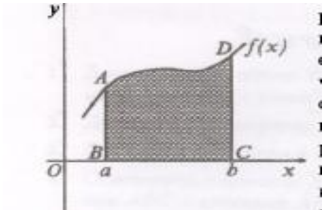
Лекция: Определенный интеграл

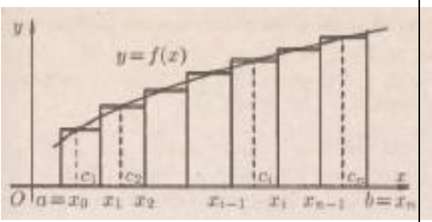
1. Введение.

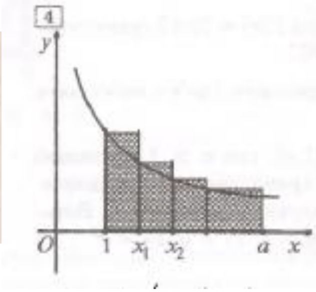
Рассмотрим график функции $y = f(x)$ непрерывной на отрезке $[a;b]$ и вычислим площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 0, y = f(x), x = a, x = b.$ Эту фигуру будем называть криволинейной трапецией.

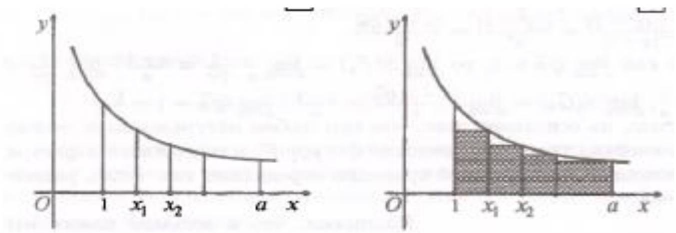


Рассмотрим разбиение T отрезка $[a;b]$: $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b.$ Для каждого разбиения T наибольшее значение Δx_i будем обозначать $\lambda.$ Величина λ характеризуется тем, что $\lambda \to 0 \Leftrightarrow \Delta x_i \to 0 \forall i.$

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot \Delta x_i \,,\ S = \lim_{n\to\infty} S_n.$$







Определение. ***Интегральной суммой*** называется сумма $\sigma(n)=\sum_{i=0}^{n} f(t_i\cdot)\cdot\Delta x_i$, где $x_i<t_i<x_{i+1}$

Конечный предел интегральных сумм при $\lambda\to 0$ называется определенным интегралом: $I=\int_a^b f(t)dt.$ Функция называется интегрируемой на $[a;b]$, если определенный интеграл I существует.

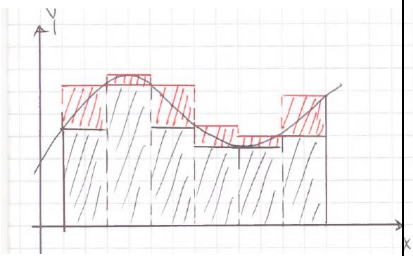
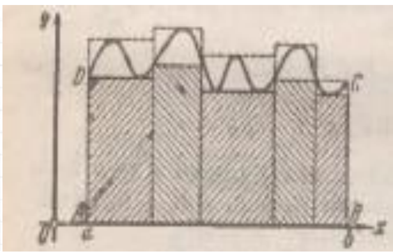
Число a называется нижним пределом интегрирования, $b-$ верхним пределом интегрирования.

2. Суммы Дарбу.

Рассмотрим разбиение T отрезка $[a;b]$: $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b.$

Обозначим через $m_i=\min\limits_{\Delta x_i} f(x),\ M_i=\max\limits_{\Delta x_i} f(x).$ Тогда $m_i\le f(t_i)\le M_i$.

