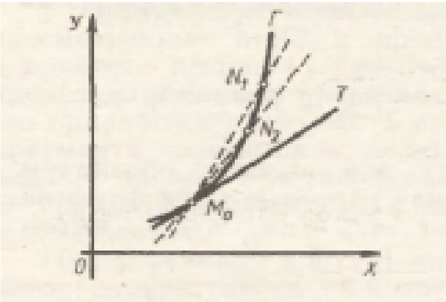
Лекция: Основы дифференциального исчисления (Конспект лекции)

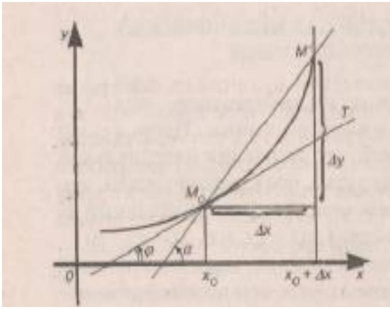
1. Производная

Рассмотрим график непрерывной функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$, $M_0M_1 -$ секущая графика. Тогда $tg\alpha = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ – тангенс угла наклона секущей. Предельное положение секущей при $\Delta x \to 0$ будем называть касательной.

Определение. **Производной функции** $y = f(x)$ в точке x_0 называется значение $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, если этот предел существует.

Геометрический смысл производной – тангенс угла наклона касательной.





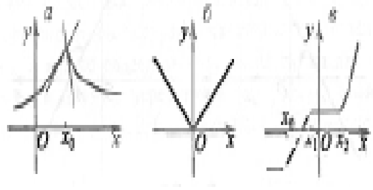
Физический смысл производной – скорость изменения функции.

Если рассмотреть свободное падение тела с ускорением g, то путь пройденный телом за время t определяется формулой $S = \dfrac{g\,t^2}{2}$, $\Delta S = \dfrac{g}{2}(t + \Delta t)^2 - \dfrac{g}{2}t^2 = gt \cdot \Delta t + \dfrac{g}{2}(\Delta t)^2$. Тогда

$\dfrac{\Delta S}{\Delta t} = g\,t + \dfrac{g}{2}\cdot\Delta t \to gt.$ Таким образом, значение производной равно скорости тела в момент времени t.

Если в данной точке существует касательная, то в этой тоске существует и производная. И наоборот.

А если в данной точке графика нельзя построить касательную, то в этой точке и не существует производной.



Уравнение касательной

Прямая, проходящая через точку $(x_0; y_0)$ с угловым коэффициентом k, задается уравнением $Y = k\,(x - x_0) + y_0$.

Учитывая геометрический смысл производной, получим уравнения касательной к графику в точке $(x_0; f\,(x_0))$

$Y = f\,'(x_0)\cdot(x - x_0) + f\,(x_0).$

<u>Утв.</u>1 *Производные элементарных функций*

Алгоритм нахождение производной функции:

а) Вычислим отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f\,(x + \Delta x) - f\,(x)}{\Delta x}$

в) Вычислим предел $f\,'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}.$

1) $y = kx + b,\ \Delta y = k\cdot\Delta\,x,\ \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = k \Rightarrow (kx + b)' = k.$

2) $y = x^2,\ \Delta y = 2x\cdot\Delta\,x + (\Delta x)^2,\ \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x \Rightarrow (x^2)' = 2x.$

3) $y=\dfrac{1}{x},\ \Delta y=\dfrac{-\Delta x}{(x+\Delta x)\,x},\ \ \dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{-1}{(x+\Delta x)\,x}\ \Rightarrow\ (\dfrac{1}{x})'=\dfrac{-1}{x^2}.$

4)
$$y=\sin x,\ \Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos(x+\frac{\Delta x}{2}),$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos(x+\Delta x)\ \Rightarrow(\sin x)'=\cos x.$$

5)
$$y=\cos x,\ \Delta y=\cos(x+\Delta x)-\cos x=-2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\sin(x+\frac{\Delta x}{2}),$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\sin(x+\Delta x)\ \Rightarrow(\cos x)'=-\sin x.$$

6) $y=a^x,\ \dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x}=a^x\ \dfrac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}\Rightarrow(a^x)'=a^x\cdot\ln a.$

7)
$$y=x^{\alpha},\ \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x+\Delta x)^{\alpha}-x^{\alpha}}{\Delta x}=x^{\alpha}\cdot\frac{(1+\frac{\Delta x}{x})^{\alpha}-1}{x\cdot\frac{\Delta x}{x}}\Rightarrow(x^{\alpha})'=\alpha\cdot x^{\alpha-1}.$$

8)
$$y=\log_a x,\ \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x}=\frac{\log_a(1+\frac{\Delta x}{x})}{\Delta x}\Rightarrow(\log_a x)'=\frac{\log_a e}{x}$$

9) $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$

Замечание: Доказательство пределов, используемых в утверждениях 6)- 8) приведено в Утв.7

Определение. *Функция* $y=f(x)$ называется дифференцируемой в точке x_0, если в этой точке существует производная.

