Исаак
Кушнир

Альтернативные способы решения
ЗАДАЧ

(Геометрия)

Исаак Кушнир

Альтернативные способы решения задач (Геометрия)

ФАКТ
ВИДАВНИЦТВО
Киев · 2006

Предисловие

Желание решить задачу многими способами является далеко не праздным. Уверен, что те, кто искренне заинтересованы в изучении математики и ее преподавании, убедились не только в эффективности, но и в эстетической привлекательности поисков второго способа решения.

Сделать такой поиск не случайным явлением, а регулярным — цель этой книги.

Подобный подход возможен в самом начале изучения геометрии. Даже самая тривиальная задача может быть поводом для геометрических фантазий, давая ребенку возможность использовать различные дополнительные построения, которые не всегда можно предугадать. Зато по мере накопления теоретического материала к такой задаче можно возвращаться («Решили двумя — найдите третий»). И хотя способы, предлагаемые учащимся, могут быть похожими и даже в определенной степени дублирующими друг друга, учителю следует с одобрением и пониманием относиться к детской попытке как к началу поисковой и творческой работы.

В этой книге систематизированы интересные задачи, которые можно решать несколькими способами: задачи обучающего характера (глава «Дайте ребенку пофантазировать») сменяются доказательствами теорем из школьных учебников геометрии. Применение различных способов помогает более глубокому восприятию этих теорем, а также их запоминанию. Но главное, что у учеников вырабатывается качество «не робеть» перед авторитетами. Сама мысль о том, что теорему можно доказать иначе, чем в учебнике — стимул для творческой работы. Это подтверждается и доказательством формул, как новых, так и хорошо знакомых. Кроме того, такие доказательства служат полигоном для совершенствования в алгебре и тригонометрии.

Особый интерес у читателя вызовет цикл задач, положенных в основу острого геометрического сюжета («Победа или поражение», «Возникла связь времен», «Авторская задача, или 19 лет спустя»). В этих главах прослеживается не только методика создания нового способа решения, но и история задачи: от момента ее рождения до возникновения новой, мало похожей на «родительскую» (выражение И. Ф. Шарыгина).

Бережное собирание таких задач, их коллекционирование и пропаганда — одни из целей книги.

И, наконец, еще одна из главных задач книги — воспитание (я не боюсь этого слова). Воспитание стремления к поиску, воли к победе.

Вот почему работа над решением задачи многими способами должна быть в арсенале и учителей, и учеников.

Глава I. Дайте ребенку пофантазировать

Самые, самые... самые первые, самые простые. Ни в одном учебнике геометрии, ни в одном задачнике читатель не найдет предложения доказать эти задачи не то что многими, а хотя бы *двумя* способами. Можно найти достаточно много «серьезных» причин, почему такого задачника нет. Зато есть одна причина, для чего нужны эти способы. Вот она: это интересно! Но... сначала попробуйте сделать сами. Может быть, ваших способов будет меньше, чем в книге, а может быть, хотя бы один будет другой — победа!

1. Задача о биссектрисах двух смежных углов

Докажите, что биссектрисы двух смежных углов взаимно перпендикулярны.

Первый способ

Пусть углы AOC и AOB — смежные, ON и OM их биссектрисы (рис. 1). Обозначим $\angle AON = \alpha$, $\angle AOM = \beta$. Поскольку

$$\angle AOC = 2\angle AON,\ \text{а}\ \angle AOB = 2\angle AOM,$$

то $2\alpha + 2\beta = 180°$, или $\alpha + \beta = 90°$.

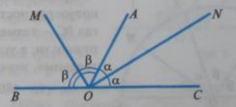

Рис. 1

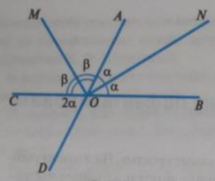

Рис. 2

Второй способ

Продлим прямую AO (рис. 2). Тогда

$$\angle DOC = \angle AOB = 2\alpha$$

(точка D принадлежит прямой AO). Поскольку

$$\angle DOC + \angle COA = 180°,$$

имеем

$$2\alpha + 2\beta = 180°, \alpha + \beta = 90°.$$

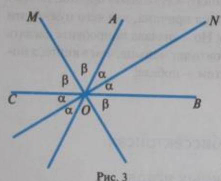

Рис. 3

Третий способ

Продлим прямые AO, MO, NO (рис. 3). Получим

$$4\alpha + 4\beta = 360°,\ \text{или}\ \alpha + \beta = 90°.$$

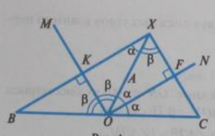

Рис. 4

Четвертый способ

На луче OA возьмем произвольную точку X (рис. 4), и на лучи OM и ON опустим перпендикуляры XK и XF, и продолжим их до пересечения с BC в точках B и C. Поскольку в треугольниках XOB и XOC OK и OF — биссектрисы и высоты, то

$$XO = OB = OC,$$

а это значит, что $\angle BXC$ равен 90°, следовательно,

$$\angle KOF = 90°\ \text{и}\ \alpha + \beta = 90°.$$

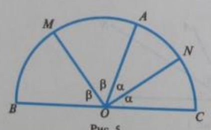

Рис. 5

Пятый способ

Примем точку O за центр полуокружности (рис. 5). Тогда BC — диаметр этой полуокружности, а углы α и β — центральные, значит,

$$2\alpha + 2\beta = 180°, \alpha + \beta = 90°.$$

Шестой способ

В том же полукруге (см. пятый способ) проведем луч OA, который пересечет дугу полукруга в точке X: $\angle BXC = 90°$ и $XO = BO = OC$ (рис. 6). Значит, $\angle OXC = 90° - \alpha$, $\angle OXB = 90° - \beta$ (из равнобедренных треугольников XOC и XOB). Тогда

$$90° - \alpha + 90° - \beta = 90°, \alpha + \beta = 90°.$$

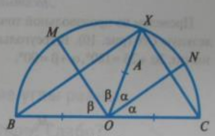

Рис. 6

Седьмой способ

Проведем через произвольную точку X луча OA прямую XD, параллельную BC (рис. 7). Рассмотрим треугольник OXD. Поскольку $\angle DOB = \angle ODX$, а

$$\angle COX = \angle DXO,\ \text{то}$$

$$\alpha + \alpha + 2\beta = 180°, \alpha + \beta = 90°.$$

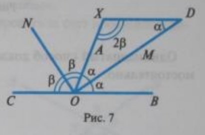

Рис. 7

Восьмой способ

Проведем через произвольную точку X луча OA прямую l параллельно BC (рис. 8). Получим треугольник MON. В нем

$$\angle MON + \angle OMN + \angle ONM = 180°,$$

$$\text{или}\ \alpha + \beta + \alpha + \beta = 180°,$$

$$\alpha + \beta = 90°.$$

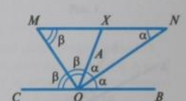

Рис. 8

Девятый способ

Из произвольной точки X луча OM опустим перпендикуляры XH — на прямую BC и XE — на прямую OA. Рассмотрим прямоугольный треугольник XHD ($D \in BC$). В нем $\angle XDH = 90° - 2\alpha$ (из треугольника OED), а $\angle HXD = 180° - 2\beta$ (из четырехугольника $XEOH$). Поскольку $\angle HXD + \angle XDH = 90°$, имеем $90° - 2\alpha + 180° - 2\beta = 90°$, или $\alpha + \beta = 90°$.

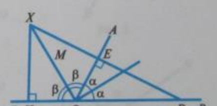

Рис. 9

Десятый способ

Проведем из произвольной точки X луча OA прямую XE, параллельную ON (рис. 10). В треугольнике EXA: $\angle EXA = \alpha$ и $\angle XEO = \alpha$, значит, $2\alpha + 2\beta = 180°$, $\alpha + \beta = 90°$.

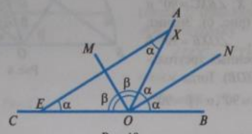

Рис. 10

Одиннадцатый способ доказательства предлагается найти самостоятельно.

2. Вертикальные углы равны.

Восемь способов! Слабо?

Равенство вертикальных углов столь очевидно, что удивительным является сама мысль о «многоспособье».

Однако получен повод пофантазировать за счет простейших дополнительных построений. Итак,

Первый способ

Обозначим

$\angle AON = \alpha$, $\angle MOB = \beta$, $\angle AOM = \gamma$

(рис. 1). Тогда

$\alpha + \gamma = 180°$ и $\beta + \gamma = 180°$,

значит, $\alpha = \beta$.

Рис. 1

Второй способ

Пусть $\alpha \neq \beta$ $(\alpha > \beta)$. Отложим угол $KON = \beta$ (рис. 2). Поскольку

$\angle KOB = \angle NOB + \angle NOK =$

$= 180° - \beta + \beta = 180°$,

то луч OK совпадает с лучом OA, что противоречит предположению.

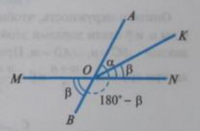

Рис. 2

Третий способ

Рассмотрим треугольник AOD $(D \in MN)$ (рис. 3).

$\alpha = \varphi_1 + \varphi_2$, $\beta = \varphi_1 + \varphi_2$,

значит, $\alpha = \beta$.

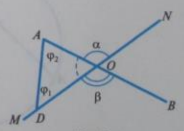

Рис. 3

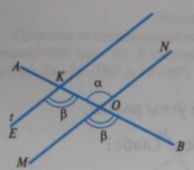

Рис. 4

Четвертый способ

Проведем прямую $t \parallel MN$ (рис. 4). Она пересечет прямую AB в точке K. Тогда $\angle MOB = \angle EKO = \angle KON$, т. е. $\alpha = \beta$.

Пятый способ

Стороны угла AOD (рис. 5) пересечем произвольной прямой XY и через произвольную точку Z одной из сторон угла BOC проведем прямую ZU, параллельную XY. Тогда

$\angle DXO = \angle OBZ$

и $\angle XDO = \angle OZU$,

а значит, $\angle AOD = \angle BOZ$.

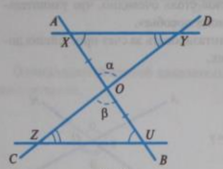

Рис. 5

Шестой способ

Аналогичен предыдущему, разве что точка X принадлежит прямой CD.

Седьмой способ

Опишем окружность, чтобы прямые, образующие между собой углы α и β стали хордами этой окружности AB и CD (рис. 6). Обозначим $\cup BC = n$, $\cup AD = m$. Применим теорему об угле с вершиной внутри круга: $\alpha = \frac{m+n}{2}$ и $\beta = \frac{n+m}{2}$, значит, $\alpha = \beta$.

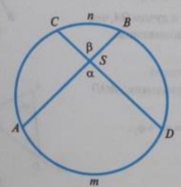

Рис. 6

Восьмой способ

Пусть некоторая окружность пересекает прямые AB и MN в точках K, L, D, E (рис. 7). Обозначим углы треугольника KDO φ_1 и φ_2. Тогда углы треугольника OLE тоже будут φ_1 и φ_2: они опираются на дуги NE и KL, а это значит, что $\alpha = \beta$.

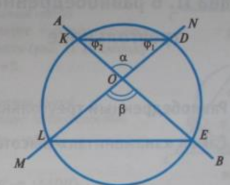

Рис. 7

Девятый способ предлагается найти самостоятельно.

Глава II. В равнобедренном треугольнике

3. Равнобедренный треугольник. Самая «знаменитая» высота

Это высота, проведенная из вершины равнобедренного треугольника. Обладая неоценимым качеством (она будет медианой и биссектрисой), эта высота дарит достаточно много способов доказательства. Впрочем, убедитесь сами.

Итак, в равнобедренном треугольнике ABC ($b = c$) высота AH будет медианой и биссектрисой угла BAC (рис. 1).

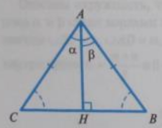

Рис. 1

Первый и второй способы очевидны, так как прямоугольные треугольники ABH и ACH равны по катету и гипотенузе (первый способ) и по гипотенузе и острому углу (второй способ).

Третий способ

Из точки H (рис. 2) опустим перпендикуляры HD и HE на стороны AC и AB, соответственно (рис. 2). Из равенства треугольников HDC и HEB следует, что $HD = HE$. Значит, $\Delta ADH = \Delta AEH$ и $\alpha = \beta$, следовательно, $\Delta AHC = \Delta ABH$ и $\angle AHB = \angle AHC_1$, т. е. AH — высота.

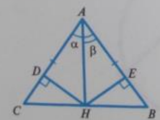

Рис. 2

Четвертый способ

Поскольку $\angle B = \angle C$ (рис. 3) и

$\angle DHC = \angle EHB$, а $\angle AHD = \angle AHE$,

то $\alpha = \beta$.

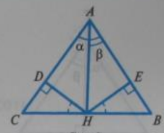

Рис. 3

Пятый способ

Опишем вокруг четырехугольника $ADHE$ окружность (рис. 4). Поскольку $HD = HE$, то $\alpha = \beta$.

Рис. 4

Шестой способ

В конфигурации пятого способа:

$$\angle DHA = \angle EHA = \varphi,$$

значит,

$$\alpha = 90° - \varphi \ (\Delta ADH),$$
$$\beta = 90° - \varphi \ (\Delta AEH),$$

следовательно, $\alpha = \beta$.

Седьмой способ

Проведем через вершины B и C перпендикуляры BM и CN к прямой BC (рис. 5). Тогда $\angle ACN = \alpha$, $\angle ABM = \beta$ и $\alpha + C = \beta + B$, значит, $\alpha = \beta$.

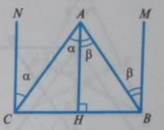

Рис. 5

Восьмой способ

Через вершину A проведем прямую MN параллельно BC (рис. 6). Тогда $\angle BAN = \angle B$ и $\angle CAM = \angle C$. Имеем

$$\alpha + C = \beta + B,$$

значит, $\alpha = \beta$.

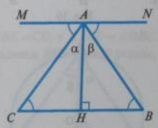

Рис. 6

Девятый способ

Пусть N и T — середины сторон AB и AC (рис. 7). Поскольку

$$HN = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}AC = HT,$$

то четырехугольник $ANHT$ — ромб, а значит, $\alpha = \beta$.

Рис. 7

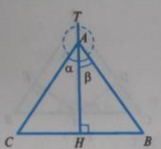

Рис. 8

Десятый способ

Продлим высоту AH как показано на рисунке: $TH \perp BC$ (рис. 8). Внешний угол треугольника AHC: $\angle TAC = 90° + C$, аналогично, $\angle TAB = 90° + B$.

Имеем:

$$90° + C + \beta = 180°, \quad 90° + B + \alpha = 180°,$$

значит, $90° + C + \beta = 90° + B + \alpha$. Поскольку $\angle B = \angle C$, то $\alpha = \beta$.

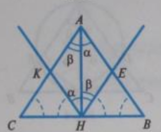

Рис. 9

Одиннадцатый способ

Проведем через точку H прямые, параллельные сторонам AC и AB (рис. 9) ($KH \parallel AB$, $HE \parallel AC$). Тогда $\angle KHC = \angle B$ и $\angle EHB = \angle C$, значит, $\alpha + B = \beta + C$, следовательно, $\alpha = \beta$.

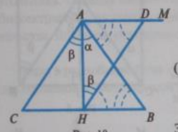

Рис. 10

Двенадцатый способ

Проведем

$$AM \parallel BC \text{ и } DH \parallel AC \ (D \in AM)$$

(рис. 10). Тогда

$$\angle AHD = \beta, \quad \angle BAD = \angle B$$
$$\text{и } \angle DHB = \angle HDA = \angle C.$$

Значит, $\alpha + B = 90°$ ($\angle HAD$), $\beta + C = 90°$ (острые углы прямоугольного треугольника HAD). Имеем $\alpha + B = \beta + C$. Поскольку $\angle B = \angle C$, то $\alpha = \beta$.

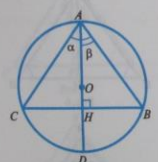

Рис. 11

Тринадцатый способ

Опишем окружность около ΔABC, центр которой принадлежит прямой AH (рис. 11) (для определенности будем считать, что треугольник ABC — остроугольный). Поскольку диаметр окружности AD перпендикулярен хорде BC, то $\smile DB = \smile DC$, откуда

$$\angle DAB = \angle DAC, \text{ т. е. } \alpha = \beta.$$

Четырнадцатый способ предлагаем найти читателю.

4. Равные высоты равнобедренного треугольника

Равнобедренный треугольник — Клондайк для изучения «многоспособья». Рассмотрим равенство двух высот:

В равнобедренном треугольнике ABC ($b = c$) высоты h_b и h_c равны. Доказать.

Первый способ

Пусть BD и CE — высоты h_b и h_c треугольника ABC (рис. 1). Прямоугольные треугольники BCD и CBE равны, значит, $BD = CE$.

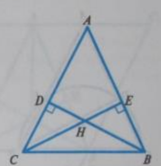

Рис. 1

Второй способ

Аналогичен первому: $\Delta ADB = \Delta ACE$, значит, $h_b = h_c$ (рис. 1).

Третий способ

Поскольку $\Delta BEC = \Delta CDB$ (рис. 1), то $BE = CD$, а $\angle ECB = \angle DBC$, значит, $HB = HC$. Прямоугольные треугольники BHE и CHD равны, значит, $DH = HE$, следовательно, $BD = CE$.