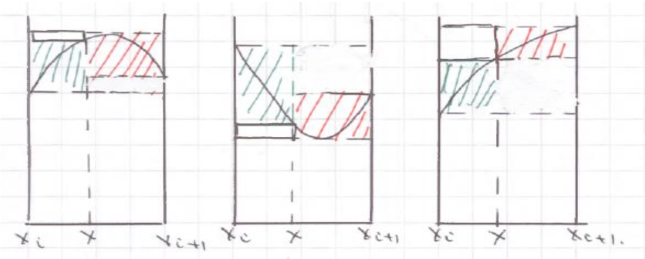
Нижней суммой Дарбу будем называть сумму вида $\underline{s}_T=\sum_{i=0}^{n} m_i\cdot\Delta x_i$, верхней суммой Дарбу – сумму $\overline{S}_T=\sum_{i=0}^{n} M_i\cdot\Delta x_i$. Тогда $\underline{s}_T\le I\le\overline{S}_T$.

Утв.1 ***Свойства сумм Дарбу:***

1) $\underline{s}_T \leq \overline{S}_T$.

2) Если к данному разбиению T добавить точку и получить разбиение то $T_1:[x_k; x_{k+1}]=[x_k;\, x][x;\, x_{k+1}]$, то нижняя сумма увеличится, а верхняя – уменьшится, т.е. $\underline{s}_{T_1} \geq \underline{s}_T$, $\overline{S}_{T_1} \leq \overline{S}_T$



3) Для любых двух разбиений T_1 и T_2 отрезка $[a;b]$ справедливо неравенство $\underline{s}_{T_1} \leq \overline{S}_{T_2}$.

Доказательство пункта 3 .Пусть $T=T_1 \cup T_2$. Тогда имеет место цепочка неравенств $\underline{s}_{T_1} \leq \underline{s}_T \leq \overline{S_T} \leq \overline{S}_{T_2}$

Таким образом, $\{\underline{s_T}\}$– возрастающая последовательность, а $\{\overline{S_T}\}$– убывающая и существует число, разделяющее два множества.

Утв.2 (***Необходимое и достаточное условие интегрируемости)***

$f(x)$ интегрируема $\Leftrightarrow \overline{S}_T - \underline{s}_T \to 0 \Leftrightarrow$ для любого ε существует разбиение, для которого $\overline{S}_T - \underline{s}_T < \varepsilon$.

$\overline{S}_T - \underline{s}_T = \sum_{i=0}^{n}(M_i - m_i)\Delta x_i = \sum_{i=0}^{n}\omega_i \cdot \Delta x_i$, где величина ω_i называется колебанием функции.

Теорема. Если $f(x)-$ монотонная функция, то $\overline{S}_T - \underline{s}_T \to 0.$

Доказательство. Пусть $f(x)-$ возрастает. Рассмотрим разбиение T отрезка $[a;b]$: $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b.$ Тогда $m_1 = f(a), M_1 = m_2, M_2 = m_3, ..., M_{n-1} = m_n.$

Тогда

$$\overline{S}_T - \underline{s}_T = \sum_{i=0}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i \le \lambda \cdot (M_1 - m_1 + M_2 - m_2 + ... + M_n - m_n) =$$

$= \lambda \cdot (f(b) - f(a)).$ Отсюда следует, что $\overline{S}_T - \underline{s}_T \to 0$ при $\lambda \to 0.$

Следствие1. Если $f(x)-$ непрерывная функция, то $\overline{S}_T - \underline{s}_T \to 0.$

Доказательство. Разобъем отрезок $[a;b]$ на интервалы монотонности: $[a;b]$: $a = c_0 < c_1 < c_2 < ... < c_{n-1} < c_n = b.$ На каждом интервале $f(x)$ монотонна и из доказательства теоремы можно получить следующие неравенства:

$\overline{S}_1 - \underline{s}_1 < \lambda \, | \, f(c_1) - f(a)|,$

$\overline{S}_2 - \underline{s}_2 < \lambda \, | \, f(c_2) - f(c_1)|,$ $\overline{S}_3 - \underline{s}_3 < \lambda \, | \, f(c_3) - f(c_2)|....$ и т.д.

Т.е. $\overline{S}_T - \underline{s}_T \le \lambda \cdot M,$ где $M-$ некоторая константа.

Следствие2. Если $f(x)-$ непрерывная функция на отрезке $[a;b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

3. Свойства определенного интеграла.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Теорема (о среднем). Если $f(x)-$ непрерывна на $[a;b]$, то существует точка $c\in(a;b)$ такая, что $\int\limits_a^b f(x)dx=f(c)\cdot(b-a)$.