__Определение.__ *Функция* $y = f(x)$ называется дифференцируемой на отрезке $(a;b)$, если в каждой точке этого отрезка существует производная.

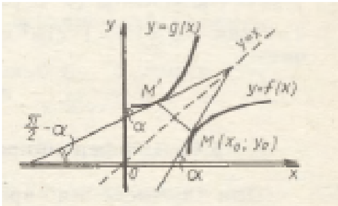
__Утв.2__ (Производная обратной функции)
Если функция $y = f(x)$ *непрерывна и дифференцируема на отрезке* $(a;b)$ *и существует обратная функция* $f^{-1}(y)$, то

$$\left(f^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{f'(x)} = \left(f'(x)\right)^{-1}$$

Действительно,

$$f^{-1}(y) = g(y) = x, \Delta g = \Delta x,$$

$$\frac{\Delta g}{\Delta y} = \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x)}$$



Например: $y = \ln x, x = e^y,\ y^{-1} = e^y,\ \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{1}{\dfrac{\Delta x}{\Delta y}} = \dfrac{1}{e^y} = \dfrac{1}{x}$

$$y = \arccos x, x = \cos y,\ y^{-1} = \cos y,\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\dfrac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{-\sin y} = \frac{1}{-\sqrt{1-x^2}}$$

$$y = arctg x, x = tg\, y,\ y^{-1} = tg\, y,\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\dfrac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\dfrac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y = \frac{1}{1+x^2}$$

__Утв.3__ Если функция $y = f(x)$ имеет конечную производную в точке x_0, то справедлива формула:

$$\boxed{\Delta y = f'(x_0)\cdot\Delta x + \alpha\cdot\Delta x,}$$

где $\alpha-$ бесконечно малая от Δx.

Действительно, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \to f'(x_0) \Rightarrow \dfrac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0) = \alpha(\Delta x) \to 0$.

<u>Следствие</u> (Связь между непрерывностью и производной)

Если функция $y = f(x)$ имеет конечную производную в точке x_0, то $f(x)-$ непрерывна в этой точке.

Действительно, из Утверждения 2 следует, что $\Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Обратное утверждение не верно.

Дифференцируемые функции называют гладкими функциями.

<u>Утв.</u>4 Арифметические операции над производными

Если функция f' и g' существуют, то:

1) $(cf)' = c \cdot f'$
2) $(f+g)' = f' + g'$
3) $(f \cdot g)' = f \cdot g' + f'g$
4) $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$

Докажем 3) Пусть $y = f(x) \cdot g(x)$. Тогда

$$\Delta y = f(x+\Delta x) \cdot g(x+\Delta x) - f(x) \cdot g(x) =$$

$$= f(x+\Delta x) \cdot g(x+\Delta x) - f(x) \cdot g(x) + f(x+\Delta x) g(x) - g(x) f(x+\Delta x) =$$

$$= f(x+\Delta x) \cdot \Delta g + \Delta f \cdot g(x)$$

Наконец, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f(x+\Delta x) \cdot \dfrac{\Delta g}{\Delta x} + g(x) \cdot \dfrac{\Delta f}{\Delta x} \to f \cdot g' + f' \cdot g$.

Докажем 4)

$$\Delta y = \frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x+\Delta x) g(x) - f(x) g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x) g(x)}$$

$$= \frac{f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)\,g(x)} =$$

$$= \frac{\Delta f \cdot g(x) - \Delta g \cdot f(x)}{g(x+\Delta x)\,g(x)}$$

Утв.5 (Производная сложной функции)

Пусть $y = f(x)$, $x = \varphi(t)$. *Если функция* $y = f(x)$ *имеет конечную производную в точке* x_0, *а функция* $x = \varphi(t)$ *имеет конечную производную в точке* t_0 $(\varphi(t_0) = x_0)$, *то функция* $y = f(\varphi(t))$ *имеет конечную производную в точке* t_0, *причем*

$$\boxed{f'(\varphi(t_0)) = f'(x_0)\cdot\varphi'(t_0)}$$

Доказательство. Из Утверждения 2 следует, что $\Delta y = f'(x_0)\cdot\Delta x + \alpha\cdot\Delta x$, $\Delta x = \varphi'(t_0)\cdot\Delta t + \beta\cdot\Delta t$, где $\alpha -$ бесконечно малая от Δx, а $\beta -$ бесконечно малая от Δt.