Четвертый способ

Проведем третью высоту AH_1 (рис. 2). Поскольку $\Delta BAH = \Delta CAH$, то $BH = CH$, $\Delta AHE = \Delta ADH$, значит, $HE = DH$, следовательно, $BD = CE$.

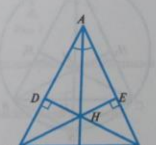

Рис. 2

Пятый способ

Поскольку $BH_1 = CH_1$, то $BH = CH$ (рис. 2), значит, $\Delta BHE = \Delta CHD$ и $HE = DH$, а значит, $BD = CE$.

Шестой способ

Проведем отрезки H_1E и H_1D (рис. 3). Как медианы прямоугольных треугольников BEC и BDC

$$DH_1 = CH_1 \text{ и } \angle DCH_1 = \angle CDH_1.$$

Аналогично,

$$\angle H_1EB = \angle EBH_1,$$

а значит,

$$\angle H_1DB = \angle H_1EC$$

$$(DH_1 = EH_1, H_1B = H_1C \text{ и } \angle H_1DB = \angle H_1EC),$$

следовательно, $BD = EC$.

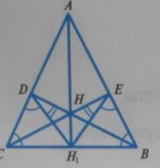

Рис. 3

Седьмой способ

Как на диаметре опишем на BC полукруг (рис. 4). Поскольку

$$\angle ABC = \angle ACB, \text{ то } \smile CDE = \smile BED,$$

тогда $\smile BD = \smile CE$, а значит, $BD = CE$.

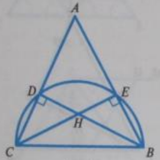

Рис. 4

Восьмой способ

Поскольку $AC = AB$ и площадь S треугольника ABC равна

$$\frac{1}{2} AB \cdot h_c = \frac{1}{2} AC \cdot h_b, \text{ то } h_b = h_c.$$

Девятый способ

Пусть $\angle ABC = \angle ACB = \alpha$. Тогда

$$h_b = a \sin \alpha = h_c,$$

значит, $h_b = h_c$.

Десятый способ

Опишем окружность вокруг равнобедренного треугольника ABC и продлим высоту AH_1 (рис. 5). Поскольку $\angle NAB = \angle H_3CB = \angle BCN$ и $HH_1 = H_1N$, то $CH_1 = CN$. Аналогично, $BH = BN$. Но $CN = NB$, значит, $BH = CH$, следовательно, $BH_2 = CH_3$.

Рис. 5

Одиннадцатый способ

Как на диаметре, на стороне BC опишем окружность (рис. 6). Поскольку $\angle EBC = \angle DCB$, то $\smile EBC = \smile DCB$ и хорды BD и EC равны.

Двенадцатый способ

Опустим из точек E и D перпендикуляры на BC: EE_1 и DD_1 (рис. 6). Поскольку $\smile EB = \smile DC$, то

$$EB = DC \text{ и } EE_1 = DD_1,\ CD_1 = E_1B,$$

а значит, $\Delta EE_1C = \Delta DD_1B$ и $BD = CE$.

Рис. 6

Тринадцатый способ

Построим удвоенный треугольник: через вершины A, B, C проведем прямые, параллельные соответственным сторонам треугольника ABC (рис. 7).

Поскольку ортоцентр H — центр окружности, описанной около треугольника $A_1B_1C_1$ и хорды A_1B_1 и A_1C_1 равны, то $HC = HB$, а значит, $BH_2 = CH_3$.

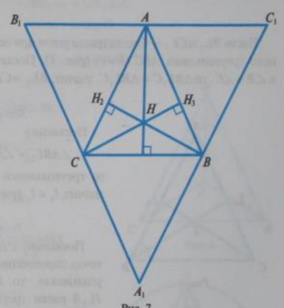

Рис. 7

Задача, обратная поставленной, доказывается аналогичными способами: если $h_b = h_c$, то $b = c$.

Четырнадцатый способ предлагается найти самостоятельно.

5. Две биссектрисы равнобедренного треугольника

Доказываем, что в равнобедренном треугольнике биссектрисы углов при основании равны. При кажущейся аналогии с предыдущим разделом, доказательства более содержательны и интересны. Обратите внимание на обратную задачу.

Первый способ

Пусть BL_2 и CL_3 — биссектрисы углов при основании равнобедренного треугольника ABC $(b = c)$ (рис. 1). Поскольку $\angle BCL_3 = \angle CBL_2$, а $\angle B = \angle C$, то $\Delta BL_3C = \Delta BL_2C$, значит, $BL_2 = CL_3$.

Второй способ

Поскольку

$$\angle ABL_2 = \angle ACL_3 \text{ и } AB = AC,$$

то треугольники ACL_3 и ABL_2 равны, значит, $l_b = l_c$ (рис. 1).

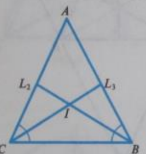

Рис. 1

Третий способ

Поскольку $\angle IBC = \angle ICB$ (рис. 1) (I — точка пересечения биссектрис углов треугольника), то $IB = IC$, а треугольник IL_3B равен треугольнику IL_2C, значит, $IL_2 = IL_3$, следовательно,

$$BI + IL_2 = CI + IL_3, \text{ или } l_b = l_c.$$

Четвертый способ

Поскольку $\angle IAB = \angle IAC$,

$$\text{а } \angle IBA = \angle ICA,\ AB = AC,$$

то $\Delta AIB = \Delta AIC$ (рис. 2), значит, $BI = CI$. Поскольку $\Delta AIL_3 = \Delta AIL_2$, то $IL_3 = IL_2$, а значит, $BL_2 = CL_3$.

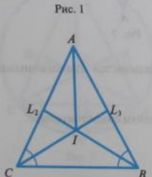

Рис. 2

Пятый способ

Поскольку

$$\angle BL_2C = \angle BL_3C$$

(рис. 3), то точки B, C, L_2, L_3 принадлежат одной окружности. Но

$$\angle L_3CB = \angle L_2BC = \\ = \angle L_3L_2B = \angle L_2L_3C.$$

Отсюда $IL_2 = IL_3$. Тогда $BI = CI$, значит, $BL_2 = CL_3$.

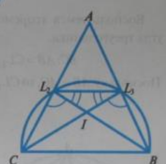

Рис. 3

Шестой способ

Поскольку

$$\smile BL_3L_2 = \smile L_3L_2C$$

(рис. 3), то $BL_2 = CL_3$.

Седьмой способ

Поскольку

$$\angle BIA = 90° + \frac{C}{2} \text{ (рис. 4)},$$

$$\text{а } \angle CIA = 90° + \frac{B}{2},$$

то $(\angle B = \angle C)$

$$\angle BIA = \angle CIA;$$

а значит,

$$\Delta AIB = \Delta AIC \text{ (II признак)}$$

и $BI = CI$, а значит, $BL_2 = CL_3$.

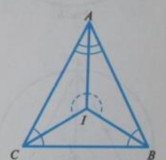

Рис. 4

Восьмой способ

Опишем около треугольника ABC окружность (рис. 5) и продлим три биссектрисы углов A, B и C до пересечения с окружностью в точках W_1, W_2, W_3. Поскольку

$$\smile BW_1 = \smile CW_1,$$

то $\Delta BIW_1 = \Delta CIW_1$ и $BI = CI$.

Поскольку $\Delta CW_2L_2 = \Delta BW_3L_3$, то

$W_2L_2 = W_3L_3$, значит, $BL_2 = CL_3$.

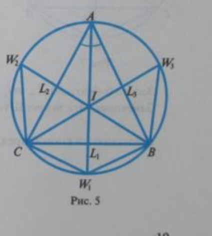

Рис. 5

Девятый способ

Воспользуемся теоремой о свойстве биссектрисы внутреннего угла треугольника:

$$BC:AB = CL_2 : L_2A \text{ и } BC:AC = BL_3 : L_3A.$$

Поскольку $AB = AC$, то $CL_2 : L_2A = BL_3 : L_3A$, значит, $l_b = l_c$.

Десятый способ

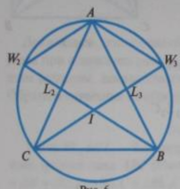

Рис. 6

Вокруг треугольника ABC опишем окружность (рис. 6). Прямые BL_2 и CL_3 пересекут ее в точках W_2 и W_3. Поскольку

$$\cup W_2W_3B = \cup W_3W_2C, \text{ то}$$
$$BW_2 = CW_3.$$

Поскольку

$$\cup AW_2 = \cup AW_3, \text{ то}$$
$$AW_2 = AW_3$$

и треугольники AW_2L_2 и AW_3L_3 равны, значит,

$$L_2W_2 = L_3W_3,$$

следовательно,

$$BW_2 - W_2L_2 = CW_3 - W_3L_3$$

и $l_b = l_c$.

Рис. 7

Одиннадцатый способ

Продолжим прямую AL_1 до пересечения с описанной окружностью в точке W_1 (рис. 7). Поскольку

$$\Delta BW_1I = \Delta CW_1I, \text{ то } BI = CI,$$

а значит, $l_b = l_c$.

Задача (обратная): Если $l_b = l_c$, то $b = c$.
Замечание. Эта задача Штейнера-Лемуса.

Двенадцатый способ предлагается найти самостоятельно.

6. Две медианы равнобедренного треугольника

Задача аналогична двум предыдущим. Читатель знаком с теоремой о точке пересечения медиан треугольника.

Задача. В равнобедренном треугольнике ABC $(b = c)$ медиана m_b равна медиане m_c. Доказать.

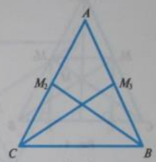

Рис. 1

Первый способ

Треугольник BCM_3 равен треугольнику CM_2B (рис. 1). Значит, $m_b = m_c$.

Второй способ

Треугольники AM_3C и ABM_2 равны. Отсюда $m_b = m_c$.

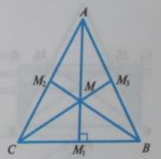

Рис. 2

Третий способ

Поскольку $\angle MM_1B = 90°$ (M — точка пересечения медиан) (рис. 2) и $M_1B = M_1C$, то

$$MB = MC \quad \left(\frac{2}{3}m_b = \frac{2}{3}m_c\right),$$

значит, $m_b = m_c$.

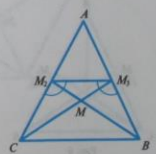

Рис. 3

Четвертый способ

Проведем среднюю линию M_2M_3 (рис. 3). Поскольку

$$\angle M_2M_3B = \angle CM_2M_3, \text{ то}$$
$$\Delta BM_2M_3 = \Delta CM_2M_3$$

и $m_b = m_c$.

Пятый способ

Поскольку $\angle MM_2M_3 = \angle MM_3M_2$ (рис. 3), то $M_2M = M_3M$, а значит, $m_b = m_c$.

Шестой способ

Поскольку $\Delta AM_2M = \Delta AM_3M$, то $MM_2 = MM_3$, а значит, $m_b = m_c$.

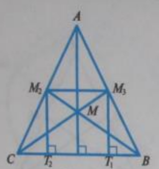

Рис. 4

Седьмой способ

Поскольку $M_2M_3 \parallel BC$, то

$$M_2T_2 = M_3T_1$$

(M_3T_1 и M_2T_2 — перпендикуляры, опущенные из точек M_3 и M_2 на сторону BC) (рис. 4), а значит, $BT_1 = CT_2$, откуда $CT_1 = BT_2$ и $m_b = m_c$.

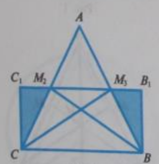

Рис. 5

Восьмой способ

Проведем прямую M_2M_3 и опустим на нее перпендикуляры BB_1 и CC_1 (рис. 5). Поскольку

$$BB_1 = CC_1 \text{ и } BM_3 = CM_2 \text{ (рис. 5),}$$

то $\Delta BB_1M_3 = \Delta CC_1M_2$ и $M_3B_1 = M_2C_1$, а значит, $\Delta BM_2B_1 = \Delta CM_3C_1$, следовательно, $BM_2 = CM_3$.

Девятый способ

Проведем высоты BH_2 и CH_3 (рис. 6). Поскольку

$$BH_3 = CH_2, \text{ то } H_2M_2 = H_3M_3$$

и $\Delta CH_3M_3 = \Delta BH_2M_2$, значит, $m_b = m_c$.

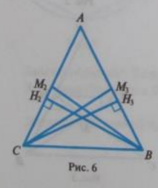

Рис. 6

Десятый способ

Соединим точки M_1, M_2, M_3 (рис. 7). Поскольку

$$M_1M_3 = \frac{1}{2}AC, \quad M_1M_2 = \frac{1}{2}AB,$$

то в $\Delta M_1M_3M_2$ медианы M_2E и M_3K равны, а значит, $m_b = m_c$.

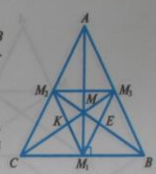

Рис. 7

Одиннадцатый способ

Поскольку параллелограмм $M_1M_2M_3B$ равен параллелограмму $M_1CM_2M_3$, то диагональ BM_2 равна диагонали CM_3 (рис. 7).

Двенадцатый способ

Удвоим медианы BM_2 и CM_3 (рис. 8). Поскольку параллелограммы CAC_1B и BCB_1A равны, то их диагонали равны, значит, $BM_2 = CM_3$.

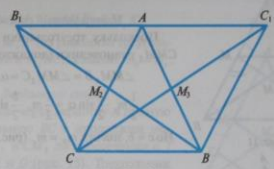

Рис. 8

Тринадцатый способ

Поскольку $C_1T_1 = B_1T_2$, то прямоугольные треугольники CC_1T_1 и BB_1T_2 (рис. 9) равны, значит, $BB_1 = CC_1$, следовательно, $m_b = m_c$.

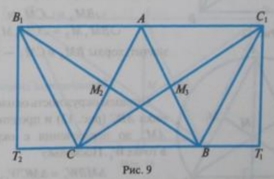

Рис. 9

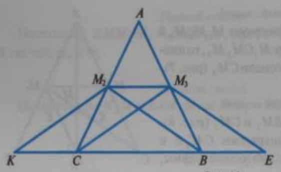

Рис. 10

Четырнадцатый способ

Проведем

$$M_3E \parallel M_2B,$$

$$M_2K \parallel M_3C$$

(рис. 10).

Поскольку

$$\Delta EM_3C = \Delta KM_2B,$$

то $m_b = m_c$.

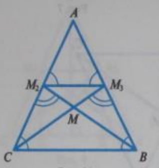

Рис. 11

Пятнадцатый способ

Поскольку треугольники BM_3M и CMM_2 равновелики (докажите!), а

$$\angle MM_3B = \angle MM_2C = \alpha, \text{ то}$$

$$\frac{1}{2}m_c \cdot \frac{c}{2}\sin\alpha = \frac{1}{2}m_b \cdot \frac{b}{2}\sin\alpha.$$

Но $c = b$, значит, $m_b = m_c$ (рис. 11).

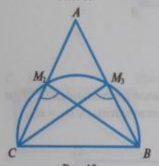

Рис. 12

Шестнадцатый способ

Поскольку

$$\angle BM_3C = \angle BM_2C,$$

то точки B, M_3, M_2, C принадлежат одной окружности (рис. 12). Поскольку

$$BM_3 = CM_2, \text{ то}$$

$$\cup BM_3 = \cup CM_2 \text{ и}$$

$$\cup BM_3M_2 = \cup CM_2M_3,$$

значит, хорды BM_2 и CM_3 — равны.

Рис. 13

Семнадцатый способ

Опишем окружность около треугольника ABC (рис. 13) и продлим медиану AM_1 до пересечения с окружностью в точке W_1. Поскольку

$$\Delta MBW_1 = \Delta MCW_1,$$

то

$$MB = MC,$$

а значит, $m_b = m_c$.

Восемнадцатый способ

Удвоим отрезок MM_1 (рис. 14). Получим ромб $MBEC$, значит, $MB = MC$, следовательно, $m_b = m_c$.

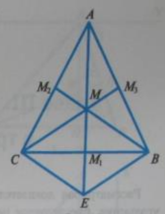

Рис. 14

Девятнадцатый способ

Из середины M_1 стороны BC проведем отрезки $M_1N \parallel M_3C$ и $M_1K \parallel M_2B$ (рис. 15). Поскольку M_1N и M_1K — средние линии треугольников BM_3C и BCM_2, то

$$M_3C = 2M_1N \text{ и } M_2B = 2M_1K.$$

Но $M_1N = M_1K$ (из равенства треугольников M_1NB и M_1KC), а значит, $m_b = m_c$.

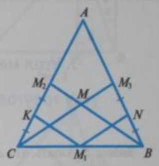

Рис. 15

Двадцатый способ

Проведем через вершину A прямую l, параллельную BC и продолжим медианы BM_2 и CM_3 до пересечения с l в точках E и D (рис. 15). Треугольник MED — равнобедренный, так как

$$AD = BC = EA \text{ и } AM \perp BC,$$

значит,

$$MD = ME,$$

следовательно, $m_b = m_c$.