Доказательство. Пусть m и M - наименьшее и наибольшее значение функции на отрезке $[a;b]$. Тогда

$$m\cdot(b-a)\le\int\limits_a^b f(x)dx\le M\cdot(b-a)\Rightarrow m\le\frac{1}{b-a}\cdot\int\limits_a^b f(x)dx\le M\Rightarrow$$

$\dfrac{1}{b-a}\cdot\int\limits_a^b f(x)dx$ $-$промежуточное значение непрерывной функции $f(x)$, которое достигается в некоторой точке c.

Т.е. $f(c)=\dfrac{1}{b-a}\cdot\int\limits_a^b f(x)dx$.

4. Дифференцирование интеграла по верхнему пределу.

Рассмотрим функцию $\Phi(x)=\int\limits_a^x f(t)dt,\ x\in(a;b)$.

Теорема. Если $f(x)-$ непрерывна на $[a;b]$, то $F(x)-$ дифференцируема на $(a;b)$ и $\Phi(x)=f(x)$.

($F(x)-$ первообразная для функции $f(x)$)

Доказательство. $\Delta F=F(x+\Delta x)-F(x)=\int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt$.

По теореме о среднем существует значение $c\in(x;x+\Delta x)$ такое, что $\Delta F=\int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt=f(c)\cdot\Delta x$.

Отсюда получаем, что $\dfrac{\Delta F}{\Delta x}=f(c)\to f(x)$ при $\Delta x\to 0$.

Формула Ньютона-Лейбница

Если $f(x)-$ непрерывная функция на $[a;b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$, где $F(x)-$ первообразная для $f(x)$.

$$\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)dt = F(x)+C \Rightarrow \Phi(a)=0 \Rightarrow C=-F(a).$$

$$\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)dt = F(x)-F(a) \Rightarrow \int\limits_a^b f(t)\,dt = F(b)-F(a).$$

Свойства определенного интеграла

1. $\int\limits_a^b (f(t)+g(t))\,dt = \int\limits_a^b f(t)dt + \int\limits_a^b g(t)dt$

2. $\int\limits_a^b \lambda\cdot f(t)\,dt = \lambda\cdot\int\limits_a^b f(t)dt$

3. Если $f(x)>0$, то $\int\limits_a^b f(t)dt > 0.$

4. Если $f(x)>g(x)$, то $\int\limits_a^b f(t)dt > \int\limits_a^b g(x)\,dx$

5. Формула интегрирования по частям в определенном интеграле $\int\limits_a^b u\cdot v'dx = uv - \int\limits_a^b u'\cdot v\,dx$

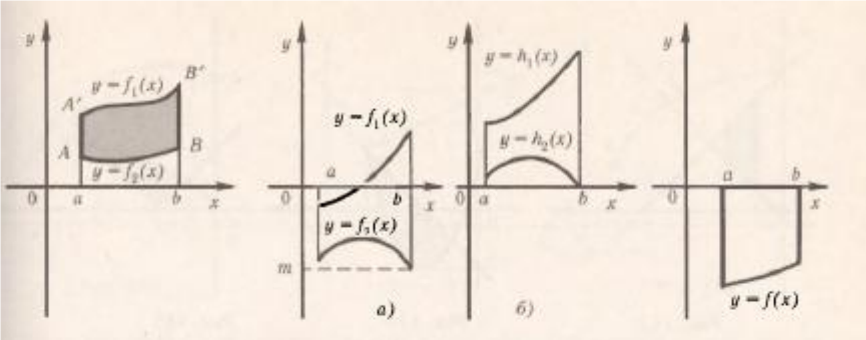
6. Формула замены переменных в определенном интеграле

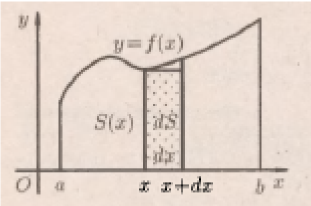
Если $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, $x=\varphi(t), t\in[\alpha;\beta]$, $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$, то $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int\limits_a^b f(x)dx$