Тогда $\Delta y = f'(x_0)\cdot(\varphi'(t_0)\cdot\Delta t + \beta\cdot\Delta t) + \alpha\cdot(\varphi'(t_0)\cdot\Delta t + \beta\cdot\Delta t)$.

Отсюда и из условий $\Delta t \to 0 \Rightarrow \Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta y \to 0$ получаем, что

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = f'(x_0)\cdot\varphi'(t_0) + f'(x_0)\cdot\beta + \alpha\cdot\varphi'(t_0) + \alpha\cdot\beta \to f'(x_0)\cdot\varphi'(t_0).$$

Например

$y = (x^2+2x+3)^2$, $y = t^2, t = x^2+2x+3 \Rightarrow y = 2t\cdot(x^2+2x+3)' =$
$= 2(x^2+2x+3)\cdot(2x+2)$;

$$y = \sin(\sqrt{x}+1), y = \sin t\ t = \sqrt{x}+1 \Rightarrow y' = \cos t\cdot t' = \cos(\sqrt{x}+1)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$y = \ln\sin x, y = \ln t, t = \sin x \Rightarrow y' = \frac{1}{t}\cdot t' = \frac{1}{\sin x}\cdot\cos x = ctg\,x;$$

$$y = e^{x^2}, y = e^t, t = x^2 \Rightarrow y' = e^t\cdot t' = e^{x^2}\cdot 2x;$$

$$y = \cos ax, y = \cos t, t = ax \Rightarrow y' = -\sin t\cdot(ax)' = -\sin ax\cdot a;$$

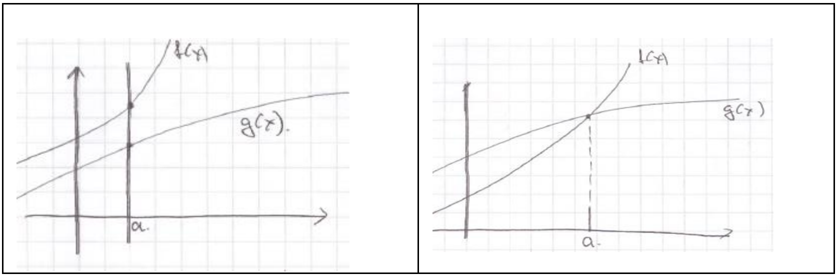
$$y = arctg\frac{1}{x}, y = arctgt,\ t = \frac{1}{x} \Rightarrow y' = \frac{1}{1+t^2}\cdot(\frac{1}{x})' = \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{-1}{x^2} = \frac{-1}{1+x^2};$$

$$y = e^{(x^2+1)^2}, y = e^t, t = z^2, z = x^2+1 \Rightarrow y' = e^t\cdot 2z\cdot 2x = e^{(x^2+1)^2}\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x.$$

Утв.6 (Приложения)

1) Если для двух дифференцируемых функций справедливы условия $f(a) > g(a)$ *и* $f'(x) > g'(x)$, *то* $f(x) > g(x)$ *для всех* $x > a$.

2) Если для двух дифференцируемых функций справедливы условия $f(a) = g(a)$ *и* $f'(x) > g'(x)$ *для всех* $x > a$, *то уравнение* $f(x) > g(x)$ *для всех* $x > a$.



Утв.7 (Замечательные пределы)

Справедливы утверждения:

1) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x} = \ln a$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^p-1}{x} = p.$

Доказательство. Предел 1) доказан во втором полугодии.

Докажем 2): $\dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a(1+x)^{\frac{1}{x}} \to \log_a e$

Докажем 3): Обозначим $a^x - 1 = y$. Тогда

$$a^x = 1 + y,\ x = \log_a(1+y),$$

$$\frac{a^x - 1}{x} = \frac{y}{\log_a(1+y)} \to \frac{1}{\log_a e} = \ln a.$$

Докажем 4): Обозначим $(1+x)^p - 1 = y$. Тогда

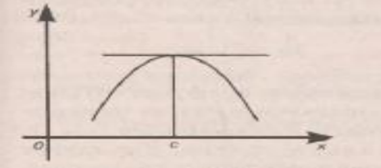
$$(1+x)^p = 1 + y,\ p\ln(1+x) = \ln(1+y),$$

$$\frac{(1+x)^p - 1}{x} = \frac{y}{x} = \frac{y \cdot \ln(x+1) \cdot p}{\ln(y+1) \cdot x} \to p.$$

