$ и $\bar{a}(3; 4)$; тогда

$$S = 3\cos x + 4\sin x = \bar{a} \cdot \bar{e} = |\bar{a}| \cdot |\bar{e}| \cos\widehat{\bar{a}, \bar{e}}$$
$$|\bar{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5, \quad |\bar{e}| = \sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = 1$$
$$S = 5\cos(\widehat{\bar{a}, \bar{e}}), \text{ отсюда } S_{\text{наиб}} = 5.$$

Задача 14

В треугольнике ABC

$$\cos A + \cos B + \cos C \leqslant \frac{3}{2}$$

Доказать.

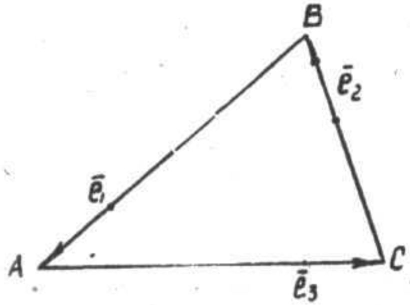


Рис. 18.4

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ — единичные векторы, каждый из которых принадлежит стороне треугольника ABC (рис. 18.4)

Имеем

$$|\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3|^2 \geqslant 0$$

Тогда

$$3 + 2(\bar{e}_1\bar{e}_2 + \bar{e}_1\bar{e}_3 + \bar{e}_2\bar{e}_3) \geqslant 0$$

Но $\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2 = \cos(180 - B) = -\cos B$, значит,

$$\bar{e}_1\bar{e}_3 = -\cos A, \quad \bar{e}_2\bar{e}_3 = -\cos C,$$

следовательно,

$$3 - 2(\cos A + \cos B + \cos C) \geqslant 0$$

Значит, $\cos A + \cos B + \cos C \leqslant \frac{3}{2}$

Задача 15

Доказать:

$$\left|\frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)}\right| \leqslant \frac{1}{2}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть единичные векторы $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ имеют координаты:

$$\bar{e}_1\left(\frac{2x}{1+x^2};\ \frac{1-x^2}{1+x^2}\right),\quad \bar{e}_2\left(\frac{1-y^2}{1+y^2};\ \frac{2y}{1+y^2}\right).$$

Очевидно, что $|\bar{e}_1| = |\bar{e}_2| = 1$. Ясно, что

$$|\bar{a} \cdot \bar{b}| \leqslant |\bar{a}| \cdot |\bar{b}|, \text{ но}$$

$$|\bar{a}| \cdot |\bar{b}| = \left|2\frac{x(1-y^2) + y(1-x^2)}{(1+x^2)(1+y^2)}\right| = \left|2\frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)}\right|$$

откуда истинно доказываемое неравенство.

Задача 16

Плоские углы трехгранного угла α, β, γ. Найти угол между биссектрисами двух плоских углов.

РЕШЕНИЕ

Отложим единичные векторы $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ на ребрах OA, OB, OC соответственно. Тогда векторы $\bar{U}_1 = \bar{e}_1 + \bar{e}_2$ и $\bar{U}_2 = \bar{e}_2 + \bar{e}_3$ коллинеарны биссектрисам углов AOB и BOC соответственно (рис. 18.5). Обозначим через φ угол между векторами $\bar{U}_1$ и $\bar{U}_2$. Тогда

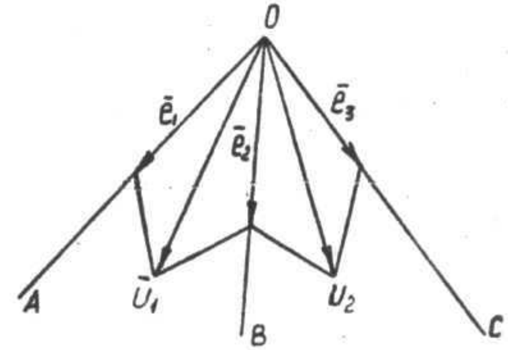


Рис. 18.5

$$\cos\varphi = \frac{1 + \bar{e}_1\bar{e}_2 + \bar{e}_2\bar{e}_3 + \bar{e}_3\bar{e}_1}{|\bar{e}_1 + \bar{e}_2| \cdot |\bar{e}_2 + \bar{e}_3|}$$