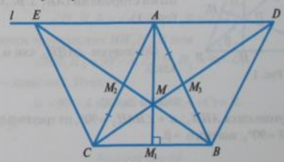

Рис. 16

Двадцать первый способ предлагается найти самостоятельно.

Обратная задача: если $m_b = m_c$, то $b = c$. Доказывается аналогично прямой.

Глава III. Популярные углы в треугольнике

Рассматривая доказательство равенства некоторых углов в треугольнике, преследуется цель выделения этих углов, поскольку они важны в решении многих задач. «Многоспособье» способствует этому.

7. Угол между высотами равен углу треугольника ($\angle AHH_3 = \angle ABC$)

Задача. Доказать, что $\angle AHH_3 = \angle ABC$.

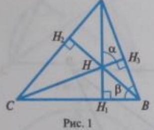

Рис. 1

Первый способ

Углы AHH_3 и ABH_1 взаимно равны как углы с взаимно перпендикулярными сторонами ($AH_1 \perp BC, CH_3 \perp AB$) (рис. 1).

Обозначим $\angle AHH_3$ как α, $\angle ABC$ — как β.

Второй способ

Из треугольника AHH_3: $\alpha + \angle HAH_3 = 90°$, из треугольника ABH_1: $\beta + \angle H_1AB = 90°$, значит, $\alpha = \beta$.

Третий способ

Из четырехугольника H_3HH_1B: $\beta + \angle H_1HH_3 = 180°$, значит, $\alpha = \beta$.

Четвертый способ

Через вершину A проведем прямую $MN \parallel BC$ (рис. 2). Поскольку

$$\angle H_1AN = 90°, \text{ а } \angle BAN = \beta,$$

то $\angle H_1AB = 90° - \beta$, а $\angle HAB = 90° - \alpha$, значит, $\alpha = \beta$.

Рис. 2

Пятый способ

Проведем прямую BK, перпендикулярную BC (рис. 3). Поскольку $\angle H_1AB = \angle ABK$ и $\angle H_1AB = 90° - \alpha$, то $\angle ABC + \angle ABK = 90°$, значит,

$$\beta + 90° - \alpha = 90°, \alpha = \beta.$$

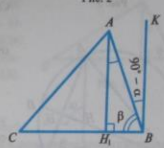

Рис. 3

Шестой способ

Рассмотрим треугольник AHC (рис. 4). Как внешний

$$\alpha = \angle AHH_3 = \angle HAC + \angle HCA,$$

$$\alpha = 90° - C + 90° - A =$$

$$= 180° - (A + C) = 180° - 180° + B;$$

т. е. $\alpha = B$, или $\alpha = \beta$.

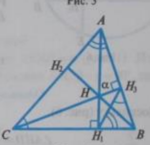

Рис. 4

Седьмой способ

Проведем отрезок H_1H_3 (рис. 4). Тогда

$$\angle H_3H_1B = \angle A, \angle H_1H_3B = \angle C.$$

Рассмотрим треугольник HH_3H_1. В нем

$$\angle HH_1H_3 = 90° - A, \angle HH_3H_1 = 90° - C,$$

а $\angle AHH_3$ — внешний. Итак,

$$\alpha = 90° - A + 90° - C = 180° - (A + C) = B.$$

Значит, $\alpha = \beta$.

Восьмой способ

Рассмотрим треугольник H_1AH_3:

$$\angle H_1AH_3 = 90° - B, \angle AH_1H_3 = 90° - A,$$

а угол $H_1H_3B = \angle C$ — внешний. Имеем $C = 90° - B + 90° - A$, или $180° - (B + A) = 180° - (\alpha + A)$, откуда $\alpha = B$, или $\alpha = \beta$.

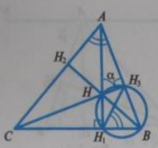

Рис. 5

Девятый способ

Вокруг четырехугольника H_3BH_1H опишем окружность (рис. 5). На дугу H_3BH_1 опирается угол

$$\angle H_3HH_1 = 180° - \alpha. \qquad (1)$$

В свою очередь,

$$\angle H_3HH_1 = 180° - \beta. \qquad (2)$$

Сравним выражения (1) и (2):

$$180° - \alpha = 180° - \beta,$$

отсюда $\alpha = \beta$.

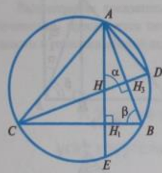

Рис. 6

Десятый способ

Опишем окружность около треугольника ABC (рис. 6). Продлим высоту CH_3 до пересечения с этой окружностью в точке D (рис. 6). Тогда $HH_3 = H_3D$ (доказать!) и

$$\angle AHH_3 = \angle ADH_3 = \angle ABC,$$

т. е. $\alpha = \beta$.

Одиннадцатый способ

Поскольку (рис. 6)

$$\angle AHD = \frac{1}{2}(\cup AD + \cup CE),$$

$$\alpha = \frac{1}{2}(180° - 2A + 180° - 2C) = 180° - (A + C) = 180° - 180° + B, \alpha = B,$$

или $\alpha = \beta$.

Двенадцатый способ предлагается найти самостоятельно.

8. Два угла прямоугольного треугольника

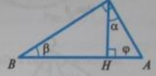

Рис. 1

В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) проведем высоту CH (рис. 1). Углы ACH (или $\angle BCH$) равны одному из острых углов прямоугольного треугольника: $\angle ACH = \angle CBA$ ($\angle BCH = \angle CAB$). Докажем это.

Первый способ

Углы ACH и CBH равны как углы с взаимно перпендикулярными сторонами (рис. 1).

Второй способ

Обозначим $\angle ACH = \alpha$; $\angle CBH = \beta$, и $\angle CAH = \varphi$ (рис. 1). Из треугольника ACH: $\alpha + \varphi = 90°$. Из треугольника ABC: $\beta + \varphi = 90°$, значит, $\alpha = \beta$.

Третий способ

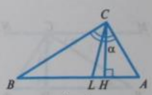

Рис. 2

Проведем биссектрису CL прямого угла (рис. 2). Обозначим $\angle HCA = \alpha$. Тогда

$$\angle HCL = 45° - \alpha; \angle CLH = 45° + \alpha.$$

Поскольку $\angle CLH = \angle CBL + \angle LCB$, то

$$\angle CBL = 45° + \alpha - 45° = \alpha.$$

Значит, $\angle CBH = \angle HCA$.

Четвертый способ

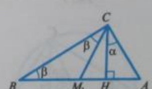

Рис. 3

Проведем медиану CM_3 (рис. 3). Обозначим $\angle CBA = \beta$. Тогда $\angle BCM_3 = \beta$ и $\angle CM_3H = 2\beta$. Поскольку

$$M_3A = M_3B = M_3C,$$

то $\angle M_3CA = \angle CAM_3 = 90° - \beta$. Тогда $\angle M_3CH = (90° - \beta) - \beta = 90° - 2\beta$;

$$\angle ACH = \angle ACM_3 + \angle M_3CH = 90° - \beta + 2\beta - 90° = \beta.$$

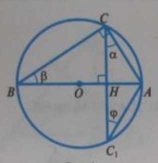

Рис. 4

Пятый способ

Опишем окружность около треугольника CAB ($\angle C = 90°$) (рис. 4). Продлим высоту CH до пересечения с этой окружностью в точке C_1. Тогда $\angle CBA = \angle CC_1A$ (они опираются на дугу AC). Но $\angle CC_1A = \angle ACC_1$. Значит, $\angle ACC_1 = \angle CBA$.

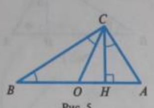

Рис. 5

Шестой способ

В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) O — центр описанной окружности (рис. 5). Поскольку прямые OC и HC изогональны, то $\angle HCA = \angle OCB$. Но $OA = OB$, а значит,

$$\angle OBC = \angle BCO = \angle HCA,$$

что и требовалось доказать.

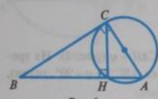

Рис. 6

Седьмой способ

Опишем вокруг треугольника ACH (рис. 6) окружность. Тогда $\angle HCB$ можно рассматривать как угол между касательной BC и хордой CH, а он равен углу CAH.

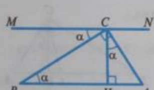

Рис. 7

Восьмой способ

Через вершину C проведем прямую MN, параллельную AB (рис. 7). Поскольку $\angle MCB$ равен углу HCA (углы с взаимно перпендикулярными сторонами) и $\angle MCB$ равен углу CBA, то утверждение доказано.

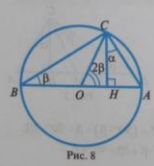

Рис. 8

Девятый способ

Пусть $\angle ACH = \alpha$, $\angle CBA = \beta$. Опишем окружность около треугольника ABC (рис. 8). Поскольку угол COA — центральный, то $\angle COA = 2\beta$ (β — вписанный). В равнобедренном треугольнике COA ($CO = OA$): $\angle OAC = 90° - \beta$. Из ΔHCA: $\alpha + 90° - \beta = 90°$, или $\alpha = \beta$.

Десятый способ

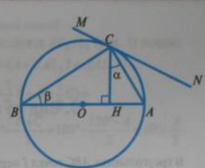

Рис. 9

Проведем через вершину C касательную MN (рис. 9), значит,

$$\angle NCA = \beta,$$

$$\angle MCB = \angle CAB = 90° - \alpha.$$

Имеем:

$$90° - \alpha + 90° + \beta = 180°,$$

следовательно, $\alpha = \beta$.

Одиннадцатый способ предлагается найти самостоятельно.

9. Вид из инцентра

В треугольнике ABC точка I пересечения биссектрис внутренних углов треугольника называется инцентром. Обращалось неоднократно внимание на то, что $\angle BIC = 90° + \frac{A}{2}$. Задача, опубликованная в задачнике геометрии Рыбкина, имела миллионные тиражи и как одна из первых «посильных задач повышенной сложности» в курсе планиметрии пользовалась большим успехом. Возвращаем ее читателю, доказанную многими способами.

Первый способ

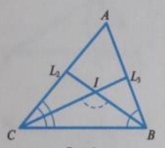

Рис. 1

Как внешний угол треугольника CIL_2 (рис. 1)

$$\angle BIC = \angle ACL_3 + \angle IL_2C =$$
$$= \frac{C}{2} + \left(180° - \left(\frac{B}{2} + C\right)\right) =$$
$$= \frac{C}{2} + 180° - \frac{B}{2} - C = 180° - \left(\frac{B+C}{2}\right) =$$
$$= 180° - \left(\frac{180° - A}{2}\right) = 90° + \frac{A}{2}.$$

Второй способ

Угол BIC внешний в треугольнике BIL_3. Доказывается аналогично первому способу.

Третий способ

Из ΔBIC (рис. 1):

$$\angle BIC = 180° - (\angle IBC + \angle ICB) = 180° - \left(\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C\right) =$$
$$= 180° - \frac{1}{2}(B + C) = 180° - \frac{1}{2}(180° - A) = 90° + \frac{A}{2}.$$

Четвертый способ

$\angle BIC = \angle L_3IL_2$. Из четырехугольника AL_2IL_3 (рис. 1) имеем:

$$\angle BIC = \angle L_3IL_2 = 360° - (A + \angle AL_2I + \angle AL_3I) =$$
$$= 360° - (A + C + \frac{1}{2}B + B + \frac{1}{2}C) =$$
$$= 360° - \left(A + B + C + \frac{B+C}{2}\right) = 180° - \frac{B+C}{2} = 180° - \frac{180° - A}{2} = 90° + \frac{A}{2}.$$

Пятый способ

Поскольку

$$\angle BIC = \angle L_1IB + \angle L_1IC,$$

а эти углы внешние в треугольниках ABI и ACI (рис. 2), то

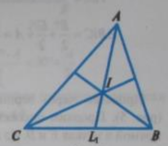

Рис. 2

$$\angle BIC = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}C =$$
$$= \frac{B + 2A + C}{2} = \frac{180° - A + 2A}{2} = 90° + \frac{A}{2}.$$

Шестой способ

Через инцентр I проведем прямую MN параллельную BC (рис. 3). Поскольку $\angle MIC = \frac{1}{2}C$, а $\angle NIB = \frac{1}{2}B$, имеем

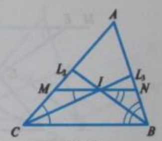

Рис. 3

$$\angle BIC = 180° - \left(\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C\right) = 90° + \frac{A}{2}.$$

Седьмой способ

Поскольку $\angle MIB$ — внешний в треугольнике NIB, а

$$\angle INB = 180° - B,$$

то, учитывая, что $\angle MIC = \frac{1}{2}C$, имеем (рис. 3):

$$\frac{1}{2}C + \angle BIC = 180° - B + \frac{B}{2},$$

откуда

$$\angle BIC = 180° - \frac{(B+C)}{2} = 90° + \frac{A}{2}.$$

Восьмой способ

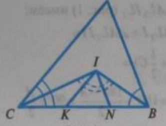

Рис. 4

Через инцентр I проведем прямые IK и IN, параллельные сторонам AC и AB соответственно (рис. 4). Тогда $\angle CIK = \frac{C}{2}$; $\angle BIN = \frac{B}{2}$. Заметим, что $\angle NIK$ равен углу BAC (углы с параллельными сторонами), значит,

$$\angle BIC = \frac{B}{2} + \frac{C}{2} + A = \frac{B + C + 2A}{2} = \frac{180° - A + 2A}{2} = 90° + \frac{A}{2}.$$

Девятый способ

Проведем через вершину A прямую MN, параллельную BC (рис. 5). Продлим биссектрисы BL_2 и CL_3 до пересечения с этой прямой в точках E и D. Из ΔIED:

$$\angle EID = \angle BIC = 180° - \frac{1}{2}(B + C) = 90° + \frac{A}{2}.$$

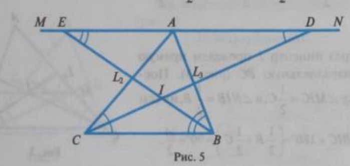

Рис. 5

Десятый способ

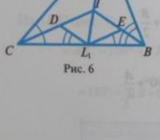

Рис. 6

Проведем $L_1D \| BI$ и $L_1E \| IC$ (рис. 6). Тогда четырехугольник L_1DIE — параллелограмм, а поскольку

$$\angle EL_1B = \frac{1}{2}C, \text{ а } \angle DL_1C = \frac{1}{2}B, \text{ то}$$
$$\angle DL_1E = \angle BIC =$$
$$= 180° - \left(\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C\right) = 90° + \frac{A}{2}.$$

Одиннадцатый способ

Через точку B проведем прямую, параллельную стороне AC и продолжим биссектрису CL_3 до пересечения с этой прямой в точке D:

$BD \| AC$ (рис. 7).

Рис. 7

Угол BIC будет внешним в треугольнике BID:

$$\angle BJC = \frac{B}{2} + A + \frac{C}{2} = A + \frac{180° - A}{2} = 90° + \frac{A}{2}.$$

Заметим, что можно провести аналогичное доказательство, если провести прямую, параллельную стороне AB.

Двенадцатый способ

Проведем прямую t, параллельную биссектрисе CL_3 (рис. 8):

$$\angle BIC = \angle L_2BM =$$
$$= \frac{1}{2}B + \angle CL_3B =$$
$$= \frac{B}{2} + \left(180° - \left(\frac{C}{2} + B\right)\right) =$$
$$= 180° - \frac{B+C}{2} = 90° + \frac{A}{2}.$$

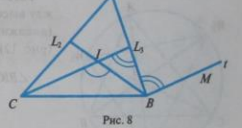

Рис. 8

Тринадцатый способ

Опишем окружность около треугольника ABC и продлим биссектрису угла BAC до пересечения с окружностью в точке W (рис. 9). По теореме трилистника $CW = WI = WB$ и $\angle WCI = \angle CIW$, как и $\angle WBI = \angle BIW$.

Рис. 9

$$\angle ICW = \frac{C}{2} + \angle BCW = \frac{C}{2} + \frac{A}{2},$$
$$\angle IBW = \frac{B}{2} + \frac{A}{2},$$

значит, $\angle BIC = \frac{C}{2} + \frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{A}{2} = A + \frac{B+C}{2} = A + \frac{180° - A}{2} = 90° + \frac{A}{2}.$

Рис. 10

Четырнадцатый способ

Рассмотрим угол BIC как угол с вершиной внутри круга (рис. 10). Точки W_1, W_2, W_3 — точки пересечения биссектрис с описанной около треугольника ABC окружностью. Имеем

$$\angle BIC=\frac{1}{2}(\cup BW_1C+\cup W_3AW_2)=$$

$$=\frac{1}{2}(2A+C+B)=90°+\frac{A}{2}.$$

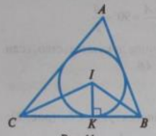

Рис. 11

Пятнадцатый способ

Пусть вписанная окружность касается стороны BC в точке K (рис. 11). Тогда

$$\angle BIC=90°-\frac{B}{2}+90°-\frac{C}{2}=90°+\frac{A}{2}.$$

Рис. 12

Шестнадцатый способ

Рассмотрим угол BIC как угол между высотами треугольника $W_1W_2W_3$ (докажите!): $\angle BIC=180°-\angle W_2W_1W_3$ (рис. 12). Значит,

$$\angle BIC=180°-\frac{1}{2}(B+C)=90°+\frac{A}{2}.$$

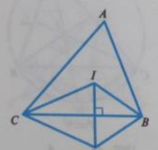

Рис. 13

Семнадцатый способ

Проведем симметрию точки I относительно стороны BC (рис. 13). Получим четырехугольник IBI_1C. Пусть $\angle BI_1C=x$. Имеем

$$\angle BI_1C+\angle I_1CA+\angle CAB+\angle ABI_1=$$

$$=x+\frac{3}{2}C+A+\frac{3}{2}B=360°.$$

$$x=360°-\frac{3}{2}(B+C)-A=$$

$$=360°-\frac{3}{2}(180°-A)-A=90°+\frac{A}{2}=\angle BIC.$$

Восемнадцатый способ предлагаем найти самостоятельно.