2. Основные теоремы дифференциального исчисления

<u>**Теорема**</u> **Ферма.** *Если непрерывная функция $f(x)$ в некоторой точке c имеет локальный максимум (локальный минимум) и имеет в этой точке конечную производную $f'(c)$, то $f'(c) = 0$.*

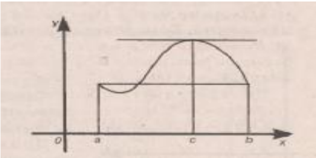
Доказательство. Пусть в точке c функция имеет локальный максимум. Тогда $f(x) \le f(c)$ в некоторой окрестности точки c. Рассмотрим знак выражения $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}$. Если $x > c$, то $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} < 0$, а если $x < c$, то $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0$.

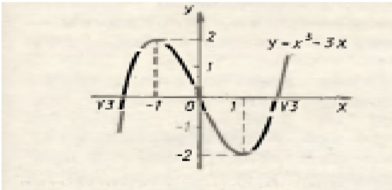
	Так как производная в точке c существует, то пределы справа и слева равны, т.е. производная равна нулю.

<u>Теорема</u> Ролля. *Пусть функция* $f(x)$ *определена и непрерывна на отрезке* $[a;b]$, *дифференцируема на отрезке* $(a;b)$ *и* $f(a)=f(b)$. *Тогда существует точка* $a<c<b$, *в которой* $f'(c)=0$.

(Существует точка, в которой производная равна нулю, а касательная параллельна оси OX)

Доказательство. $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a;b] \Rightarrow$ $f(x)$ достигает на $[a;b]$ наибольшего и наименьшего значений M и m. Если $M=m$, то $f(x)$ постоянна на этом отрезке и $f'(x)=0$ для всех x.

	Если $M>m$, то одно из этих значений достигается внутри $(f(a)=f(b))$, а по теореме Ферма производная в этой точке будет равна нулю.

<u>Следствие</u>1. *Между каждыми двумя корнями дифференцируемой функции расположен хотя бы один корень производной.*	

<u>Следствие2</u>. Если x_0 - *кратный корень функции* $f(x)$, *то* x_0 *- корень производной.*

Действительно, если $f(x)=(x-x_0)^k \cdot g(x)$, то $f'(x)=k(x-x_0)^{k-1}\cdot g(x)+(x-x_0)^k g'(x)$ и $f'(x_0)=0$.

<u>Пример</u> 1. Докажите, что уравнение $e^x=ax^2+bx+c$ имеет не более трех корней.

Решение. Пусть уравнение $e^x-ax^2-bx-c=0$ имеет более 4-х корней. Тогда (из т. Ролля) уравнение

$e^x - 2ax + b = 0$ имеет более трех корней, уравнение $e^x - 2a = 0$ имеет более 2-х корней, а уравнение $e^x = 0$ имеет хотя бы один корень. Противоречие.

Пример 2. Решите уравнение $3 \cdot 2^{x-2} - 7x = 17$.

Решение. Так как уравнение не имеет алгебраического решения, то корни можно легко подобрать: $x = -2, x = 1$. Докажем, что других корней нет. Пусть уравнение $3 \cdot 2^{x-2} - 7x - 17 = 0$ имеет более 3-х корней. Тогда уравнение $3 \cdot 2^{x-2} \cdot \ln 2 - 7 = 0$ должно иметь 2 корня, но это неверно.

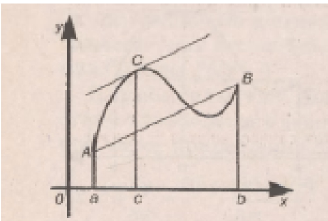
Теорема Лагранжа

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема на отрезке $(a; b)$. Тогда существует точка $a < c < b$, в которой

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию $F(x) = f(x) - f(a) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$.

Легко проверить, что $F(a) = F(b) = 0$, и $F'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$, но тогда по теореме Ролля



существует точка c такая, что

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

Касательная в точке c параллельна секущей, проходящей через точки $(a; f(a)), (b; f(b))$.

Следствие 1. (Формула конечных приращений)

$$\Delta f = f'(c) \cdot \Delta x.$$

Следствие 2. (Связь между дифференцируемостью и непрерывностью)

Если функция дифференцируема на отрезке, то она непрерывна на этом отрезке.