Найдем $|\bar{e}_1 + \bar{e}_2|$:

$$|\bar{e}_1 + \bar{e}_2| = \sqrt{(\bar{e}_1 + \bar{e}_2)^2} = \sqrt{1 + 2\cos\gamma + 1} = \sqrt{2(1 + \cos\gamma)} = 2\cos\frac{\gamma}{2}$$

Аналогично $|\bar{e}_2 + \bar{e}_3| = 2\cos\frac{\alpha}{2}$, окончательно получим

$$\cos\varphi = \frac{1 + \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma}{4\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}$$

Задача 17. (Ск. V., 17.082)

Доказать, что если биссектрисы двух плоских углов трехгранного угла перпендикулярны, то биссектриса третьего плоского угла перпендикулярна каждой из них.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть дан трехгранный угол $SABC$. (рис. 18.6). На ребрах его SB, SA, SC отложим единичные векторы $\bar{e}_2, \bar{e}_1, \bar{e}_3$ соответственно. Направляющие векторы биссектрис плоских углов ASB, BSC, CSA соответственно равны $\bar{e}_1 + \bar{e}_2$, $\bar{e}_2 + \bar{e}_3$, $\bar{e}_3 + \bar{e}_1$. Согласно условию биссектрисы двух плоских углов взаимно-перпендикулярны. Пусть $(\bar{e}_1 + \bar{e}_2)(\bar{e}_3 + \bar{e}_1) = 0$. Отсюда

$\bar{e}_1\bar{e}_3 + \bar{e}_2 \cdot \bar{e}_3 + \bar{e}_2 \cdot \bar{e}_1 + 1 = 0.$

Используя полученное равенство, покажем, что две другие пары биссектрис также взаимно перпендикулярны. Действительно,

$$(\bar{e}_1 + \bar{e}_2)(\bar{e}_2 + \bar{e}_3) = \bar{e}_1\bar{e}_2 + \bar{e}_1\bar{e}_3 + \bar{e}_2\bar{e}_3 + 1 = 0$$

$$(\bar{e}_1 + \bar{e}_3)(\bar{e}_2 + \bar{e}_3) = \bar{e}_1\bar{e}_2 + \bar{e}_1\bar{e}_3 + \bar{e}_2\bar{e}_3 + 1 = 0$$

Задача доказана.

Задача 18. (Ск IV, 15.188)

В трехгранном угле $SABC$ биссектрисы углов ASB и ASC взаимно перпендикулярны. Доказать, что плоскость, содержащая эти биссектрисы, перпендикулярна грани SBC.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

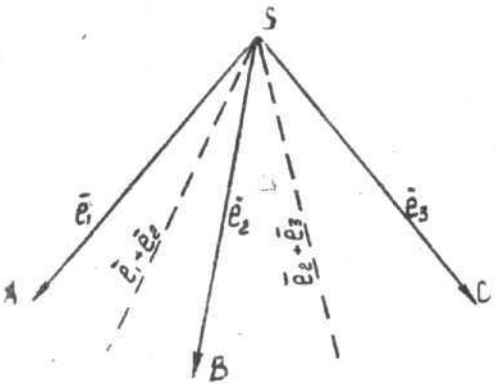


Рис. 18.6

Отложим на ребрах SA, CB, SC трехгранного угла $SABC$ единичные вектора $\bar e_1$, $\bar e_2$, $\bar e_3$ и пусть $\angle ASB=\gamma$, $\angle BSC=\alpha$, $\angle CSA=\beta$ (рисунок 18.6). Направляющие векторы $\bar k$ и $\bar m$ биссектрис k и m углов ASB и ASC выражаются через единичные векторы так:

$$\bar k=\bar e_1+\bar e_2,\quad \bar m=\bar e_1+\bar e_3$$

Из условия перпендикулярности биссектрис k и m следует: что $\bar k\cdot\bar m=0$, или

$$1+\cos\alpha+\alpha\cos\beta+\cos\gamma=0$$

Направляющий вектор $\bar n$ биссектрисы n угла BSC равен $\bar e_2+\bar e_3$. Равенство $1+\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=0$, показывает, что

$$(\bar e_2+\bar e_3)(\bar e_1+\bar e_2)=0 \text{ и } (\bar e_2+\bar e_3)(\bar e_3+\bar e_1)=0, \text{ т. е.}$$

$$\bar n\perp\bar k \text{ и } \bar n\perp\bar m$$

Следовательно, луч n плоскости SBC перпендикулярен двум непарлалельным лучам k и m плоскости. Значит, эти плоскости перпендикулярны.