10. Угол между высотой и биссектрисой, проведенными из одной вершины

Рассмотрим угол φ между высотой h_a и биссектрисой l_a треугольника ABC. Докажем, что $\varphi=\frac{|B-C|}{2}$. Договоримся для определенности, что $\angle B>\angle C$, значит, $\varphi=\frac{B-C}{2}$.

Популярность этого угла в геометрии треугольника велика, читатель в этом убедится, а пока перейдем к рассмотрению способов доказательств этой формулы.

Первый способ

Пусть AH_1 — высота треугольника ABC, AL_1 — биссектриса треугольника BAC. Обозначим $\angle AL_1H_1$ как α (рис. 1). Ясно, что

$$\varphi=90°-\alpha \qquad (1)$$

(из треугольника AH_1L_1). Из треугольника AL_1C

$$\alpha=C+\frac{1}{2}A. \qquad (2)$$

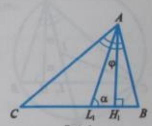

Рис. 1

Подставим выражение (2) в (1):

$$\varphi=90°-\left(C+\frac{1}{2}A\right)=\frac{A+B+C}{2}-\left(C+\frac{1}{2}A\right)=\frac{A+B+C-2C-A}{2}=\frac{B-C}{2}.$$

Второй способ

Из треугольников AL_1B и AH_1B: $\varphi=\frac{1}{2}A-\beta$ ($\beta=\angle H_1AB$). Значит,

$$\varphi=\frac{1}{2}A-(90°-B)=\frac{1}{2}A-\frac{A+B+C}{2}+B=\frac{A-A-B-C+2B}{2}=\frac{B-C}{2}.$$

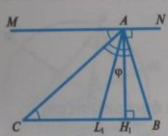

Рис. 2

Третий способ

Проведем прямую MN, перпендикулярную высоте AH_1 (рис. 2). Поскольку $\angle BCA=\angle MAC$, то

$$\varphi=90°-\left(C+\frac{A}{2}\right)=\frac{A+B+C}{2}-C-\frac{A}{2}=$$

$$=\frac{A+B+C-2C-A}{2}=\frac{B-C}{2}.$$

Рис. 3

Четвертый способ

Опишем окружность около треугольника ABC (рис. 3) и продолжим прямую AL_1, а также высоту AH_1 до пересечения с этой окружностью. Получим точки W и N. Имеем

$$\varphi=\frac{1}{2}\cup WN=\frac{1}{2}(\cup WB-\cup BN)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(A-(180°-2B)\right)=\frac{B-C}{2}.$$

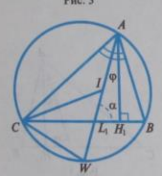

Рис. 4

Пятый способ

Продолжим биссектрису AL_1 до пересечения с описанной окружностью в точке W_1 (рис. 4). Пусть $\angle AL_1H_1$ равен α. Тогда $\varphi=90°-\alpha$. Из треугольника WL_1C

$$\alpha=180°-(\angle L_1CW+\angle CWL_1)=$$

$$=180°-\left(\frac{1}{2}A+B\right), \text{ значит,}$$

$$\varphi=90°-180°+\frac{1}{2}A+B=-\frac{A+B+C}{2}+\frac{A}{2}+B=\frac{A-A-B-C+2B}{2}=\frac{B-C}{2}.$$

Шестой способ

Рассмотрим треугольник CIW (рис. 4): $\angle WCI=\angle CIL_1$ (теорема трилистника). Из треугольника CIL_1 (см. предыдущий способ):

$$\alpha=\angle ICL_1+\angle CIL_1=\frac{1}{2}C+\left(\frac{C}{2}+\frac{A}{2}\right), \text{ значит:}$$

$$\varphi=\frac{A+B+C}{2}-\frac{C}{2}-\frac{C}{2}-\frac{A}{2}=\frac{B-C}{2}.$$

Рис. 5

Седьмой способ

Проведем диаметр WD (рис. 5). Угол φ равен углу DWA, а

$$\angle DWA=\frac{1}{2}\cup AD=$$

$$=\frac{1}{2}(\pi-(\cup WB+\cup AB))=$$

$$=\frac{1}{2}(\pi-(A+2C))=\frac{B-C}{2}.$$

Рис. 6

Восьмой способ

Поскольку (рис. 6)

$$\alpha=\frac{1}{2}(\cup CW+\cup AB)=\frac{1}{2}(A+2C),$$

$$\text{то } \varphi=\frac{A+B+C}{2}-\frac{1}{2}(A+2C)=\frac{B-C}{2}.$$

Девятый способ предлагается найти самостоятельно.

11. Углы с перспективой

Рассмотрим равенство углов: $\angle OAC = \angle BAH_1$ (O — центр описанной около треугольника ABC окружности, H_1 — основание высоты, проведенной из вершины A).

Выбор этой пары углов оценят любители и знатоки геометрии треугольника: при решении задач и доказательстве теорем вы в дальнейшем неоднократно воспользуетесь этой парой.

Доказать, что $\angle OAC = \angle BAH_1$, где O — центр окружности, описанной около треугольника ABC, H_1 — основание высоты, проведенной из вершины A треугольника ABC.

Первый способ

Из треугольника ABH_1 (рис. 1):

$$\angle H_1AB = 90° - B.$$

Рассмотрим треугольник AOC. Поскольку $\angle AOC = 2B$, то

$$\angle OAC = 90° - B \text{ и } \angle OAC = \angle H_1AB.$$

Второй способ

Проведем диаметр AD (рис. 2). Поскольку $\angle ABC = \angle ADC$, то

$$\angle CAD = \angle BAH_1.$$

Утверждение задачи доказано.

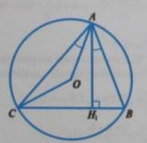

Рис. 1

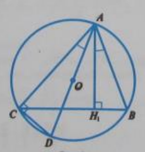

Рис. 2

Третий способ

Проведем биссектрису угла BAC (рис. 3) и продлим ее до пересечения с окружностью в точке W. Тогда $\angle OAW = \angle AWO = \angle WAH_1$. Поскольку $\angle BAW = \angle CAW$, то $\angle OAC = \angle H_1AB$.

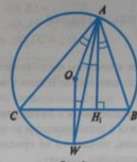

Рис. 3

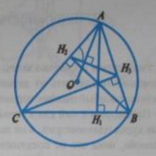

Рис. 4

Четвертый способ

Пусть H_2 и H_3 — основания высот h_b и h_c (рис. 4). Поскольку $\angle AH_2H_3 = \angle B$ (докажите!), а $OA \perp H_2H_3$ (докажите!), то

$$\angle H_2AO = 90° - B = \angle H_1AB.$$

Пятый способ

В точке A проведем касательную MN к описанной окружности (рис. 5). Тогда $\angle OAM$ равен $90°$, а $\angle MAC = \angle B$, значит, $\angle OAC = 90° - B$.

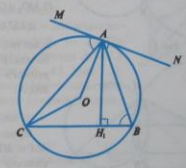

Рис. 5

Шестой способ предлагается найти самостоятельно.

12. Окружность. Первые задачи

Рассмотрим несколько задач, интерес к которым «подогревается» возможностью решить их двумя и более способами. Лично у меня вызывает особый интерес первая задача.

Привыкнув к ней как к одной из предлагаемых в начале изучения курса планиметрии, я не подозревал о существовании второго способа, пока его не предложил ученик, почему-то не сумевший решить задачу первым, более легким способом. Бывает...

Задача 1. Доказать, что общая хорда двух пересекающихся окружностей перпендикулярна линии центров.

Первый способ

Пусть O_1 и O_2 — центры двух пересекающихся окружностей с общей хордой MN (рис. 1). Поскольку треугольники O_1MO_2 и O_1NO_2 равны, то

$$\angle MO_1O_2 = \angle NO_1O_2,$$

а значит, $MN \perp O_1O_2$ как биссектриса равнобедренного треугольника MO_1N.

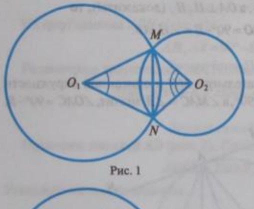

Рис. 1

Второй способ

Проведем диаметры MA и MB (рис. 2). Поскольку

$$\angle MNA = \angle MNB = 90°,$$

то AB — прямая. В треугольнике MAB O_1O_2 — средняя линия, параллельная стороне AB. Поскольку $AB \perp MN$, то $O_1O_2 \perp MN$.

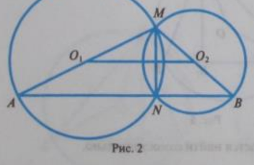

Рис. 2

Третий способ

Продлим радиусы O_1A и O_1B (рис. 3). Так как

$$\angle O_1AB = \angle O_1DC,$$
$$\angle O_1BA = \angle O_1CD,$$
$$\angle O_1AB = \angle ABO_1,$$

то $\angle O_1DC = \angle O_1CD$, следовательно,

$$AB || CD \text{ и } AC = BD.$$

Из свойств симметрии следует, что

$$O_1O_2 \perp AB.$$

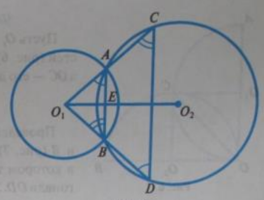

Рис. 3

Задача 2. Два равных отрезка пересекаются под прямым углом в точке O. На них как на диаметрах построены пересекающиеся в точке C окружности. Доказать, что OC принадлежит биссектрисе прямого угла.

Первый способ

Пусть AO и BO — равные отрезки (рис. 4). Поскольку $\smile ACO = \smile BCO$, то $\smile OmC = \smile OnC$, значит, $\smile AC = \smile BC$ и $\angle AOC = \angle BOC$.

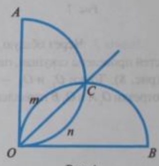

Рис. 4

Второй способ

Поскольку AO и BO — диаметры построенных окружностей, то $\angle ACO = \angle BCO = 90°$, значит, отрезки AC и CB принадлежат прямой AB (рис. 5). В равнобедренном треугольнике AOB отрезок OC является высотой, следовательно, и биссектрисой.

Третий способ

Поскольку OB касательная, то $\angle COB = \frac{1}{2}\smile CnO$ (рис. 5). Аналогично, $\angle COA = \frac{1}{2}\smile CmO$. Но $\smile OmC = \smile OnC$, значит, OC — биссектриса угла AOB.

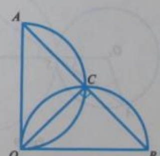

Рис. 5

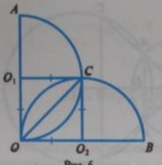

Рис. 6

Четвертый способ

Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей (рис. 6). Тогда OO_1CO_2 — квадрат, а OC — его диагональ.

Пятый способ

Проведем касательные в точках A и B (рис. 7). Получим квадрат $ADBO$, в котором точка C принадлежит диагонали OD. Значит, $\angle AOD = \angle BOD$.

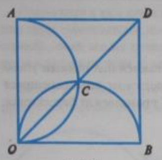

Рис. 7

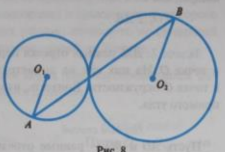

Рис. 8

Задача 3. Через общую точку двух внешне касающихся окружностей проведена секущая, пересекающая эти окружности в точках A и B (рис. 8). Точки O_1 и O_2 — центры этих окружностей. Доказать, что отрезки O_1A и O_2B параллельны.

Первый способ

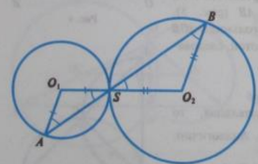

Рис. 9

Проведем линию центров O_1O_2, которой принадлежит общая точка S этих окружностей (рис. 9). Поскольку треугольники O_1AS и O_2BS равнобедренны, а

$$\angle O_1SA = \angle O_2SB,$$

то $\angle O_1AS = \angle O_2BS$

и, значит, $O_1A \| O_2B$.

Второй способ

Через точку S проведем общую касательную MN (рис. 10). Обозначим $\angle SBO_2$ как φ. Проведем диаметр BB_1. Тогда

$\angle BSB_1 = 90°$,

а $\angle B_1SN = \varphi$.

Поскольку

$\angle ASB_1 = 90°$,

то $\angle ASN = 90° - \varphi$,

и $\angle AO_1S = 180° - 2\varphi$,

а $\angle O_1AS = \varphi$,

следовательно,

$O_1A \| O_2B$.

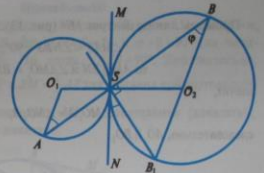

Рис. 10

Третий способ

Пусть AM и BN — диаметры (рис. 11). Поскольку

$\angle MSA = \angle BSN = 90°$,

то MSN — прямая, а значит,

$\angle MSO_1 = \angle NSO_2$,

следовательно,

$\angle MO_1S = \angle NO_2S$

и $AM \| BN$

$(O_1A \| O_2B)$.

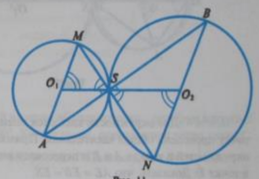

Рис. 11

Четвертый способ

Из центров O_1 и O_2 опустим перпендикуляры на секущую AB (рис. 12). Поскольку

$\angle O_1SE = \angle KSO_2$, то $\angle EO_1S = \angle SO_2K$,

а значит, $\angle AO_1S = \angle SO_2B$ и $AO_1 \| BO_2$.

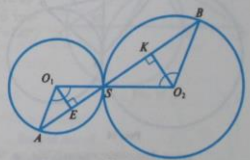

Рис. 12

Пятый способ

Проведем линию центров MN (рис. 13). Поскольку

$$\angle MAS = \angle NBS = 90°,$$

то $AM \| BN$ и $\angle AMO_1 = BNO_2$,

значит,

$$\angle MO_1A = \angle NO_2B,$$

следовательно, $AO_1 \| BO_2$.

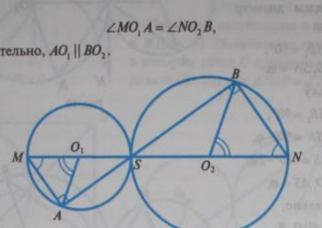

Рис. 13

Задача 4. Две окружности касаются внешне в точке S. Через эту точку проведена общая касательная. Прямая касается внешне этих окружностей в точках A и B и пересекает внутреннюю касательную в точке E. Доказать, что $AE = EB = ES$.

Первый способ

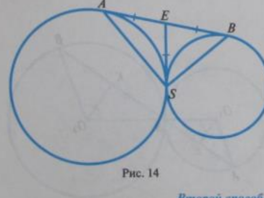

Рис. 14

Пусть AB касательная к данным окружностям (рис. 14). Пусть E — произвольная точка касательной, S — точка касания окружностей. Тогда

$ES = AE, ES = EB$,

значит, $AE = ES = EB$.

Второй способ

$\angle EAS = \angle ASE$ как углы между касательной и хордой, следовательно, $AE = ES$. Аналогично доказывается, что $ES = EB$.

Третий способ

Обозначим M — середину отрезка AB (рис. 15), $\angle SAB = \alpha$, $\angle SBA = \beta$. Тогда $\angle AO_1S = 2\alpha$, $\angle BO_2S = 2\beta$ и $\alpha + \beta = 90°$ (из четырехугольника AO_1O_2B). Но тогда $\angle ASB = 90°$. Действительно, $\angle ASB = 180° - (\alpha + \beta) = 90°$ и $SM = \frac{1}{2}AB$ как медиана прямоугольного треугольника ASB. Поскольку MS — касательная (доказать!), то утверждение задачи доказано.

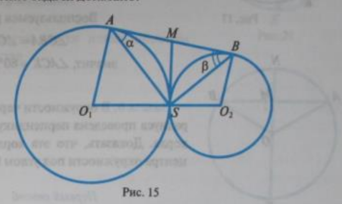

Рис. 15

Задача 5. Диаметр AB и хорда AC окружности с центром в точке O образует угол, равный $30°$. Касательная, проведенная через точку C, пересекает продолжение AB в точке D. Доказать, что $OC = \frac{1}{2}OD$.

Первый способ

Поскольку CD — касательная (рис. 16), то $\angle OCD = 90°$.

Из равнобедренного треугольника AOC: $\angle AOC = 120°$, значит,

$\angle ODC = 30°$,

и $OC = \frac{1}{2}OD$.