Пример 3. Прямая $y=kx+d$ пересекает график функции $y=a^x$ не более чем в двух точках.
Доказательство. Пусть прямая пересекает график функции в 3-х точках x_1, x_2, x_3. Тогда (по теорема Лагранжа) на отрезках $(x_1;x_2)$ и $(x_2;x_3)$ существую точки c_1, c_2, в которых касательные параллельны прямой $y=kx+d$, т.е. производные в этих точках равны k. Если $a>1$, $c_1<c_2$, то $k=f'(c_1)=a^{c_1}\cdot\ln a<f'(c_2)=a^{c_2}\cdot\ln a=k$. В случае $a<1$ знак в последнем неравенстве сменится на противоположный. Противоречие.

3. Формула Тейлора для многочленов

Рассмотрим многочлен $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$.
Вычислим производные этого многочлена:

$$P'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots+na_nx^{n-1};$$

$$P''(x)=2a_2+6a_3x+12a_4x^2+\ldots+n(n-1)\,a_nx^{n-2};$$

$$P'''(x)=6a_3+24a_4x+\ldots+n(n-1)(n-2)\,a_nx^{n-3};$$

.

.

$$P^{(n)}(x)=n(n-1)(n-2)\ldots2a_n.$$

При $x=0$ получим следующие равенства:

$$P'(0)=a_1,\; P''(0)=2a_2,\; P'''(0)=6a_3,\ldots,\; P^{(n)}(x)=n!a_n.$$

Отсюда

$$a_0=P(0),\, a_1=P'(0),\; a_2=\frac{P''(0)}{2!},\; a_3=\frac{P'''(0)}{3!},\; \ldots.a_n=\frac{P^{(n)}}{n!}.$$

Таким образом, многочлен $P(x)$ можно представить следующим образом

$$P(x)=P(0)+P'(0)\cdot x+\frac{P''(0)}{2!}\cdot x^2+\frac{P'''(0)}{3!}\cdot x^3+\frac{P^{(k)}(0)}{k!}\cdot x^k+\frac{P^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n$$

Или в виде

$$P(x)=P(c)+P'(c)\cdot(x-c)+\frac{P''(c)}{2!}\cdot(x-c)^2+\frac{P'''(c)}{3!}\cdot(x-c)^3+$$

$$\frac{P^{(k)}(c)}{k!}\cdot(x-c)^k+\frac{P^{(n)}(c)}{n!}\cdot(x-c)^n$$

Если рассмотреть дифференцируемую функцию $f(x)$ и для нее построить ряд Тейлора

$$P(x)=f(0)+f'(0)\cdot x+\frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2+\frac{f'''(0)}{3!}\cdot x^3+\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\cdot x^k+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n$$

то $f(x)-P(x)=r_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(d)}{n!}\cdot x^{n+1}$ и можно рассматривать приближения функций многочленами с точностью, достаточной для решения большинства прикладных задач.

Рассмотрим приближенные значения некоторых функций.

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}\cdot x^2+\frac{1}{3!}\cdot x^3+\frac{1}{k!}\cdot x^k+\frac{1}{n!}\cdot x^n+r_n(x);$$

$$\sin x = x-\frac{1}{3!}\cdot x^3+\frac{1}{5!}\cdot x^5-\frac{x^7}{7!}\;.....$$

$$\cos x = 1-\frac{1}{2!}\cdot x^2+\frac{1}{4!}\cdot x^4-.....$$

$$\ln x=x-\frac{1}{2!}\cdot x^2+\frac{1}{3!}\cdot x^3-\ldots(-1)^k\frac{1}{k!}\cdot x^k+(-1)^n\frac{1}{n!}\cdot x^n+r_n(x);$$

4. Исследование функций с помощью производных

<u>Теорема</u> о постоянной функции

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a;b]$ и $f'(x)=0$ для всех $x\in(a;b)$. Тогда $f(x)=const$.

Доказательство. Из теоремы Лагранжа для любого $x \in (c;d) \subset (a;b) \Rightarrow \Delta y = f'(x_0)\cdot \Delta x = 0.$

Физический смысл теоремы: Если скорость точки в каждый момент времени равна нулю, то точка находится в состоянии покоя.

Следствие. *Если для всех* $x \in (a;b)$ $f'(x) = g'(x)$, *то* $f(x) - g(x) = const.$

Действительно, функция $F(x) = f(x) - g(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a;\, b]$ и $F'(x) = 0$ для всех $x \in (a;b)$. Тогда $F(x) = const.$

<u>Пример</u> 4. Найдите все пары чисел $(a;b)$, при которых функция $f(x) = \dfrac{(2a+3b)x+a+2b}{ax+b}$ постоянна в области определения.