Задача 19. (Ск IV, 15.204)

Дан трехгранный угол. Доказать, что биссектрисы трех углов, смежных его плоским углам, лежат в одной плоскости.

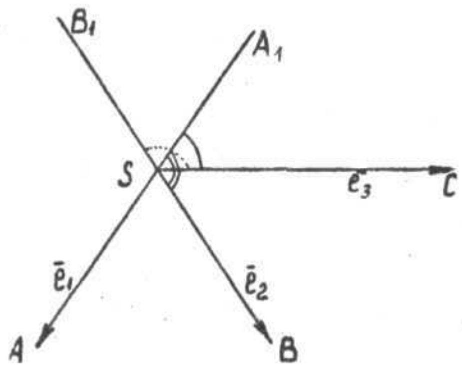


Рис 18 7

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

На ребрах трехгранного угла $SABC$ отложим единичные векторы: $\bar e_1$, $\bar e_2$, $\bar e_3$ (рис. 18.7). Рассмотрим векторы $\bar t_1$, $\bar t_2$, $\bar t_3$, где луч t_1 — биссектриса угла A_1SB, смежного с углом ASB, t_2 — биссектриса угла A_1SC, смежного с углом ASC, t_3 — биссектриса угла B_1SC, смежного с углом BSC. По условию

$$\bar t_1=\bar e_2+(-\bar e_1),\quad \bar t_2=\bar e_3+(-\bar e_1),$$

$\bar t_3=\bar e_3+(-\bar e_2)$, откуда $\bar t_2=\bar t_1+\bar t_3$, т. е., векторы $\bar t_1$, $\bar t_2$ и $\bar t_3$ компланарны. Рассмотрим теперь вместо вектора $\bar t_1$ вектор $\bar t_1'=-\bar t_1$, который задает бисектрису угла ASB, также смежному углу ASB.

Поскольку $\bar t_2=\bar t_1+\bar t_3$, то $\bar t_2=\bar t_3-\bar t_1'$, и векторы $\bar t_1'$, $\bar t_2$, $\bar t_3$ также принадлежат одной плоскости. Аналогичным рассуждением докажем, что все 6 векторов $\bar t_1$, $\bar t_2$, $\bar t_3$, $\bar t_1'$, $\bar t_2'$, $\bar t_3'$, задающие биссектрисы углов, смежных плоским углам заданого трехгранного угла.

Задача 20

Дан трехгранный угол, плоские углы которого α, β, γ. Вычислить величины его двугранных углов.

РЕШЕНИЕ

Отложим на ребрах трехгранного угла от его вершины 0 единичные векторы $\overline{OA}=\bar e_1$, $\overline{OB}=\bar e_2$, $\overline{OC}=\bar e_3$. Обозначим $\angle AOB=\gamma$, $\angle BOC=\alpha$, $\angle AOC=\beta$ (рис. 18.8). Перпендикулярно прямой OA проведем отрезки BM и CN. Тогда угол между векторами $\overline{MB}$ и $\overline{NC}$ равен величине двугранного угла. Обозначим его φ_1. Пользуясь «замкнутым контуром», запишем

$$\overline{BC}=-\overline{MB}+\overline{MN}+\overline{NC}$$

Возведем обе части в скалярный квадрат. Поскольку

$$\overline{MB}\cdot\overline{MN}=\overline{NC}\cdot\overline{MN}=0,$$

получим

$$\overline{BC}^2=\overline{MB}^2+\overline{NM}^2+\overline{NC}^2-2\overline{MB}\cdot\overline{NC}$$

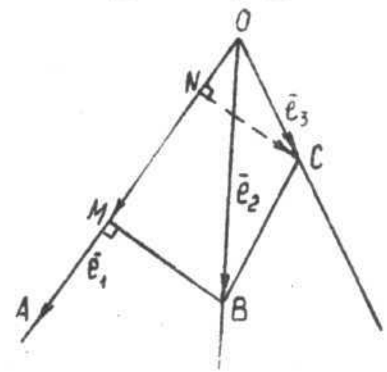


Рис. 18.8

Учитывая, что $\overline{BC}=\bar e_3-\bar e_2$, $\overline{BC}^2=2-2\cos\alpha$, $\overline{MB}^2=|\overline{MB}|^2=|\overline{OB}|^2-|\overline{OM}|^2=1-\cos^2\gamma$, $\overline{NC}^2=|\overline{NC}|^2=|\overline{OC}|^2-|\overline{ON}|^2=1-\cos^2\beta$, $MN^2=(\overline{OM}-\overline{ON})^2=\cos^2\gamma+\cos^2\beta-2\cos\beta\cdot\cos\gamma$ приходим к равенству

$$2-2\cos\alpha=2-\cos^2\gamma+\cos^2\beta+\cos^2\gamma-2\cos\beta\cos\gamma-\cos^2\beta-2\sin\gamma\sin\beta\cos\varphi_1$$