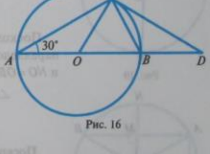

Рис. 16

Второй способ

Поскольку $\angle COB = 60°$, то ΔOCB равносторонний, тогда

$$\angle BCD = 30° \text{ и } \angle CDB = 30°,$$

значит, $OC = \frac{1}{2}OD$.

Третий способ

Поскольку CB — медиана треугольника OCD (рис. 16):

$$CB = OB = BD,$$

то $OC = \frac{1}{2}OD.$

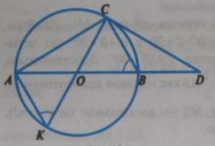

Рис. 17

Четвертый способ

Воспользуемся рис. 17:

$$\angle CBA = \angle CKA,$$

значит, $\angle ACK = 60°$.

Рис. 18

Задача 6. В окружности через середину радиуса проведена перпендикулярная ему хорда. Доказать, что эта хорда видна из центра окружности под углом 120°.

Первый способ

В окружности с центром O проведена хорда AB через середину M радиуса NO (рис. 18). Поскольку по условию

$$\angle OMB = 90°, OM = \frac{1}{2}OB, \text{ то}$$

$$\angle MBO = 30°, \angle MOB = 60°, \angle AOB = 120°.$$

Рис. 19

Второй способ

Поскольку $NM = MO$ и $AM = MB$, то параллелограмм $ANBO$ — ромб (рис. 19), и $NO = OB = NB$, значит,

$$\angle NOB = 60°, \text{ а } \angle AOB = 120°.$$

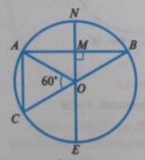

Рис. 20

Третий способ

Поскольку $MO = \frac{1}{2}NO$, и MO — средняя линия в ΔABC (BC — диаметр), то

$$AC = 2MO = ON$$

и ΔAOC — равносторонний, т. е. $\angle AOC = 60°$ (рис. 20), значит, $\angle AOB = 120°$.

Четвертый способ

Поскольку (рис. 21)

$$\angle NBM = \angle MBO,$$

$$\angle NBM = \angle NEB \text{ и}$$

$$\angle OBE = \angle OEB, \text{ то}$$

$$\angle NBM = \angle MBO = \angle OBE = 90° : 3 = 30°,$$

значит, $\angle AOB = 120°$.

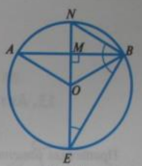

Рис. 21

Предлагается найти новые способы доказательства.

4 - 6-1744

13. Авторская задача... детей

Пропаганда решения задач многими способами не прошла даром. Ученики с сияющими глазами и возгласами: «Мы придумали задачу!» — торжественно прочли ее текст (откровенно говоря, не уверен, что он оригинален, правда, дело не только в этом):

Две окружности разных радиусов пересекаются в точках A и B. Радиусы O_1A и O_1B меньшей окружности продлили до пересечения с большей окружностью в точках C и D соответственно. Доказать, что $AC = BD$.

Оказалось, что ценность задачи, как справедливо заметили ученики-авторы, в пяти (!) способах доказательства.

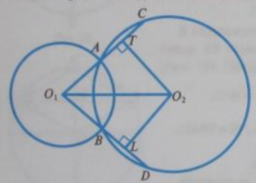

Рис. 1

Первый способ

Из центра O_2 (рис. 1) опустим перпендикуляры O_2T и O_2L на хорды AC и BD. Поскольку прямоугольные треугольники O_1TO_2 и O_1LO_2 равны (по гипотенузе O_1O_2 и острым углам $\angle TO_1O_2 = \angle LO_1O_2$), то $O_2T = O_2L$, а значит, $AC = BD$.

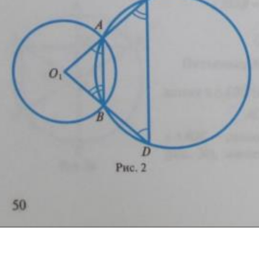

Рис. 2

Второй способ

Поскольку

$$\angle O_1AB = \angle O_1DC$$
$$\text{и } \angle O_1BA = \angle O_1CD$$

(рис. 2), то $\angle C = \angle D$ (так как $O_1A = O_1B$ и

$$\angle O_1AB = \angle O_1BA),$$

следовательно, $O_1C = O_1D$ и $AC = BD$.

Третий способ

По теореме об отрезках секущих:

$$O_1A \cdot O_1C = O_1B \cdot O_1D,$$

но $O_1A = O_1B$, значит, $O_1C = O_1D$, отсюда $AC = BD$.

Четвертый способ

Поскольку треугольники O_1AO_2 и O_1BO_2 равны по трем сторонам (рис. 3), то

$$\angle O_1AO_2 = \angle O_1BO_2.$$

Обозначим

$$\angle CAO_2 = \angle DBO_2 = \varphi.$$

Тогда

$$\angle AO_2C = 180° - 2\varphi = \angle BO_2D.$$

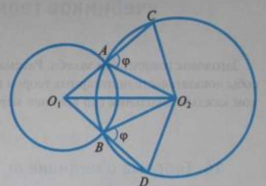

Рис. 3

Следовательно,

$$BO_2 = AO_2, DO_2 = CO_2 \text{ и } \angle AO_2C = \angle BO_2D,$$

значит, $\Delta ACO_2 = \Delta BDO_2$ и $AC = BD$.

Пятый способ

Воспользуемся свойством «равные хорды — равные дуги» (рис. 4). Поскольку

$$\angle O_1AB = \angle O_1BA,$$

значит,

$$\angle CAB = \angle DBA,$$

значит,

$$\smile CD + \smile BD = \smile CD + \smile AC,$$

следовательно,

$$\smile BD = \smile AC \text{ и } BD = AC.$$

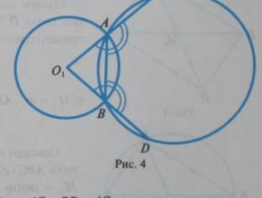

Рис. 4

Шестой способ предлагаем найти самостоятельно.

4*

Глава IV. Теоремы школьных учебников геометрии

Заголовок говорит сам за себя. Рассматриваются различные способы доказательств популярных теорем и формул, с которыми знаком каждый школьник (по крайней мере — должен быть знаком).

14. Теорема о медиане m_c прямоугольного треугольника ACB ($\angle C = 90°$)

В прямоугольном треугольнике CAB ($\angle C = 90°$) медиана CM_3 равна половине гипотенузы. Доказать.

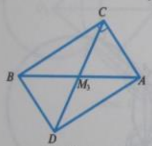

Рис. 1

Первый способ

Удвоим медиану CM_3 (рис. 1). Получим точку D. Четырехугольник $ADBC$ — прямоугольник, значит,

$$m_c = \frac{1}{2}c$$

($CM_3 = m_c$, $AB = c$).

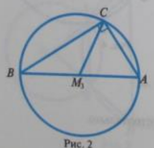

Рис. 2

Второй способ

Опишем окружность около треугольника ABC ($\angle C = 90°$) (рис. 2). Поскольку M_3 — центр этой окружности, то

$$CM_3 = AM_3 = BM_3,$$

или $m_c = \frac{1}{2}c$.

Третий способ

Из точки M_1 проведем прямые, параллельные катетам (рис. 3). Получим прямоугольник CKM_3E. Поскольку

$$EK = CM_3 = \frac{1}{2}AB$$

(EK — средняя линия), то $CM_3 = \frac{1}{2}AB$.

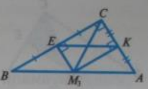

Рис. 3

Четвертый способ

Проведем $M_3E \perp BC$. Поскольку $M_3E \parallel AC$, и M_3E — средняя линия в треугольнике CAB (рис. 4), то $BE = EC$ и треугольник CM_3B — равнобедренный, значит, $CM_3 = M_3B = \frac{1}{2}AB$.

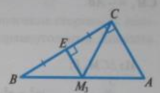

Рис. 4

Пятый способ

Удвоим катет AC. Получим треугольник ADB (рис. 5). Поскольку $BC \perp AD$, то треугольник ADB — равнобедренный и BC — биссектриса угла DBA. Но $CM_3 \parallel BD$, значит, $\angle DBC = \angle BCM_1$ и $CM_3 = BM_3 = \frac{1}{2}AB$.

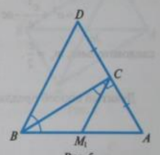

Рис. 5

Шестой способ

Из вершины A (рис. 6) проведем прямую AK, параллельную CM_3. Тогда $\angle M_3CA = \angle CAK$.

Но AC — биссектриса угла BAK (она — высота и медиана) в треугольнике ABK, значит,

$$\angle CAK = \angle CAB,$$

а следовательно, треугольник CAM_3 — равнобедренный, и

$$M_3A = M_3C,$$

следовательно, $CM_3 = \frac{1}{2}AB$.

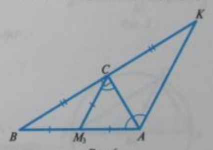

Рис. 6

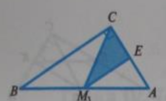

Рис. 7

Седьмой способ

Проведем $M_3E \parallel BC$ (рис. 7). Поскольку

$$CE = \frac{1}{2}AC,$$

а $M_3E = \frac{1}{2}BC$, и $\angle CEM_3 = 90°$,

то треугольник CEM_3 подобен треугольнику ACB, следовательно, $CM_3 = \frac{1}{2}AB$.

Восьмой способ

Из ΔCM_3B:

$$m_c^2 = a^2 + \frac{c^2}{4} - 2\cdot\frac{c}{2}\cdot a\cos(90° - A) =$$

$$= a^2 + \frac{c^2}{4} - ac\sin A = a^2 + \frac{c^2}{4} - a\cdot c\cdot\frac{a}{c} = \frac{c^2}{4},$$

следовательно, $m_c = \frac{c}{2}$.

Девятый способ предлагается найти самостоятельно.

15. Доказать, что треугольник прямоугольный: обратная теорема о медиане

Если в треугольнике медиана равна половине стороны, к которой она проведена, то этот треугольник прямоугольный. Доказать.

Первый способ

Удвоим медиану CM_3 (рис. 1). В параллелограмме $CADB$ диагонали равны, значит, этот параллелограмм прямоугольник,

$$\angle BCA = 90°.$$

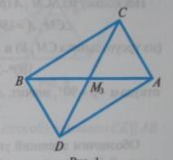

Рис. 1

Второй способ

Обозначим

$$\angle ACM_3 = \alpha, \angle M_3CB = \beta$$

(рис. 2). Поскольку по условию

$$CM_3 = M_3A, \text{ то } \angle CAB = \alpha.$$

Аналогично,

$$\angle CBA = \beta.$$

Имеем (из ΔABC):

$$\alpha + \alpha + \beta + \beta = 180°, \text{ или } \alpha + \beta = 90°.$$

Значит, $\angle ACB = 90°$.

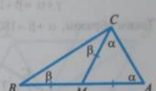

Рис. 2

Третий способ

Поскольку

$$CM_3 = AM_3 = BM_3 \text{ (рис. 3)},$$

то AB — диаметр окружности, описанной около треугольника ACB, значит, $\angle ACB = 90°$.

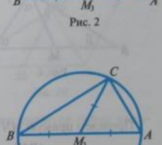

Рис. 3

Четвертый способ

Проведем в равнобедренных треугольниках M_3AC и M_3BC медианы M_3D и M_3E (рис. 4). Четырехугольник M_3DCE — прямоугольник ($DE = \frac{1}{2}AB = M_3C$).

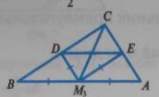

Рис. 4

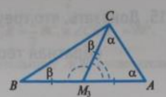

Рис. 5

Пятый способ

Поскольку из ΔCM_3A (рис. 5)

$$\angle CM_3A = 180° - 2\alpha, \text{ а } \angle CM_3B = 180° - 2\beta$$

(из треугольника CM_3B) и $\angle CM_3A + \angle CM_3B = 180°$, то

$$180° - 2\alpha + 180° - 2\beta = 180°,$$

откуда $\alpha + \beta = 90°$, значит, $\angle BCA = 90°$.

Шестой способ

Обозначим внешний угол треугольника CAB как γ (рис. 6), тогда $\gamma = \alpha + \beta$. Из треугольника CM_3B: $\angle NCM_3 = \angle CBM_3 + \angle CM_3B$,

$$\gamma + \alpha = \beta + 180° - 2\beta, \text{ или } \gamma = 180° - \beta - \alpha.$$

Таким образом, $\alpha + \beta = 180° - \beta - \alpha$, откуда $\alpha + \beta = 90°$.

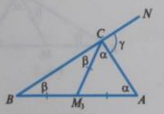

Рис. 6

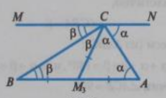

Рис. 7

Седьмой способ

Проведем прямую MN, параллельную AB (рис. 7). Поскольку

$$\angle BAC = \angle ACN, \text{ а } \angle BCM = \angle CBA,$$

то развернутый угол MN равен

$$180° = \alpha + \alpha + \beta + \beta, \text{ откуда } \alpha + \beta = 90°.$$

Восьмой способ

Рассмотрим конфигурацию предыдущей задачи (рис. 7). Поскольку CA — биссектриса угла M_3CN, а CB — биссектриса угла MCM_3, то $AC \perp CB$, значит, $\angle ACB = 90°$.

Девятый способ

Отложим на прямой BC отрезок CD, равный BC (рис. 8). В треугольнике BAD $\angle DBA$ равен углу BDA, а AC — биссектриса угла DAB, следовательно, $\angle BCA$ равен 90°.

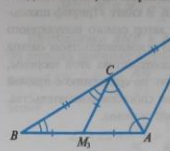

Рис. 8

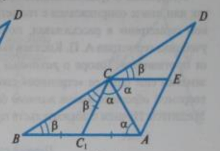

Рис. 9

Десятый способ

В треугольнике ABD (см. предыдущий способ) проведем $CE \parallel AB$ (рис. 9), тогда $\angle ACE = \alpha$, $\angle DCE = \beta$, а

$$\angle BCC_1 + \angle C_1CA + \angle ACE + \angle ECD = 180°,$$

или $\beta + \alpha + \alpha + \beta = 180°$, откуда $\beta + \alpha = 90°$.

Одиннадцатый способ

Дополним треугольник ABC до параллелограмма так, как это показано на рис. 10. Поскольку $CM_3 = CT$, то четырехугольник ABA_1D — ромб, а значит, $\angle BCA = 90°$ (рис. 10).

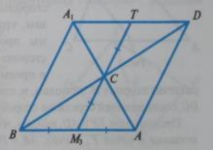

Рис. 10

Двенадцатый способ доказательства предлагается найти самостоятельно.

16. Превратности знаменитой теоремы

С теоремой о средней линии треугольника знаком каждый, кто так или иначе соприкасался с геометрией. В книге «Триумф школьной геометрии» я рассказывал, почему автор самого популярного учебника геометрии А. П. Киселев выбрал ее доказательством «метод от противного». Говоря о *различных* доказательствах этой теоремы, заметим еще одно ее «странное» свойство: по сравнению с прямой теоремой *обратная имеет намного больше* способов доказательства. Убедитесь. Начнем с доказательств прямой теоремы.

Первый способ

(цитируется по учебнику А. П. Киселева «Геометрия»)

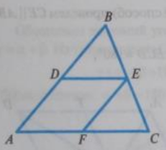

Рис. 1

«Прямая DE (рис. 1), проведенная через середины двух сторон треугольника, параллельна третьей его стороне; отрезок этой прямой, лежащий внутри треугольника, равен половине третьей стороны. Для доказательства вообразим, что через середину D стороны AB мы провели прямую, параллельную стороне AC. Тогда, по доказанному в предыдущем параграфе[1], эта прямая разделит сторону BC пополам, и, следовательно, сольется с прямой DE, соединяющей середины сторон AB и BC.

Проведя еще $EF \parallel AD$, найдем, что сторона AC также разделится пополам в точке F, значит, $AF = FC$, и, кроме того, $AF = DE$ (как противоположные стороны параллелограмма $ADEF$), откуда следует, что

$$DE = \frac{1}{2}AC».$$

[1] В предыдущем параграфе доказывалась теорема о равных отрезках, отложенных на одной стороне угла, и проведении через их концы параллельных прямых.

Второй способ

Второй способ «любопытен» тем, что авторы учебника «Геометрия» (Л. С. Атанасян и др.) поместили его как основной в теме «Подобие», тем самым лишив семиклассников большого класса задач с применением средней линии треугольника. Доказательство приводится точно по учебнику.

«Пусть MN — средняя линия треугольника ABC (рис. 2). Докажем, что

$$MN \parallel AC \text{ и } MN = \frac{1}{2}AC.$$

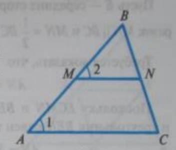

Рис. 2

Треугольники BMN и BAC подобны по второму признаку подобия треугольников ($\angle B$ — общий, $\frac{BM}{BA} = \frac{BN}{BC} = \frac{1}{2}$), поэтому

$$\angle 1 = \angle 2 \text{ и } \frac{MN}{AC} = \frac{1}{2}.$$

Из равенства $\angle 1 = \angle 2$ следует, что $MN \parallel AC$ (объясните почему), а из второго равенства, что $MN = \frac{1}{2}AC$. Теорема доказана».