Решение. Так как функция постоянна, то ее производная должна быть равна нулю в любой точке:

$$f''(x) = \frac{(2a+3b)(ax+b) - a((2a+3b)x+a+2b)}{(ax+b)^2} = \frac{3b^2 - a^2}{(ax+b)^2} = 0.$$

Ответ: $3b^2 - a^2 = 0.$

<u>Теорема</u> (условие монотонности)

Если функция $f(x)$ *определена и непрерывна на отрезке* $[a;\, b]$ *и* $f'(x) > 0$ *для всех* $x \in (a;b)$, *то* $f(x)$*– возрастает.*

(Если $f'(x) < 0$ *для всех* $x \in (a;b)$, *то* $f(x)$*– убывает)*

Доказательство. Для любых $x_1 > x_2$ из теоремы Лагранжа получаем: $f(x_1) - f(x_2) = f'(c)\cdot(x_1 - x_2) > 0.$

<u>Пример</u> 5. Определите промежутки монотонности функции $f(x) = x^3 - 3x.$

Решение. Решим неравенство $f'(x) = 3(x^2 - 1) > 0.$

Если $x^2-1>0,$ то $f(x)-$возрастает, а если $x^2-1<0,$ то $f(x)-$ убывает.

<u>Пример</u> 6. Определите промежутки монотонности функции $f(x)=arctgx-x.$

Решение. Так как $f'(x)=\dfrac{1}{x^2+1}-1=\dfrac{-x^2}{x^2+1}<0,$ то $f(x)-$ убывает в области определения.

Точки экстремума

<u>Определение.</u> *Точка x_0 является точкой является точкой локального максимума (локального минимума) функции $f(x)$, если существует окрестность точки x_0 такая, что для всех $x\in(x_0-\varepsilon;x_0+\varepsilon)$* выполняется неравенство $f(x)<f(x_0)$ $(f(x)>f(x_0)).$

<u>Определение.</u> *Точка x_0 называется точкой экстремума функции $f(x)$, если точка x_0 является точкой локального минимума или точкой локального максимума функции.*

Необходимое условие экстремума.

Если x_0- точка экстремума функции $f(x)$ и в этой точке существует производная, то $f'(x_0)=0.$

Обратное утверждение не верно. Для функции $y=x^3, y'=3x^2=0\Rightarrow x=0,$ однако, $x_0=0$ не является точкой максимума функции.

Если x_0- точка экстремума функции $f(x)$, то производная $f'(x)$ меняет знак при переходе через эту точку.

Если x_0 является точкой является точкой локального максимума функции $f(x)$, то $f'(x)>0$ при $x<x_0$ и $f'(x)<0$ при $x>x_0$. Т.е. при переходе через точку x_0 производная меняет знак с $+$ на $-$.

Если x_0 является точкой является точкой локального минимума функции $f(x)$, то $f(x)$ убывает при $x < x_0$ и возрастает при $x > x_0$. Т.е. при переходе через точку x_0 производная меняет знак с $-$ на $+$.

<u>Утв.</u> 1 (первое условие экстремума)

Если при переходе через точку x_0 производная меняет знак с $+$ на $-$, то $x_0 -$ точка локального максимума.

Если при переходе через точку x_0 производная меняет знак с $-$ на $+$, x_0 является точкой локального минимума

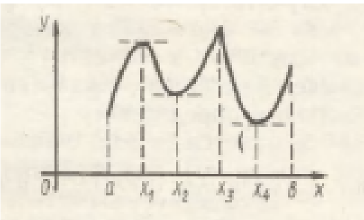
<u>Определение.</u> *Точки, в которых производная равна нулю или не существует, называются критическими точками функции.*

Алгоритм нахождения точек экстремума:

- отметим все критические точки функции: $a < x_1 < x_2 < ... < x_n < b$;

- рассмотрим смену знака производной при переходе через каждую точку критическую точку x_k;

- если $f'(x)$ меняет знак при переходе через точку x_k, то критическая точка x_k является точкой экстремума функции $f(x)$.

	Заметим, что на каждом отрезке $(x_k; x_{k+1})$ производная определена, сохраняет знак и не равна нулю.

<u>Утв.</u> 2 (Второе условие экстремума)

Если x_0 – точка локального минимума функции $f(x)$ и существует $f''(x_0)$, то $f''(x_0)>0$.