После упрощений получаем:

$$\cos\alpha=\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma\cos\varphi_1$$

Отсюда

$$\cos\varphi_1=\frac{\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}$$

Задача 21. (Ск. IV, 15.207)

Доказать, что если плоские углы α, β, γ трехгранного угла связаны соотношением $\cos\alpha = \cos\alpha\cos\beta$, то двугранный угол, лежащий против плоского угла, величина которого γ, прямой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Воспользуемся формулой предыдущей задачи. Тогда $\cos\varphi_3 = 0$, $\varphi_3 = 90°$.

Задача 22. (Ск. IV, 15.185)

Известно, что плоские углы трехгранного угла α, β, γ. Доказать, что угол между ребром трехгранного угла и биссектрисой противолежащего плоского угла вычисляется по формуле

$$\cos\varphi = \frac{\cos\beta + \cos\beta\gamma}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$$

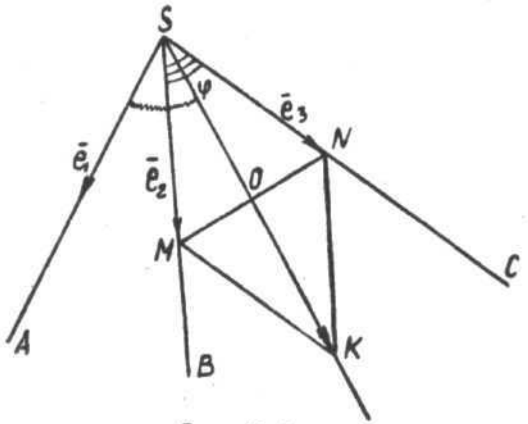


Рис. 18.9

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

На ребрах трехгранного угла $SABC$ отложим единичные векторы $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ (рис. 18.9) $\overline{SK}$ — диагональ параллелограмма, построенного на векторах $\bar{e}_2$ и $\bar{e}_3$, которые образуют угол φ. Поскольку $|\bar{e}_1| = |\bar{e}_2| = |\bar{e}_3| = 1$, то параллелограмм $SMKN$ — ромб. Найдем скалярное произведение векторов $\bar{e}_1$ и $\overline{SK} = \bar{e}_2 + \bar{e}_3$. Имеем

$$\bar{e}_1 \cdot (\bar{e}_2 + \bar{e}_3) = |\bar{e}_2 + \bar{e}_3| \cos\varphi$$

Из треугольника SOM

$$SO = SM\cos\frac{\gamma}{2},$$

Значит,

$$\frac{1}{2}|\bar{e}_1 + \bar{e}_2| = \cos\frac{\alpha}{2} \text{ и}$$

$$\bar{e}_1(\bar{e}_2 + \bar{e}_3) = 2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\varphi$$

Кроме того,

$$\bar{e}_1(\bar{e}_2 + \bar{e}_3) = \bar{e}_1\bar{e}_2 + \bar{e}_1\bar{e}_3 = \cos\gamma + \cos\beta$$

Из этих равенств получим

$$2\cos\frac{\gamma}{2}\cos\varphi = \cos\alpha + \cos\beta,$$

или

$$\cos\varphi = \frac{\cos\gamma + \cos\beta}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$$

Задача 23. (Ск. IV. 15.198)

Сумма двух плоских углов трехгранного угла равна 180°. Доказать, что их общее ребро перпендикулярно биссектрисе третьего плоского угла.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Отложим на ребрах единичные векторы $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ (рис. 18. 9). Тогда $\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2 = \cos\alpha$, $\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_3 = \cos\beta$, где $(\widehat{\bar{e}_1, \bar{e}_2}) = \alpha$, $(\widehat{\bar{e}_1, \bar{e}_3}) = \beta$. Учитывая условие, можно записать $\alpha + \beta = 180°$, значит, $\cos\alpha = -\cos\beta$, т. е. $\cos\alpha + \cos\beta = 0$, следовательно,

$$\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_3 + \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2 = 0, \text{ отсюда, } \bar{e}_1(\bar{e}_3 + \bar{e}_2) = 0, \quad \bar{e}_1 \cdot \overline{SK} = 0.$$

или $\bar{e}_1 \perp \overline{SK}$, что и требовалось доказать.