Третий способ

Третий способ более естественный. Он приводится в первом томе учебника Ж. Адамара «Элементарная геометрия», изданном в XIX столетии.

«Пусть в треугольнике ABC (рис. 3) D — середина AB, E — середина AC. Отложим на продолжении DE отрезок EF, равный DE. Четырехугольник $ADCF$ будет параллелограммом. И, следовательно, CF будет равна и параллельна DA или, что то же самое, BD.

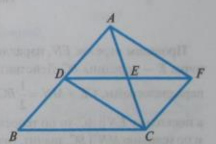

Рис. 3

В самом деле четырехугольник $DBCF$ будет в свою очередь параллелограммом, а потому DE — параллельна BC и, как половина DF, равна половине BC».

(*Ж. Адамар. «Элементарная геометрия». — Часть I. — Москва, 1987*).

Большее количество способов доказательств рассмотрим при доказательстве *обратной теоремы*:

Если отрезок, концы которого лежат на двух сторонах треугольника, параллелен третьей стороне треугольника и равен ее половине, то этот отрезок является средней линией треугольника. Доказать.

Первый способ

Пусть E — середина стороны BC треугольника ABC (рис. 4), а отрезок $MN \parallel BC$ и $MN = \frac{1}{2}BC$.

Требуется доказать, что

$$AN = NB \text{ и } AM = MC.$$

Поскольку $ECMN$ и $BEMN$ — параллелограммы, то $MN = BE$ и треугольник BEN равен треугольнику AMN, значит,

$$AN = NB \text{ и } AM = MC = NE.$$

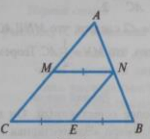

Рис. 4

Второй способ

Проведем отрезок EN, параллельный AC (рис. 4). Докажем, что точка E — середина BC. Действительно, четырехугольник $CMNE$ — параллелограмм, $CE = MN = \frac{1}{2}BC$, значит, точка E — середина BC, а поскольку $EN \parallel AC$, то по теореме Фалеса точка N — середина AB, и по условию $MN \parallel BC$, значит, точка M — середина AC, следовательно, MN — средняя линия треугольника ABC.

Третий способ

Пусть точка E — середина BC (рис. 4). Соединим точки E и N. Не трудно доказать, что четырехугольник $CMNE$ — параллелограмм, а следовательно, N — середина AB.

Четвертый способ

Пусть точка E — середина BC. Проведем $ED \parallel AC$ и $AD \parallel BC$ (рис. 5). Четырехугольник $ADEC$ — параллелограмм. Треугольники ADN и NEB равны:

$$\angle DAN = \angle NBE \text{ и } \angle ADN = \angle NEB,$$

а $AD = CE = EB$, значит, $AN = NB$, т. е. точка N — середина AB. Аналогично, $AM = MC$.

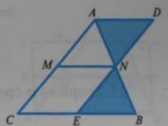

Рис. 5

Пятый способ

Соединим точки E (середину BC) и M (рис. 6). Поскольку четырехугольники $MNEC$ и $MNBE$ — параллелограммы, то $EN \parallel AC$, а поскольку E — середина BC, то N — середина AB. Аналогично, M — середина AC.

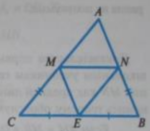

Рис. 6

Шестой способ

Удвоим отрезок MN (рис. 7):

$$MD = 2MN = BC.$$

Четырехугольник $MDBC$ — параллелограмм и

$$\angle AMN = \angle NDB,$$

следовательно, $AN = NB$.

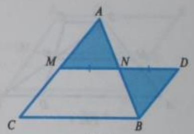

Рис. 7

Седьмой способ

Продолжим отрезок MN, удвоив его: $MN = ND$ (рис. 8). Соединим точки A, D, B. Поскольку $MD = BC$ и $MD \parallel BC$, то четырехугольник $MDBC$ — параллелограмм и $MC \parallel BD$, а значит, $AM \parallel BD$ и треугольник AMN равен треугольнику BND, т. е. N — середина AB.

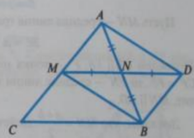

Рис. 8

Восьмой способ предлагается найти самостоятельно.

17. Теорема о средней линии трапеции

Теорема. Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

Первый способ

Доказательство первым способом (рис. 1) общеизвестно по школьным учебникам геометрии, хотя здесь вместо рассмотрения MN как средней линии треугольника ABK можно было применить теорему, обратную теореме Фалеса:

Если $AM = MB$, а $DN = CN$ и $BC \parallel AD$, то $MN \parallel BC \parallel AD$.

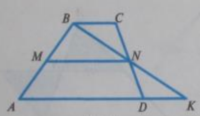

Рис. 1

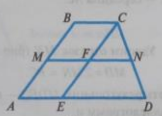

Рис. 2

Второй способ

Пусть MN — средняя линия трапеции $ABCD$ (рис. 2). Обозначим

$$BC = a, AD = b.$$

Проведем $CE \parallel AB$. F — точка пересечения CE и MN. Поскольку $CF = FE$, то FN — средняя линия треугольника ECD и $FN \parallel ED$, значит, $MN \parallel AD$.

Докажем, что $MN = \frac{a+b}{2}$. Действительно,

$$ED = b - a, FN = \frac{b-a}{2},$$

$$\text{а } MN = MF + FN = a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

Третий способ

Через точки A и D проведем перпендикуляры к прямой BC (рис. 3). Получим прямоугольник AA_1D_1D.

Обозначим

$$A_1B = m, CD_1 = n.$$

Очевидно, что

$$m + n = b - a.$$

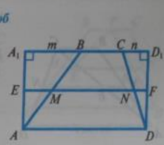

Рис. 3

Пусть точки E и F — середины отрезков AA_1 и DD_1. Тогда

$$MN \parallel AD \text{ и } b = \frac{b-a}{2} + MN,$$

отсюда

$$MN = \frac{2b-b+a}{2} = \frac{b+a}{2}.$$

Четвертый способ

Дополним трапецию $ABCD$ до параллелограмма $ABKD$ ($KD \parallel AB$) (рис. 4). Тогда NE — средняя линия треугольника DCK и $NE \parallel CK$. Поскольку

$$KC = b - a,$$

то $NE = \frac{b-a}{2}$ и $MN + \frac{b-a}{2} = b$,

откуда $MN = \frac{a+b}{2}$ (а значит, $MN \parallel BC$).

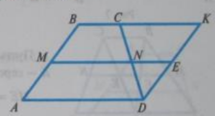

Рис. 4

Пятый способ

Проведем высоты BB_1 и CC_1 (рис. 5). Средние линии ME и FN треугольников ABB_1 и DCC_1 параллельны AD. Обозначим их m и n.

Поскольку

$$m = \frac{1}{2}AB_1, n = \frac{1}{2}C_1D,$$

то $m + n = \frac{b-a}{2}$, и

$$MN = a + m + n = a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

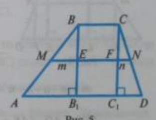

Рис. 5

Шестой способ

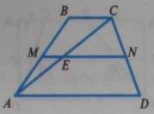

Рис. 6

Проведем диагональ AC (рис. 6). Пусть точка E — середина AC. Тогда $ME \parallel BC, EN \parallel AD$, значит, $MN \parallel BC \parallel AD$.

$$ME = \frac{1}{2}BC, EN = \frac{1}{2}AD,$$

$$MN = ME + EN = \frac{BC + AD}{2}.$$

Седьмой способ

Проведем $CK \parallel BD$ (рис. 7). В параллелограмме $BDKC$ пересечение прямой MN и диагонали CD образует центр симметрии точку N.

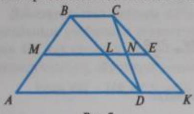

Рис. 7

Из ΔABD: $ML = \frac{1}{2}AD,$

$$LN = \frac{1}{2}LE = \frac{1}{2}BC \text{ и } LE \parallel BC.$$

$$MN = ML + LN = \frac{AD + BC}{2}.$$

Восьмой способ

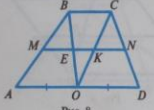

Рис. 8

Пусть O — середина AD (рис. 8). E и K — середины отрезков BO и CO:

$$ME = \frac{1}{2}AO, EK = \frac{1}{2}BC, KN = \frac{1}{2}OD$$

и $ME \parallel AO$, $EK \parallel BC$, $KN \parallel OD$.

$$MN = \frac{1}{2}AO + \frac{1}{2}BC + \frac{1}{2}OD = \frac{1}{4}AD + \frac{1}{2}BC + \frac{1}{4}AD = \frac{BC + AD}{2}.$$

Девятый способ

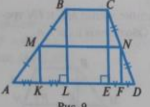

Рис. 9

Из точек B, C, M, N опустим перпендикуляры на основание AD (рис. 9). Перпендикуляр MK будет средней линией в треугольнике ABL ($BL \perp AD$). Аналогично, NF — в треугольнике CED. Обозначим $AK = KL = m$; $FD = FE = n$.

Имеем ($BC = a$; $AD = b$):

$$m + m + a + n + n = b,\ 2m + 2n = b - a;\ m + n = \frac{b - a}{2}.$$

$$MN = AD - (AK + FD) = b - (m + n) = b - \frac{b - a}{2} = \frac{a + b}{2}.$$

Десятый способ

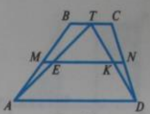

Рис. 10

Пусть T — середина отрезка BC (рис. 10), MN пересекает отрезки AT и DT в точках E и K:

$$ME = \frac{a}{4}, KN = \frac{a}{4}, EK = \frac{b}{2}.$$

Имеем $MN = \frac{a}{4} + \frac{a}{4} + \frac{b}{2} = \frac{2a + 2b}{4} = \frac{a + b}{2}.$

Одиннадцатый способ

Рис. 11

Пусть T — середина BC (рис. 11). Проведем $TE \parallel AB$ и $TF \parallel DC$, L и K — точки пересечения этих отрезков с прямой MN. Имеем

$$MN = ML + LK + KN =$$

$$= \frac{a}{2} + \frac{1}{2}\left(b - 2 \cdot \frac{a}{2}\right) + \frac{a}{2} = a + \frac{b - a}{2} = \frac{a + b}{2}.$$

Двенадцатый способ

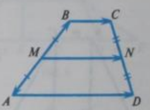

Рис. 12

По правилу многоугольника (рис. 12)

$$\overline{MN} = \overline{MB} + \overline{BC} + \overline{CN}$$

и $\overline{MN} = \overline{MA} + \overline{AD} + \overline{DN}$.

Сложив эти равенства, получим

$$2\overline{MN} = (\overline{MB} + \overline{MA}) + (\overline{BC} + \overline{AD}) + $$

$$+ (\overline{AN} + \overline{DN}).$$

Но M и N — середины сторон AB и CD, поэтому

$$\overline{MB} + \overline{MA} = \overline{0} \text{ и } \overline{CN} + \overline{DN} = \overline{0}.$$

Следовательно, $2\overline{MN} = \overline{AD} + \overline{BC}$, откуда

$$\overline{MN} = \frac{1}{2}(\overline{AD} + \overline{BC}).$$

Так как векторы $\overline{AD}$ и $\overline{BC}$ сонаправлены, то векторы $\overline{MN}$ и $\overline{AD}$ также сонаправлены, а длина вектора $(\overline{AD} + \overline{BC})$ равна $AD + BC$. Отсюда следует, что $MN \parallel AD$ и $MN = \frac{AD + BC}{2}$. Теорема доказана.

(Л. С. Атанасян и др. «Геометрия 7—9». — Москва: Просвещение, 1990.)

5 - 6-1744

18. Равнобедренная трапеция. Средняя линия

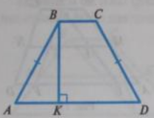

Рис. 1

В равнобедренной трапеции $ABCD$ (рис. 1) из вершины B опущен перпендикуляр BK ($K \in AD$). Доказать, что отрезок KD равен средней линии трапеции.

Первый способ

Проведем CE ($E \in AD$) параллельно BK (рис. 2). Пусть

$$BC = KE = m,$$

$$AK = ED = n.$$

Рис. 2

Поскольку средняя линия MN равна

$$\frac{1}{2}(BC + AD),$$

то

$$MN = \frac{1}{2}(m + m + n + n) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2(m + n) = KD.$$

Второй способ

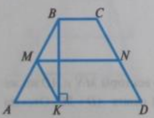

Рис. 3

Соединим точки M и K (рис. 3). В прямоугольном треугольнике ABK медиана

$$MK = \frac{1}{2}AB = ND.$$

Значит, четырехугольник $MNDK$ — параллелограмм, следовательно,

$$KD = MN.$$

Третий способ

Рис. 4

Проведем $DP \parallel BK$ (рис. 4). Поскольку $\Delta ABK = \Delta CPD$, то KD равен полусумме оснований.

Четвертый способ

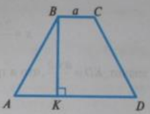

Рис. 5

Пусть $BC = a$; $AD = b$ (рис. 5). Поскольку $AK = \frac{b - a}{2}$, то

$$KD = b - \frac{b - a}{2} = \frac{a + b}{2}.$$

Значит, отрезок KD равен средней линии трапеции, что и требовалось доказать.

Пятый способ

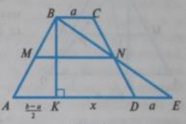

Рис. 6

Проведем прямую BN, которая пересечет прямую AD в точке E (рис. 6). Тогда средняя линия треугольника ABE равна половине отрезка AE. Имеем

$$a + b = \frac{b - a}{2} + x + a$$

($x = KD$), откуда $x = \frac{a + b}{2}$.

Шестой способ

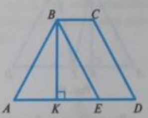

Рис. 7

Проведем $BE \parallel CD$ (рис. 7). Поскольку $AB = BE$, то

$$AK = KE = \frac{b - a}{2},$$

$$KD = a + \frac{b - a}{2} = \frac{a + b}{2}.$$

Седьмой способ

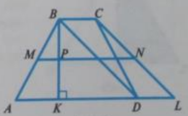

Рис. 8

Произведем параллельный перенос диагонали BD в точку C (рис. 8): $CL \parallel BD$. В трапеции $KBCL$ средняя линия PN равна

5*

$\frac{a+b}{2} - MP$. Но $MP = \frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)$ (из ΔABK). Пусть $KD = x$. Поскольку $2PN = KL$, а $DL = BC = a$, то

$$2\left(\frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{4}\right) = x + a,$$

отсюда

$$a + b - \frac{b-a}{2} - a = x, \text{ или}$$

$$x = \frac{2a + 2b - b + a - 2a}{2} = \frac{a+b}{2},$$

значит, $KD = \frac{a+b}{2}$, что и требовалось доказать.

Восьмой способ

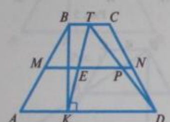

Рис. 9

Проведем $KT \parallel AB$ (рис. 9). Эта прямая пересечет среднюю линию MN в точке E, а прямую TD — в точке P. Имеем

$$KD = 2EP = 2 \cdot (MN - (ME + PN)) =$$
$$= 2 \cdot \left(\frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2} - \frac{1}{2}\left(a - \frac{b-a}{2}\right)\right) =$$
$$= 2\left(\frac{a+b-b+a}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{2a-b+a}{2}\right)\right) = \frac{a+b}{2}.$$

Итак, $KD = MN$.

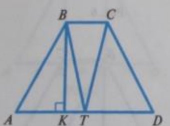

Рис. 10

Девятый способ

Пусть T — середина AD (рис. 10). Рассуждения аналогичны предыдущему способу.

Десятый способ предлагается найти самостоятельно.

19. Здравствуйте, господин Рыбкин!

В этом разделе будут рассмотрены различные доказательства популярной теоремы прошлого столетия:

В прямоугольном треугольнике против угла в 30° лежит катет, равный половине гипотенузы.

В школьных учебниках геометрии такой темы нет, а популяризировал ее Николай Александрович Рыбкин (1861—1919), русский математик, педагог, автор многих распространенных учебников и задачников по геометрии и тригонометрии. Он особо выделил ее (и обратную) в «Сборнике задач по геометрии», ч. I, который выдержал 28 изданий. Уверен, что и сегодня авторы учебников и задачников пользуются этой замечательной книгой, да и учителя находят в ней много нужных и интересных задач. Как опытный, талантливый автор и педагог, Николай Александрович «пропагандировал» теорему, которая способствовала на первых этапах изучения геометрии находить связь между сторонами и углами прямоугольного треугольника до введения тригонометрических функций. Жаль только, что и как сегодняшние авторы, Н. А. Рыбкин не написал к ней пару слов: «Доказать разными способами». Мы за него это сделаем.