Если x_0 – точка локального максимума функции $f(x)$ и существует $f''(x_0)$, то $f''(x_0)<0$.

Доказательство. Из выражения $f''(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{x-x_o}$, учитывая смену знака первой производной при переходе через точку экстремума, получим требуемое утверждение:

- е*сли* x_0 – точка локального минимума, то $f''(x_0)>0$.
- *если* x_0 – точка локального максимума, то $f''(x_0)<0$.

<u>**Пример**</u> **7.** Определите точки экстремума функции $f(x)=x^3-9x^2+24x$.

Решение. $f'(x) = 3x^2-18x+24= 0 \Rightarrow x_1=2, x_2=4$. График производной – парабола с ветвями вверх и корнями $x_1=2, x_2=4$. При переходе через точку $x_1=2$ знак производной меняется с $+$ на $- \Rightarrow x_1=2-$точка максимума.

При переходе через точку $x_2=4$ знак производной меняется с $-$ на $+ \Rightarrow x_2=4-$точка минимума.

С другой стороны, по второму признаку, $f''(x)=6x-18 \Rightarrow f''(2)=-6,\ f''(4)=6$.

<u>**Пример**</u> **8.** Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $f(x)=4x^3-12x$ на отрезке $[-1;3]$ (Найдите образ отрезка $[-1;3]$ при отображении $f(x)=4x^3-12x$.)

Решение. $f'(x) = 12x^2-12= 0 \Rightarrow x_1=-1, x_2=1$ – точки экстремума функции. Чтобы ответить на вопрос задачи надо сравнить между собой следующие значения: $f(-1) = 8, f(1)=-8, f(3)=72$. Наибольшее значение функции на данном отрезке равно 72, наименьшее - -8.

Т.е. образ отрезка $[-1;3]$ при отображении $f(x)=4x^3-12x$ равен отрезку $[-8;72]$.

С помощью производной можно решать следующие задачи:

<u>Пример</u> 9. Найдите критические точки функций $f(x)=x^2-|x|,\quad f(x)=\sqrt[3]{x}\cdot|x|,\quad f(x)=(|x|+1)x.$

<u>Пример</u> 10. Сколько нулей имеет функция $f(x)=2x^3-9x^2+12x-6$?

<u>Пример</u> 11. Найдите абсциссы всех точек графика функции $f(x)=x^3+\dfrac{9-x^2}{x-3}$, касательные в которых параллельны прямой $y=26x$ или совпадают с ней.

<u>Пример</u> 12. Докажите неравенство $e^x-x>1$.

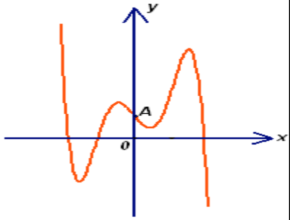
<u>Пример</u> 13. Докажите тождество $e^x\geq 1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}$.

<u>Пример</u> 14. В трапецию $ABCD$ (боковая сторона $AB=8$ перпендикулярна основаниям $BC=6, AD=10$) вписан прямоугольник наибольшей площади так, что одна его сторона лежит на большем основании.

<u>Пример</u> 15 Представьте число 26 в виде суммы трех положительных чисел, сумма квадратов которых наименьшая, если второе слагаемой втрое больше первого.

<u>Пример</u> 16. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $2x^3-3x^2-36x+a-3=0$ имеет ровно два различных корня.

<u>Пример</u> 17. Парабола $y=x^2+px+q$ пересекает ось абсцисс в точках A, B. Известно, что угол между касательными к параболе, проведенным в точках A, B, равен $90°$. Найдите площадь треугольника ABC, где C – вершина параболы.

Пример 18. На рисунке изображен график функции $p(x)=a_5x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$. Точка $A-$ центр симметрии графика функции. Определите знаки коэффициентов a_k $(k=0,1,2,3,4,5)$	

Пример 19. Касательная к графику $y=-x^2+4x-2$ пересекает координатные оси в точках A, B, причем $2OA=OB$. Найдите длину отрезка AB.

Пример 20. График функции $y=x^3+ax^2+bx+c$ $(c<0)$ пересекает ось ординат в точке A и имеет ровно две точки пересечения M и N с осью абсцисс. Прямая, касающаяся этого графика в точке M, проходит через точку A. Найдите числа a, b, c если площадь треугольника AMN равна 1.

Пример 21. Решите уравнение

$$x^6-|4x+3|^3=25\cos(x^2)-25\cos(4x+3)$$

Пример 22. Сколько положительных корней может иметь уравнение $x^5-x^4+x^3+x^2-6x=c$?