Второй способ

Воспользуемся формулой предыдущей задачи

$$\cos\varphi = \frac{\cos\alpha + \cos\beta}{2\cos\frac{\gamma}{2}}$$

Учитывая условие ($\alpha + \beta = 180°$), имеем

$$\cos\varphi = \frac{\cos\alpha + \cos(180° - \alpha)}{2},$$

$$\cos\varphi = 0, \quad \varphi = 90°.$$

19. ОБ ОДНОЙ ВЕКТОРНОЙ ЗАДАЧЕ

Рассмотрим задачу из книги П. С. Моденова «Задачи по геометрии» (М., Наука, 1979).

Задача. Пусть ABC — произвольный треугольник. Рассмотрим 12 векторов, начальными точками которых есть центры вписанной и вневписанных окружностей, а концами — точки касания окружностей к сторонам треугольника. Доказать, что сумма этих векторов равна вектору $\overline{OH}$, где O — центр окружности, описанной около треугольника ABC, H — ортоцентр ABC.

Ошибка в условии состоит в том, что сумма векторов равна $4\overline{OH}$, а не $\overline{OH}$, как утверждает задачник.

Решим эту задачу

Обозначим искомую сумму S_{12}; K_1, K_2, K_3 — точки касания вписанной в треугольник ABC окружности и сторон BC, AC, AB. Учитывая гомотетичность вписанной и вневписанных окружностей с коэффициентом гомотетии равным отношению их радиусов, сумму S_{12} можно записать так:

$$S_{12} = -\frac{\overline{IK_1}\cdot r_a}{r} + \frac{\overline{IK_2}\cdot r_a}{r} + \frac{\overline{IK_3}\cdot r_a}{r} - \frac{\overline{IK_2}\cdot r_b}{r} +$$

$$+\frac{\overline{IK_1}\cdot r_b}{r} + \frac{\overline{IK_3}\cdot r_b}{r} - \frac{\overline{IK_3}\cdot r_c}{r} + \frac{\overline{IK_1}\cdot r_c}{r} +$$

$$+\frac{\overline{IK_2}\cdot r_c}{r} + \overline{IK_1} + \overline{IK_2} + \overline{IK_3} = \overline{IK_1}\left(1 - \frac{ra}{r} + \frac{rb}{r} + \frac{rc}{r}\right) +$$

$$+\overline{IK_2}\left(1 - \frac{r_b}{r} + \frac{r_a}{r} + \frac{r_c}{r}\right) + \overline{IK_3}\left(1 - \frac{r_c}{r} + \frac{r_b}{r} + \frac{r_a}{r}\right) \quad (*)$$

Лемма 1. Доказать, что в треугольнике ABC имеют место такие соотношения:

$$r_a = 4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2},$$

$$r_b = 4R\sin\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2},$$

$$r_c = 4R\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}.$$

Докажем первую из этих формул (две другие доказываются аналогично).

$$r_a = \frac{S}{p-a} = \frac{ab\sin C}{b+c-a} = \frac{4R^2\sin A\sin B\sin C}{2R(-\sin A + \sin B + \sin C)} =$$

$$= \frac{2R\sin A\sin B\sin C}{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} - 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}} =$$

$$= \frac{2R\sin A\sin B\sin C}{2\cos\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B-C}{2} - \cos\frac{B+C}{2}\right)} =$$

$$= \frac{4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} = 4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

Лемма 2. Доказать, что в треугольнике ABC:

$$\overline{IK_1}\,\frac{2R\cos A}{r} = \overline{OB} + \overline{OC}$$

$$\overline{IK_2}\,\frac{2R\cos B}{r} = \overline{OA} + \overline{OC}$$

$$\overline{IK_3}\,\frac{2R\cos C}{r} = \overline{OB} + \overline{OA}$$

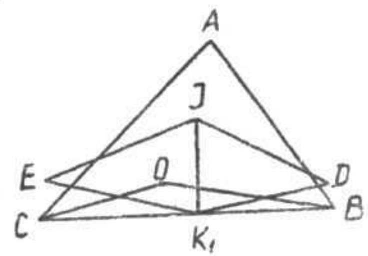


Рис. 19.1

Доказательство. Докажем первую формулу методом разложения вектора по двум неколлинеарным векторам. Разложим вектор $\overline{IK_1}$ по векторам $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$. Сделаем параллельный перенос векторов $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$ на вектор $\overline{OI}$, а векторов $\overline{CO}$ и $\overline{BO}$ соответственно на векторы $\overline{CK_1}$ и $\overline{BK_1}$. Получим ромб IDK_1E (рис. 19.1). Получим