Первый способ

Пусть ABC — прямоугольный треугольник ($\angle C = 90°$), в котором

$$\angle CAB = 30°.$$

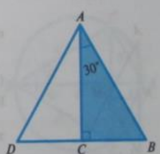

Рис. 1

Достроим его до треугольника ABD (рис. 1), так, что точки B и D симметричны относительно катета AC. Треугольник ABD равнобедренный с углом при вершине 60°, значит,

$$AB = BD \text{ и } CB = \frac{1}{2}AB.$$

Второй способ

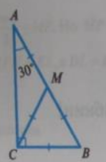

Рис. 2

Проведем медиану CM (рис. 2). Поскольку

$$CM = MB, \text{ а } \angle MBC = 60°,$$

значит,

$$CB = MB = \frac{1}{2}AB.$$

Третий способ

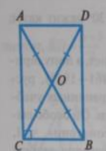

Рис. 3

Дополним прямоугольный треугольник ACB до прямоугольника $ACBD$ (рис. 3). Поскольку диагонали DC и AB равны, то треугольник BOC — равносторонний ($\angle ABC = 60°$), значит,

$$BC = OB = \frac{1}{2}AB.$$

Четвертый способ

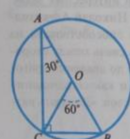

Рис. 4

Опишем окружность около прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$) (рис. 4). Поскольку

$$\angle BAC = 30°,$$

то центральный угол BOC равен 60° и катет BC равен радиусу OB, значит,

$$BC = \frac{1}{2}AB.$$

Пятый способ

Рис. 5

Проведем среднюю линию MN. Поскольку

$$MN \perp AC \text{ и } AN = NC$$

(рис. 5), то треугольник AMC — равнобедренный и

$$\angle ACM = 30°,$$

значит,

$$\angle MCB = 60°$$

$$\text{и } BC = MC = \frac{1}{2}AB.$$

Шестой способ

Рис. 6

Проведем высоту CH (рис. 6) и луч CE, такой, что $\angle ECH$ был бы равен 30°. Тогда

$$\angle ACE = 30° \text{ и } CE = AE = t = BC.$$

Поскольку $BE = BC = AE$, то

$$2t = c, t = \frac{c}{2}.$$

Седьмой способ

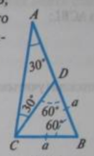

Рис. 7

Отложим катет BC, равный a, на гипотенузе AB, равной c (рис. 7). Поскольку $\angle ABC$ равен 60°, то треугольник CDB — равносторонний и $\angle ACD$ равен 30°, т. е. $AD = CD = a$. Значит,

$$AB = 2a, 2a = c, a = \frac{c}{2}, \text{ или } BC = \frac{1}{2}AB.$$

Восьмой способ

Из вершины C как из центра окружности сделаем засечку радиусом CB. Получим равносторонний треугольник CDB и как в предыдущем случае

$$2a = c, \ a = \frac{c}{2}.$$

Пофантазируем...

Девятый способ
(предложен Г. Филипповским)

Опишем около прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$) окружность и продлим высоту CH до пересечения с окружностью в точке C_1 (рис. 8). Поскольку диаметр AB перпендикулярен хорде CC_1, то $BC = BC_1$, а

$$\angle CBH = \angle C_1BH = 30°,$$

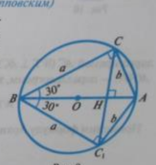

Рис. 8

значит, треугольник CBC_1 — равносторонний и $CC_1 = a$. Применим теорему Птолемея:

$$a \cdot b + b \cdot a = c \cdot a, \text{ или } 2ab = ca; 2b = c.$$

Десятый способ

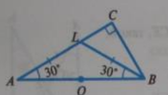

Рис. 9

Проведем биссектрису угла CBA, равного 60° (рис. 9).

$$BL^2 = l^2 = ca - CL \cdot LA.$$

Поскольку $BL = AL = l$, то $CL = b - l$. Имеем

$$l^2 = ac - (b-l)l, \text{ или } l^2 = ac - bl + l^2,$$

отсюда

$$ac = bl. \qquad (1)$$

Из ΔCBL:

$$l^2 = a^2 + (b-l)^2,$$

$$l^2 = a^2 + b^2 - 2bl + l^2,$$

отсюда (учитывая, что $a^2 + b^2 = c^2$), имеем $c^2 = 2bl$. Но из (1):

$$c^2 = 2ac, \text{ или } c = 2a.$$

Одиннадцатый способ
(предложен А. Туманян)

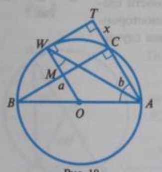

Рис. 10

Пусть в прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) угол CAB равен 60° (рис. 10). Опишем окружность вокруг треугольника ABC и проведем биссектрису угла CAB до пересечения с окружностью в точке W. Поскольку

$$\angle OWA = \angle WAO = \angle CAW,$$

то

$$OW \parallel AC \text{ и } OW \parallel BC,$$

а значит, касательная, проведенная к окружности в точке W будет перпендикулярна прямой AC ($WT \perp AC$). Обозначим отрезок TC как x. Поскольку $AOWC$ — параллелограмм, то

$$WM = x = \frac{1}{2} WO = \frac{b}{2}.$$

Применим формулу Архимеда.

$$AT = \frac{b+c}{2} = x + b,$$

отсюда $x = \dfrac{c-b}{2}$.

Значит,

$$\frac{c-b}{2} = \frac{b}{2}, \text{ откуда } c = 2b,$$

что и требовалось доказать.

Двенадцатый способ доказательства предлагается найти самостоятельно.

20. Обратная теорема о прямоугольнике и ромбе

Если в параллелограмме диагонали равны, то этот параллелограмм — прямоугольник. Доказать.

Доказывать не будем. Много способов уже есть. Где? При доказательстве обратной теоремы о медиане прямоугольного треугольника: если $m_c = \frac{1}{2}c$, то $\angle C = 90°$! Как говорят, один к одному.

А о ромбе — докажем.

Итак,

Если в четырехугольнике $ABCD$ диагонали являются биссектрисами всех его углов, то такой четырехугольник — ромб.

Первый способ

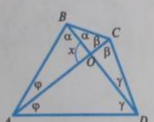

Рис. 1

Рассмотрим четырехугольник $ABCD$ (рис. 1), в котором диагонали пересекаются в точке O. Обозначим углы, как показано на рисунке 1. Как внешний угол треугольника OBC: $x = \alpha + \beta$. Как внешний угол треугольника ODA: $x = \varphi + \gamma$. Значит, $2x = \alpha + \beta + \varphi + \gamma$. Но

$$2\alpha + 2\beta + 2\gamma + 2\varphi = 360°,$$

значит, $\alpha + \beta + \gamma + \varphi = 180°$ и $x = 90°$. Таким образом, в треугольниках ABC и ADC биссектрисы являются высотами, значит, $AB = BC$ и $AD = DC$. Аналогично доказывается, что $BC = CD$, $AB = AD$. Итак, $AB = BC = CD = AD$, четырехугольник $ABCD$ — ромб.

Второй способ

По второму признаку треугольники ABC и ADC равны (рис. 1), значит, $AB = AD$, $BC = CD$, $\alpha = \gamma$, следовательно, $AB \parallel CD$ и $BC \parallel AD$, значит, $ABCD$ — ромб.

Третий способ

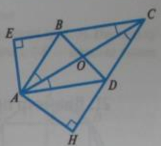

Рис. 2

На прямые BC и CD из точки A опустим перпендикуляры AE и AH (рис. 2). Так как $\angle ECA = \angle HCA$, то

$$EA = AH.$$

Следовательно,

$$\Delta CEA = \Delta CHA, \text{ и } \angle CAE = \angle CAH.$$

Поскольку $\angle BAC = \angle CAD$, то

$$\angle BAE = \angle DAH,$$

следовательно, $AB = AD$ и $BO = OD$, а также $AO \perp BD$, значит, $BC = CD$.

Четвертый способ

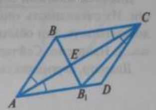

Рис. 3

Из точки B опустим перпендикуляр BE на диагональ AC и продолжим до пересечения с AD в точке B_1 (рис. 3). Поскольку AC — биссектриса, то $BE = EB_1$ и $AC \perp BB_1$, а значит, $\angle BCE = \angle ECB_1$, что невозможно, значит, точка B_1 совпадет с точкой D и $AB = AD$, $AD = BC$, $BC = CD$, т. е. $ABCD$ — ромб.

Пятый способ

Через вершину A проведем прямую $EM \perp AC$ (рис. 4). (Поскольку AC — биссектриса угла ECM, то $EA = MA$ и $\angle CEM = \angle CME$, т. е. $\Delta EBA = \Delta MDA$, значит, $AB = AD$, $\angle BAC = \angle DAC$, следовательно, $BC = CD$, аналогично, $AB = BC$, $AD = DC$. Значит, $ABCD$ — ромб.

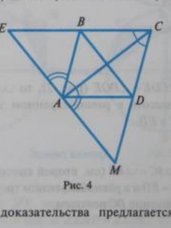

Рис. 4

Шестой способ доказательства предлагается найти самостоятельно.

21. Диаметр перпендикулярный хорде

Докажем многими способами несколько теорем об окружности. Их очевидность «подталкивает» на поиски новых способов доказательств, что обычно не делалось (А зачем? И так все ясно...). Напрасно. Сейчас сами в этом убедитесь. Итак, условие:

Диаметр, перпендикулярный хорде, делит ее пополам.

Первый способ

Пусть AB — диаметр окружности с центром O, CD хорда: $AB \perp CD$ (рис. 1). Поскольку $OD = OC$, то $CE = ED$.

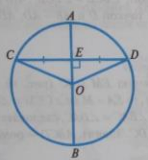

Рис. 1

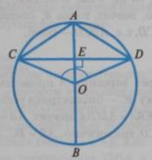

Рис. 2

Второй способ

Поскольку $\angle COE = \angle DOE$ (рис. 2), то $\cup AC = \cup AD$ и $AC = AD$, значит, AE — высота в равнобедренном треугольнике ADC и $AE \perp DC$, т. е. $CE = ED$.

Третий способ

Поскольку $\cup AC = \cup AD$ (см. второй способ), то $\angle ABC = \angle ABD$, $\cup BC = \cup BD$, $BC = BD$ и в равнобедренном треугольнике CBD высота BE делит основание DC пополам.

Четвертый способ

Построим треугольник CDK (DK — диаметр) (рис. 3). Поскольку $\angle KCD = 90°$, то $OE \parallel KC$. Но $OD = OK$, значит, OE — средняя линия треугольника KCD и $CE = ED$.

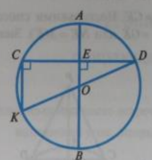

Рис. 3

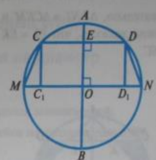

Рис. 4

Пятый способ

Проведем диаметр MN, параллельный хорде CD (рис. 4). Из точек D и C опустим перпендикуляр DD_1 и CC_1 на диаметр MN. Поскольку треугольники DD_1N и CC_1M равны, то $D_1N = C_1M$ и $OD_1 = OC_1$, значит, $ED = CE$.

Шестой способ

Проведем диаметр MN, параллельный хорде CD (рис. 5) и касательные в точках M и N. Они пересекут прямую CD в точках M_1 и N_1. Поскольку $EN_1 = EM_1$, а $DN_1 = CM_1$, то $ED = EC$.

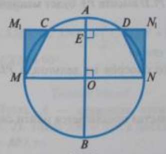

Рис. 5

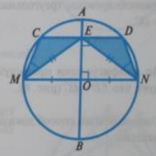

Рис. 6

Седьмой способ

Проведем диаметр MN, параллельный хорде CD (рис. 6). Поскольку $DN = CM$, $EN = ME$ и $\angle END = \angle EMC$, то $\Delta EDN = \Delta EMC$, а значит, $ED = EC$.

Восьмой способ

Проведем диаметр MN, параллельный хорде CD (рис. 7). В треугольнике AMN $\angle ANM = \angle AMN$, значит,

$$\angle DLN = \angle CKM, \angle DNL = \angle KMC.$$

Следовательно, $\Delta DNL = \Delta CKM$ и $DL = CK$. Несколькими способами можно доказать, что $EL = EK$ ($OL = OK$ или $NE = ME$). Значит, $ED = EC$.

Рис. 7

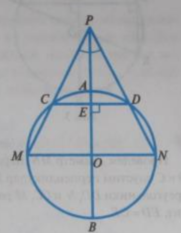

Рис. 8

Девятый способ

Проведем диаметр MN, параллельный хорде CD (рис. 8). Пусть прямые MC и ND пересекутся в точке P. Поскольку $\angle NPO = \angle MPO$, то в равнобедренном треугольнике PCD высота PE будет медианой: $ED = EC$.

Десятый способ

По конфигурации предыдущего способа из дельтоида $PDOC$ следует, что $ED = EC$ (рис. 8).

Одиннадцатый способ доказательства предлагается найти самостоятельно.

22. Вписанный угол, опирающийся на диаметр

Одна из самых часто встречающихся зависимостей:

вписанный угол, опирающийся на диаметр, равен 90°.

Первый способ

Первый способ доказательства очевиден — диаметр стягивает дугу в 180°, а вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается.

Второй способ

В окружности с центром O отрезок MN — диаметр, X — произвольная точка окружности (рис. 1). Рассмотрим треугольник XMN:

$$\angle XMN = \frac{1}{2} \cup XN, \angle XNM = \frac{1}{2} \cup XM,$$

значит,

$$\angle XMN + \angle XNM = \frac{1}{2} \cup MXN = 90°$$

и $\angle NXM = 90°$.

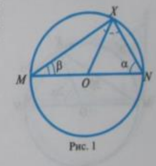

Рис. 1

Третий способ

Пусть A — середина дуги MN (рис. 2). Тогда $AM = AN$, а поскольку $AO = MO$, то

$$\angle MAO = 45° \text{ и } \angle NAO = 45°,$$

т. е. $\angle MAN = 90°$. Поскольку

$$\angle MXN = \angle MAN$$

(они опираются на одну дугу), то $\angle MXN = 90°$.

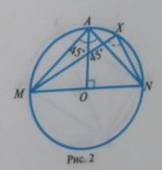

Рис. 2

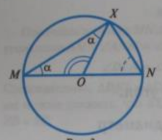

Рис. 3

Четвертый способ

Пусть $\angle XMN = \alpha$ (рис. 3). Поскольку $MO = OX$, то

$$\angle MOX = 180° - 2\alpha,$$

$$\cup MX = 180° - 2\alpha$$

и $\angle XNM = 90° - \alpha$, а поскольку

$$\angle MXN + \angle XMN + \angle XNM = 180°,$$

$$\text{то } \angle MXN + \alpha + 90° - \alpha = 180°,$$

откуда $\angle MXN = 90°$.

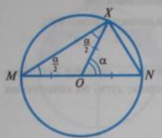

Рис. 4

Пятый способ

Пусть $\angle XON = \alpha$. Тогда

$$\angle MXO = \angle XMO = \frac{\alpha}{2},$$

$$\angle XNO = 90° - \frac{\alpha}{2} = \angle OXN$$

(рис. 4). Далее,

$$\angle MXN = \angle MXO + \angle OXN =$$

$$= \frac{\alpha}{2} + 90° - \frac{\alpha}{2} = 90°.$$

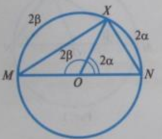

Рис. 5

Шестой способ

Пусть центральные углы

$$\angle XON = 2\alpha, \angle MOX = 2\beta$$

(рис. 5). Поскольку

$$2\alpha + 2\beta = 180°$$

(смежные углы), и

$$\angle XMN = \alpha, \angle XNM = \beta,$$

то $\angle MXN = 90°$.

Рис. 6

Седьмой способ

Проведем диаметр XE (рис. 6). Поскольку

$$XO = OE \text{ и } MO = ON, \text{ и } XE = MN,$$

то $XNEM$ — прямоугольник и

$$\angle MXN = 90°.$$

Восьмой способ

Пусть $\angle XNM = \alpha$, $\angle XMN = \beta$. Поскольку $XO = ON = OM$ (рис. 7), то

$$\angle OXN = \alpha, \angle OXM = \beta$$

и $\alpha + \beta + \alpha + \beta = 180°$, значит, $\alpha + \beta = 90°$ и $\angle MXN = 90°$.

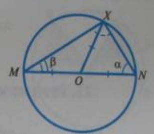

Рис. 7

Девятый способ

В точке X проведем касательную LT (рис. 8). Пусть $\angle NXT = \alpha$, $\angle LXM = \beta$. Тогда $\angle XON = 2\alpha$, $\angle XOM = 2\beta$ и

$$2\alpha + 2\beta = 180°, \text{ и } \alpha + \beta = 90°,$$

т. е. $\angle MXN = 180° - (\alpha + \beta) = 90°$.

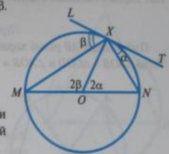

Рис. 8

Десятый способ

Проведем касательную в точке N и продолжим XM до пересечения с ней в точке E (рис. 9). Тогда

$$\angle XNE = \angle XMN$$

(угол между касательной и хордой), а $\angle MEN = \angle XNM$:

$$\angle MEN = \frac{1}{2}(\cup MTN - \cup XN) =$$

$$= \frac{1}{2}(\cup MXN - \cup XN).$$

Пусть $\angle XMN = \alpha$, $\angle XNM = \beta$. Имеем $\alpha + \beta + \alpha + \beta = 180°$, значит,

$$\alpha + \beta = 90°, \text{ и } \angle MXN = 90°.$$

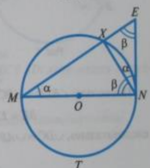

Рис. 9

Одиннадцатый способ

Из точки X проведем хорду XK, перпендикулярную MN, которая пересечет MN в точке H (рис. 10). Поскольку

$$XH \cdot HK = MH \cdot HN \text{ и } XH = HK,$$

то $XH^2 = MH \cdot HN$, а это значит, что $\angle MXN = 90°$.