Доказательство следует из формулы $F'(\varphi(t)) = f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$

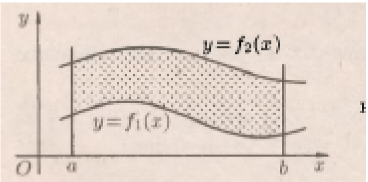
Приложение

Вычисление площадей





$$S = \int_a^b f(x)\,dx \quad \text{или} \quad S = \int_a^b y\,dx.$$



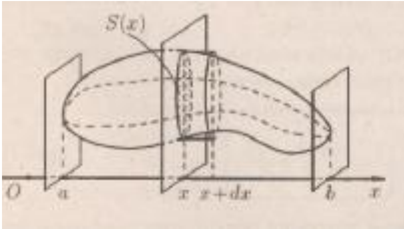
$$S = \int_a^b f_2(x)\,dx - \int_a^b f_1(x)\,dx = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))\,dx.$$

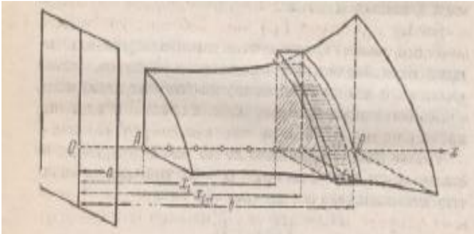
Вычисление объемов

Пусть в пространстве задано тело V и известны площади $S(x)$ его сечений плоскостями, перпендикулярными оси

OX и проходящими через точку x. Тогда объем тела выражается формулой

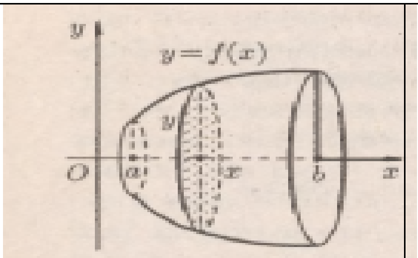
$$V = \int_a^b S(x)dx$$

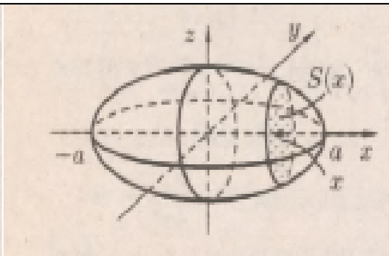


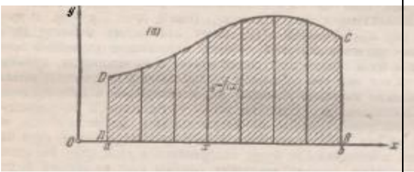


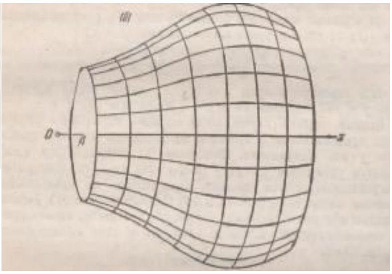
Объем тел вращения.

Если тело V получено вращением кривой $y = f(x)$ вокруг оси OX, то площадь сечения равна $S(x) = \pi y^2$, а объем тела V вычисляется по формуле $V = \pi \int_a^b y^2 dy$









Примеры.

1. $\int\limits_{0,5}^{1,5} \frac{dx}{4x^2-4x+5} =$

2. $\int\limits_{1}^{2} xe^x dx =$

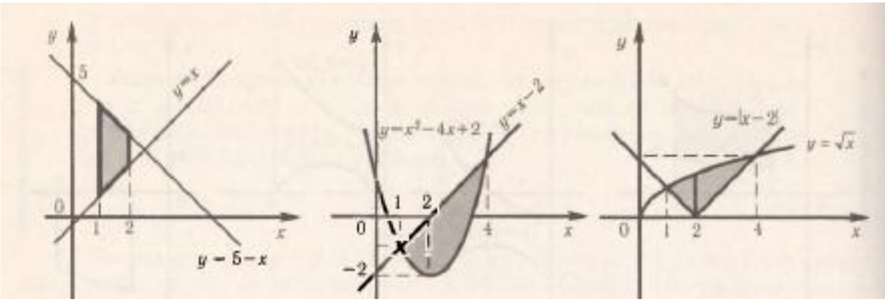
3. $\int\limits_{-18}^{3} \sqrt[3]{2-\frac{x}{3}}\, dx =$