$$\overline{IK_1} = \alpha\overline{OB} + \beta\overline{OC}$$

$$\overline{IK_1} = \overline{ID} + \overline{IE}$$

Откуда

$$\alpha = \frac{ID}{OB};\quad \beta = \frac{IE}{OC}.$$

Поскольку $|\overline{IK_1}| = r$, $|\overline{ID}| = \overline{IE}$, то

$$\alpha = \frac{r}{2R\cos A} = \beta$$

Таким образом,

$$\overline{IK}_1 = \frac{r}{2R\cos A}(\overline{OB}+\overline{OC}), \quad \overline{IK}_1 \cdot \frac{2R}{r}\cos A = \overline{OB}+\overline{OC}$$

С помощью лемм (1) и (2) запишем выражение (*), учитывая, что

$$r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

Имеем

$$S_{12} = \overline{IK}_1\frac{4R\cos A}{r} + \overline{IK}_2\frac{4R\cos B}{r} + \overline{IK}_3\frac{4R\cos C}{r} =$$

$$= 2(\overline{OB}+\overline{OA}+\overline{OC}+\overline{OC}+\overline{OA}+\overline{OB}) = 4(\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}).$$

Учитывая формулу Гамильтона, получим

$$S_{12} = 4(\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}) = 4\overline{OH}$$

Список использованной и рекомендуемой литературы

1. *Алексеев В. М., Ушаков Р. П.* Математика, К., Вища школа, 1992, 495 с.
2. *Бевз Г. П.* Геометрія тетраедра, К., Рад. шк., 1974, 106 с.
3. *Болтянский В. Г., Яглом И. М.* Преобразования. Векторы. М. Просвещение, 1964. 438 с.
4. *Гельфанд М. Б., Макуха А. С., Ушаков Р. П.* Математика, К., Вища школа, 1982.— 465 с.
5. *Герасимова И. С., Гусев В. А., Маслова Г. Г., Скопец З. А., Ягодовский М. И.* Сборник задач по геометрии (9, 10 класса). М., Просвещение, 1977, 190 с.
6. *Гусев В. А., Маслова Г. Г., Скопец З. А. Черкасов Р. С.* (Сборник задач по геометрии для 6—8 классов., М., Просвещение, 1975, 224 с.
7. *Крайзман М. Л.* Розв'язування геометричних задач методом векторів К., Рад. шк. 1980, 96 с.
8. *Кушнір І. А.* Вектори в задачах. Зб. У світі математики, № 12, Рад. шк. 1981, 237.
9. *Кушнир И. А.* О применении одной векторной формулы, Математика в школе, № 2, 1981, 80 с.
10. *Кушнир И. А.* О применении двух векторных формул. Математика в школе № 1, 1985, 80 с.
11. *Кушнір І. А.* Розв'язання задач за допомогою повороту вектора на 90°, зб. У світі математики, N 19, Рад. шк., 1990, 210 с.
12. *Кушнір І. А.* Трикутник і тетраедр у задачах, К., Рад. шк., 1991, 201 с.
13. *Майоров В. М., З. А. Скопец.* Задачник — практикум по векторной алгебре, М., Учпедгиз, 1961, 150 с.
14. *Майоров В. М., Скопец З. А.* Векторные решения геометрических задач. М., Просвещение, 1968, 250 с.
15. *Скопец З. А.* Геометрические миниатюры, М., Просвещение, 221 с.

И. А. Кушнир

ВЕКТОРНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Сдано в набор 10.06.94. Подписано в печать 26.12.94. Формат $60 \times 84^{1}/_{16}$. Бумага тип. Гарнитура лит. Высокая печать. Усл. печат. листов Зак. 4—1185.

Издательство «Оберег» 252050 Киев-50, ул. Дехтяревская, 3.

Головное предприятие республиканского производственного объединения «Полиграфкнига», 252057, Киев-57, ул. Довженко 3.