Пример 23. Найдите наибольшее натуральное значение параметра a, при котором уравнение $45x-x^3-3x^2+3a=0$ имеет три корня.

Пример 24. При каком наименьшем целом значение параметра a уравнение $x^4-8x^2-a=0$ имеет ровно четыре корня?

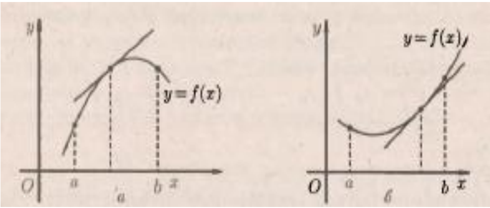
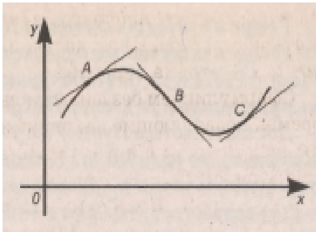
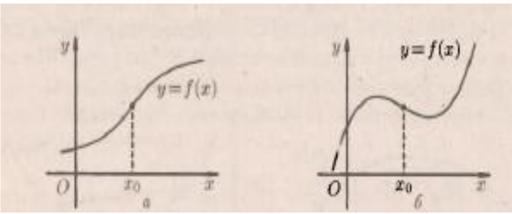
Пример 25. При каких p уравнение $\cos^3 x+7\cos 2x=p$ имеет решение? (не имеет решений?)

Пример 26. Найдите все пары натуральных чисел k и n таких, что $k<n$ и выполняется равенство $(k^2)^n=(n^2)^k$.

Выпуклость, вогнутость графика функции. Точки перегиба.

Определение. *График функции* $f(x)$ *называется выпуклым вверх (вниз), если для любого* $x\in(a;b)$ *график функции лежит не выше (не* ниже) касательной, *проведенной в точке* x.

Определение. *Точка* M *называется точкой перегиба, если существует дуга* AB *на графике функции* $f(x)$, *содержащая точку* M, *такая, что дуги* AM *и* BM *расположены по разные стороны от касательной, проведенной в точке* M.

	
	Точки, в которых происходит смена выпуклости на вогнутость, называются точками перегиба.

Теорема (О выпуклости графика функции)
Пусть в любой точке $x\in(a;b)$ *существует вторая производная* $f''(x)$. *Тогда:*

- Если $f''(x)\geq 0$, *то график функции выпуклый вниз;*
Если $f''(x)\leq\ 0$, *то график функции выпуклый вверх.*

Доказательство. Пусть $f''(x)\leq 0$, а уравнение касательной в точке x_0 имеет вид

$F(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$. По теореме Лагранжа

$$f(x)-F(x)=f(x)-f'(x_0)(x-x_0)-f(x_0)=f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)$$

$$=f'(c)(x-x_0)-f'(x_0)(x-x_0)=(f'(c)-f'(x_0))(x-x_0)=$$

$$=f''(t)(c-x_0)(x-x_0).$$

Вычислим знак $f(x)-F(x)$. Если $x>x_0$, то $x>c>t>x_0$ и из условия теоремы следует, что $f(x)-F(x)\le 0$, т.е. график функции не выше графика касательной, а функция выпуклая вверх.

Если $x<x_0$, то $x<c<t<x_0$ и из условия теоремы следует, что $f(x)-F(x)\le 0$, т.е. функция выпуклая вверх.

<u>Теорема</u> (Необходимое и достаточное условие перегиба)

Пусть график функции имеет перегиб в точке M. *Тогда* $f''(M)=0$ *либо* $f''(M)$ *не существует.*

- Если существует $f''(x)$ *и при переходе через точку* M *вторая производная меняет знак, то* M *– точка перегиба.*

<u>Пример</u> 27. Определите промежутки выпуклости и точки перегиба функции $f(x)=3x^4-8x^3+6x^2+12$.

Решение. $f''(x)=36x^2-48x+12=0\Rightarrow x_1=\frac{1}{3}, x_2=1.$

График второй производной – парабола с ветвями вверх и корнями $x_1=\frac{1}{3}, x_2=1$.

Если $x<\frac{1}{3}$, то $f''(x)>0$ и $f(x)$ выпуклая вниз.

Если $\frac{1}{3}<x<1$, то $f''(x)<0$ и $f(x)$ выпуклая вверх.

Если $x>1$, то $f''(x)>0$ и $f(x)$ выпуклая вниз.

Точки перегиба $x=\frac{1}{3}$, $x=1$.