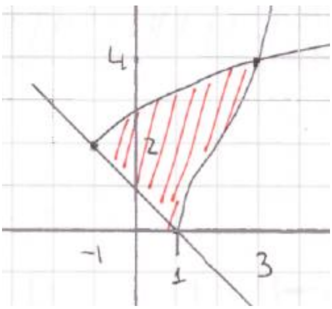
4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = x,\ y = 5 - x,\ x = 1,\ x = 2.$

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = x - 2,\quad y = x^2 - 4x,+2.$

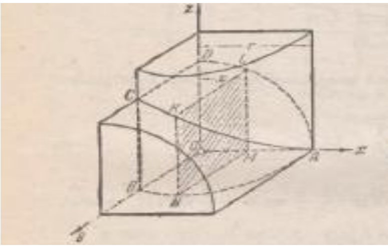
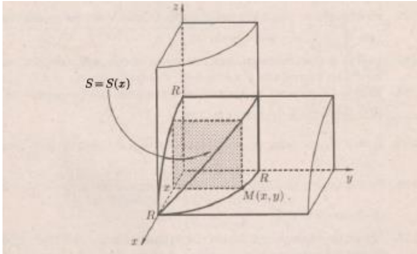
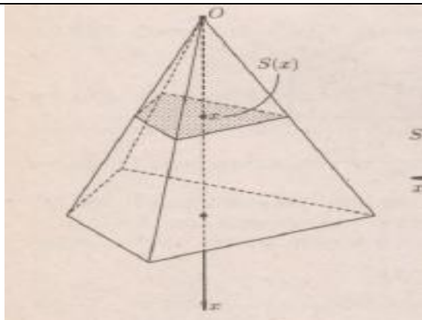
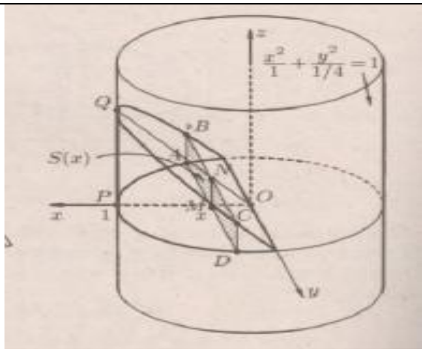
6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = \sqrt{x},\ y = |x - 2|.$

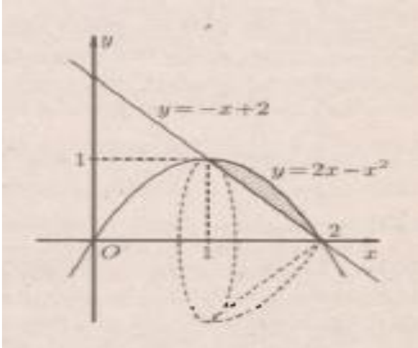
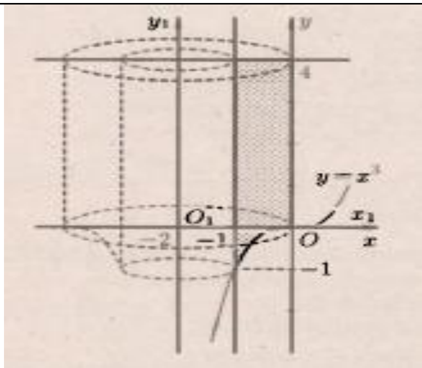
7. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = 1 - x,\ y = \sqrt{x+1} + 2,\ y = 2(x-2)^3 + 2.$

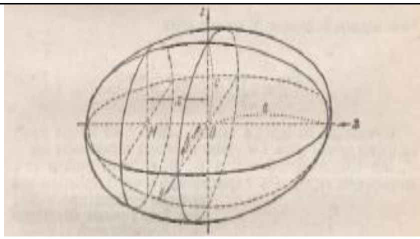




8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = 2^x$, $y = -x + 3$.

9.Найдите объем тела, ограниченного двумя цилиндрами $x^2 + y^2 = R^2$, $x^2 + z^2 = R^2$. 	
10.Найдите объем пирамиды, у которой площадь основания равна S и высота равна H.	
11. Найдите объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + 4y^2 = 1$, $z = x\,(x \geq 0)$, $z = 0$.	

12. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной графиками функций $y=2x-x^2,\ y=-x+2$	
13. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг прямой $x=-2$ области, ограниченной графиками функций $y=x^3,\ x=-1, x=0,\ y=4$	

14. Вычислить объем тела, полученного вращением эллипса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ вокруг оси OX.	
Т.е. графика $y^2=\dfrac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$ вокруг оси OX.	$V=\dfrac{4}{3}\pi ab^2$
Вокруг оси OY.	$V=\dfrac{4}{3}\pi ba^2$

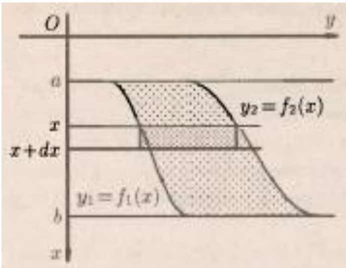
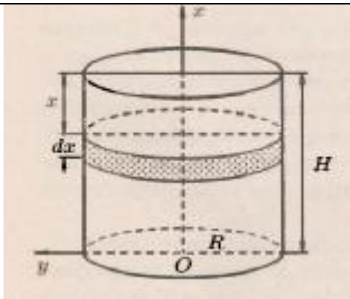
Приложение определенного интеграла для решения физических задач

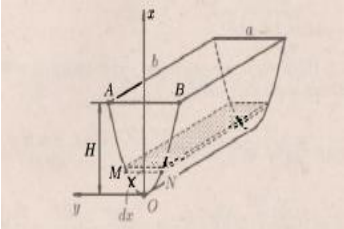
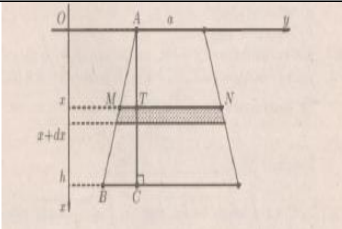
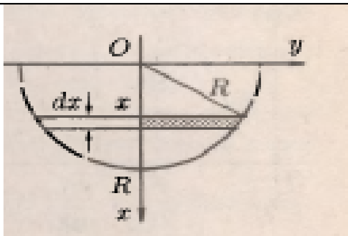
а) Путь, пройденный телом, двигающимся со скоростью $v(x)$ за промежуток времени $[t_1;t_2]$, выражается формулой

$$V=\int_a^b S(x)dx$$

б) Работа переменной силы, заданной формулой $F=F(x)$, и направленной вдоль оси OX на отрезке $[a;b]$ равна

$$V=\int_a^b F(x)dx$$

в) Давление жидкости на вертикальную пластину, ограниченную линиями $x=a, x=b, y=f_1(x), y=f_2(x)$, вычисляется по формуле $P=g\gamma\int_a^b (f_1(x)-f_2(x))\cdot x\,dx$	
г) Давление жидкости на горизонтальную пластину по «закону Паскаля» равно весу столба этой жидкости, и $P=g\gamma S h$, где $\gamma-$плотность жидкости, $S-$ площадь пластины, $h-$ глубина погружения.	

15. Найдите работу, которую нужно затратить, чтобы выкачать жидкость плотностью γ из цистерны, имеющей форму параболического цилиндра.	
16. Найдите давление воды плотностью γ на вертикальную пластину, имеющую форму трапеции с верхним основанием, лежащим на поверхности воды.	
17. Найдите давление воды плотностью γ на круглый иллюминатор диаметром D, наполовину погруженный в воду.	
18. Найдите работу, которую нужно затратить, чтобы растянуть пружину с одним укрепленным концом жесткости c на расстояние S.