Рис. 10

Двенадцатый способ предлагается найти самостоятельно.

23. Равные хорды — равные дуги

Звучит как лозунг на демонстрации, но тем не менее это так: равные хорды стягивают равные дуги.

Первый способ

Пусть хорда AB равна хорде DC (рис. 1), O — центр окружности. Тогда $\Delta AOB = \Delta COD$ и $\angle AOB = \angle COD$, значит, $\cup AB = \cup CD$.

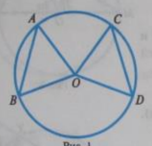

Рис. 1

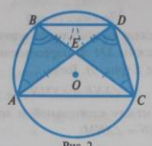

Рис. 2

Второй способ

Поскольку $\angle BAD = \angle BCD$, $\angle ABC = \angle ADC$ (рис. 2), значит,

$$BE = ED, \text{ и } \angle EBD = \angle BDE,$$

следовательно, $\cup DC = \cup AB$.

Рис. 3

Третий способ

Проведем радиусы OE и OF, перпендикулярные равным хордам AB и CD (рис. 3), K и L — точки пересечения. Поскольку $OK = OL$, то

$$EK = LF \text{ и } \Delta EKB = \Delta CFL,$$

а значит, $\angle EBA = \angle DCF$. Тогда

$$\cup EA = \cup FD \text{ или } \frac{1}{2} \cup AB = \frac{1}{2} \cup CD,$$

т. е. $\cup AB = \cup OD$.

Четвертый способ

Поскольку $\Delta BOK = \Delta OCL$ (см. третий способ, рис. 4), то

$$\angle BOK = \angle COL, \text{ тогда } \cup BE = \cup CF,$$

а значит, $\cup AB = \cup CD$.

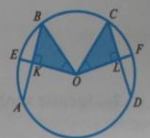

Рис. 4

Пятый способ

Пусть продолжения хорд AB и CD пересекаются в точке S (рис. 5). Обозначим $AB = CD = m$. Имеем

$$SA \cdot SB = SD \cdot SC,$$

$$SB(m + SB) = SC(m + SC),$$

$$\text{или } SB^2 + SB \cdot m = SC^2 + SC \cdot m,$$

$$\text{или } SB^2 - SC^2 + (SB - SC)m = 0,$$

$$(SB - SC)(SB + SC) + (SB - SC)m = 0,$$

отсюда $SB = SC$ и $SA = SD$, следовательно, $BC \parallel AD$, а значит (трапеция $ABCD$ — равнобедренная):

$$\angle BAD = \angle CDA \text{ и } \cup AB = \cup CD.$$

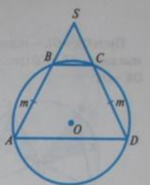

Рис. 5

Шестой способ

Поскольку $ABCD$ — трапеция, то $BC \parallel AD$: дуги между параллельными хордами равны: $\cup AB = \cup CD$.

Седьмым способом предлагается доказать самостоятельно.

24. Равные хорды равно удалены от центра

Сама теорема вынесена в заголовок.

Первый способ

Пусть OK и OL — перпендикуляры, опущенные из точки O на равные хорды AB и CD (рис. 1). Поскольку $KB = LC$, то $\Delta KBO = \Delta LOC$ и $OK = OL$.

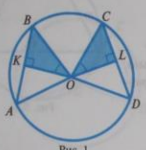
Рис. 1

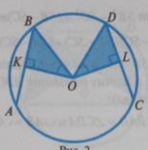
Рис. 2

Второй способ

Опустим перпендикуляры OK и OL (рис. 2) на равные хорды AB и CD, которые стягивают равные дуги. Тогда $\Delta OKB = \Delta ODL$ и $OK = OL$.

Третий способ

Проведем радиусы OE и OF, перпендикулярные равным хордам AB и CD (рис. 3). Поскольку $KB = CL$, а $\cup AE = \cup DF$, то $\Delta EBK = \Delta FCL$ и $EK = LF$, а значит, $KO = OL$.

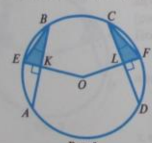
Рис. 3

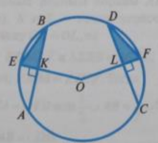
Рис. 4

Четвертый способ

Пусть E и F — середины равных дуг AB и CD (рис. 4). Тогда $EO \perp AB$ и $OF \perp CD$, а $\Delta EKB = \Delta FDL$. Значит, $EK = LF$ и $KO = LO$.

Пятый способ

Продлим равные хорды AB и CD до пересечения в точке S (рис. 5). Поскольку $SA = SC$, $SB = SD$, то $\angle ASO = \angle CSO$ и прямоугольные треугольники SKO и SEO будут равны, а значит, $OK = OE$.

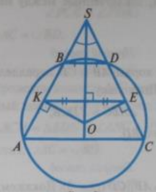
Рис. 5


Рис. 6

Шестой способ

Через середины хорд AB и CD (точки K и E) проведем хорду MN (рис. 6). Поскольку $AK = KB$ и $CE = ED$, то $BD \parallel AC \parallel MN$ и $MB = ND$. Кроме того, $BK = DE$ и $\angle MBK = \angle NDE$, значит, $\Delta MBK = \Delta NDE$ и $MK = EN$, $KH = EH$ и $OK = OE$.

Седьмым способом предлагается доказать самостоятельно.

25. А теперь хорды параллельны

Если хорды параллельны, то дуги, заключенные между ними, равны. Докажем это.

Первый способ

Пусть хорды AB и CD параллельны (рис. 1). Поскольку

$$\angle ABC = \angle DCB,$$

то $\cup AC = \cup BD$.

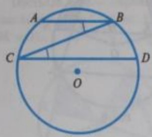
Рис. 1

Второй способ

Пусть $AB \parallel CD$ (рис. 2). Докажем, что

$$AC = BD.$$

Из точек A и B опустим перпендикуляры AK и BL на хорду CD. Поскольку

$$\angle ACD = \angle BDC,$$

то треугольник AKC равен треугольнику BLD и $AC = BD$, а это значит (равные хорды — равные дуги), что

$$\cup AC = \cup BD.$$

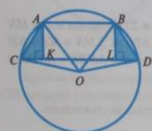
Рис. 2

Третий способ

Проведем диаметр MN, перпендикулярный хордам AB и CD в точках K и E (рис. 3). Поскольку

$$AM = MB,$$

то $\angle AMK = \angle BMK$, а значит,

$$\cup AN = \cup BN.$$

Аналогично,

$$\cup CN = \cup ND,$$

то $\cup AC = \cup BD$.

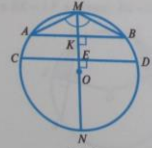
Рис. 3

Четвертый способ

Через середины E и K хорд AB и CD ($AB \parallel CD$) проведем диаметр (рис. 4). Продолжения хорд AC и BD будут иметь общую точку P на продолжении диаметра, значит,

$$PC = PD \text{ и } AP = PB.$$

Поскольку

$$\angle PCK = \angle PDK,$$

то $\cup AC = \cup BD$.

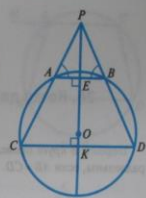
Рис. 4

Пятый способ

Проведем диаметр MN, перпендикулярный хордам AB и CD (рис. 5). Тогда

$$\Delta ACN = \Delta BDN \text{ и } \angle ANC = \angle BND,$$

а значит, $\cup AC = \cup BD$.


Рис. 5

Шестой способ

Проведем диаметр MN, параллельный хордам AB и CD (рис. 6). Обозначим α и β равные углы при основаниях равнобедренных треугольников AOB и COD. Тогда

$$\angle AOM = \alpha, \angle COM = \beta.$$

Аналогично, $\angle BON = \alpha$ и $\angle NOD = \beta$, значит,

$$\angle AOC = \alpha + \beta; \angle BOD = \alpha + \beta,$$

следовательно, $\cup AC = \cup BD$.

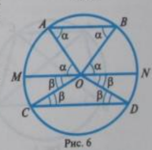
Рис. 6

Седьмой способ

В равнобедренной трапеции $ABCD$ (рис. 7) углы 1, 2, 3, 4 равны как углы при основаниях равнобедренных треугольников ($AE = EB$, $DE = EC$). Тогда $\cup AC = \cup CD$.

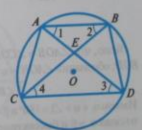
Рис. 7

Восьмым способом предлагается доказать самостоятельно.

26. Когда две хорды параллельны?

Теорема. В круге проведены хорды AB и CD. Хорды AC и BD параллельны, если $AB = CD$.

Первый способ

Действительно, поскольку $\angle ACB = \angle CBD$ (рис. 1), то $AC \parallel BD$.

Второй способ

Как угол с вершиной внутри круга:

$$\angle ABD = \frac{1}{2}(\cup AC + \cup CD) = \frac{1}{2}(\cup AC + \cup AB) = \angle BDC$$

(рис. 1). Поскольку

$$\angle ABC = \angle ADC, \text{ то } \angle CBD = \angle ADB.$$

Но $\angle ACB = \angle ADB$, поэтому $\angle ACB = \angle CBD$ и $AC \parallel BD$.

Рис. 1

Рис. 2

Третий способ

Ясно, что $\angle AOB = \angle COD$ (рис. 2). Проведем биссектрису MN угла BOD; обозначив $\angle AON = \alpha$; $\angle CON = \beta$, $\angle AOB = \angle COD = \varphi$,

$$\angle BOM = \angle DOM = \angle 1.$$

Имеем $\alpha + \varphi + \angle 1 = 180°$ и $\beta + \varphi + \angle 1 = 180°$, значит, $\alpha + \varphi + \angle 1 = \beta + \varphi + \angle 1$, отсюда $\alpha = \beta$ и биссектриса MN будет биссектрисой угла AOC, а поскольку $BO = OD = AO = OC$, то $MN \perp AC$ и $MN \perp BD$, т. е. $AC \parallel BD$.

Четвертый способ

Поскольку (рис. 3)

$$\angle MAB = \frac{1}{2}(\cup AB + \cup AC),$$

$$\text{а } \angle B = \frac{1}{2} \cup ACD \text{ и } \cup AB = \cup CD,$$

значит,

$$\angle MAB = \angle ABD, AC \parallel BD.$$

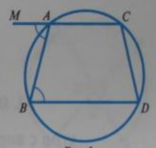

Рис. 3

Пятый способ

Проведем касательные в точках A и C (рис. 4): KE и KP. Поскольку

$$\angle KAC = \angle KCA,$$

$$\text{а } \angle EAB = \angle PCD,$$

то $\angle BAC = \angle ACD$. Но

$$\angle BAC = 180° - \angle BDC,$$

тогда

$$\angle ACD = 180° - \angle BDC$$

значит, $AC \parallel BD$.

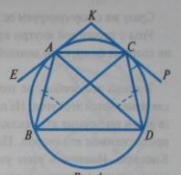

Рис. 4

Шестой способ

Поскольку

$$BP = DP, \text{ а } AB = CD,$$

то $AP = CP$ (рис. 5), значит, $AC \parallel BD$.

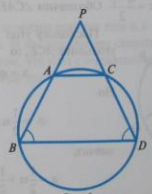

Рис. 5

27. Особая теорема:

угол с вершиной внутри круга

Сразу же сформулируем ее:

Угол с вершиной внутри круга измеряется полусуммой двух дуг, на которые опираются данный и вертикальный к нему углы.

Теорема это особая, не только потому что сразу и не поймешь, как измеряется этот угол. Не проще ли: угол с вершиной внутри круга равен полусумме дуг, заключенных между его сторонами и между продолжением его сторон. По крайней мере, так было в учебнике Киселева. Именно в этом учебнике теорема занимала достойное место наряду с другими теоремами о круге. В последующих учебниках о ней либо ничего не сообщалось, либо она предлагалась в виде заурядной задачи. Так что особенность ее печальная. Но есть компенсация: теорема имеет замечательный *второй* способ доказательства. Но по порядку.

Первый способ

Пусть требуется доказать, что угол X, образованный хордами AB и CD (рис. 1) равен $x = \frac{\alpha + \beta}{2}$. Обозначим $\angle CAE = \varphi_1$, $\angle ACE = \varphi_2$.

Рис. 1

Поскольку угол x — внешний в треугольнике ACE, то

$$x = \varphi_1 + \varphi_2.$$

Но

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}\alpha; \varphi_2 = \frac{1}{2}\beta,$$

значит,

$$x = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta; x = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Второй способ (!)

Через точку C проведем хорду CK, параллельную AB (рис. 2). Тогда

$$\angle KCD = \angle AED = x, \cup AK = \cup BC = \alpha.$$

Значит,

$$\angle KCD = \frac{1}{2} \cup KD =$$

$$= \frac{1}{2}(\cup AK + \cup AD) = \frac{1}{2}(\alpha + \beta),$$

что и требовалось доказать.

Рис. 2

Третий способ

Обозначим

$$\angle ECB = \varphi_1, \angle EBC = \varphi_2$$

(рис. 3). Тогда

$$\angle EAD = \varphi_1, \angle EDA = \varphi_2.$$

Из ΔEBC:

$$x = 180° - (\varphi_1 + \varphi_2).$$

Из ΔEDA:

$$x = 180° - (\varphi_1 + \varphi_2).$$

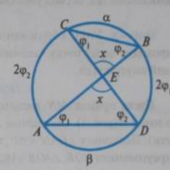

Рис. 3

Значит,

$$2x = 360° - (2\varphi_1 + 2\varphi_2) = 360° - (360° - (\alpha + \beta)) = \alpha + \beta;$$

$$x = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Особенность этой теоремы состоит еще и в том, что четвертый способ найти нелегко. И мы предлагаем сделать это самостоятельно, как и убедиться в том, что угол с вершиной вне круга измеряется похоже — полуразностью дуг.

28. Угол между касательной и хордой

Долгое время считался столь экзотичным, что применялся только в решении задач повышенной сложности, а также предлагаемых на олимпиадах. Популяризация этого угла, как и многие способы доказательства, весьма уместна.

Теорема. Угол, образованный касательной и хордой, которая проходит через точку касания, измеряется половиной дуги, лежащей внутри угла.

Первый способ

Пусть прямая MN касается окружности с центром в точке O в точке A (рис. 1). Обозначим $\angle NAB = \alpha$ (AB — хорда этой окружности). Поскольку $\angle OAN = 90°$, то $\angle OAB = 90° - \alpha$. Из равнобедренного треугольника AOB: $\angle AOB = 180° - 2(90° - \alpha) = 2\alpha$. Значит,

$$\angle NAB = \frac{1}{2}\cup AB, \text{ поскольку } \cup AB = 2\alpha.$$

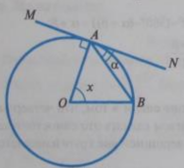

Рис. 1

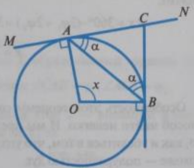

Рис. 2

Второй способ

В точке B проведем касательную к окружности (рис. 2). В равнобедренном треугольнике ABC (C — точка пересечения касательных)

$$\angle ACB = 180° - 2\alpha.$$

Из четырехугольника $ACBO$ имеем

$$x = 180° - (180° - 2\alpha) = 2\alpha, \text{ значит, } \cup AB = 2\alpha.$$

Третий способ

Проведем диаметр AD (рис. 3). K — точка пересечения прямых MN и BD. Поскольку $AB \perp KD$, то $\angle ADB = \alpha$, следовательно, $\cup AB = 2\alpha$.

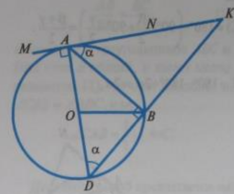

Рис. 3

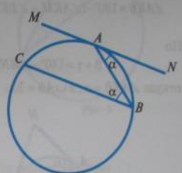

Рис. 4

Четвертый способ

Через точку B проведем хорду, параллельную MN (рис. 4). Имеем $BC \parallel MN$, а $\cup AC = \cup AB = 2\alpha$ ($\cup AC = 2B$).

Пятый способ

Из точки O опустим перпендикуляр на хорду AB (рис. 5). Продлим OK до пересечения с MN в точке C. В прямоугольном треугольнике AOC: $\angle AOC = \angle KAC = \alpha$, значит, $\cup AB = 2\alpha$.

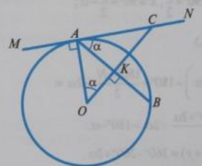

Рис. 5

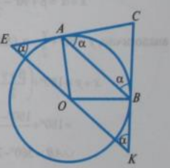

Рис. 6

Шестой способ

Проведем через центр O прямую EK, параллельную хорде AB (рис. 6). Тогда $\angle CEK = \angle CKE = \alpha$, а

$$\angle AOB = 180° - 2\angle AOE = 180° - 2(90° - \alpha) = 2\alpha.$$

Значит, $\cup AB = 2\alpha$.

Седьмой способ

Впишем данную окружность с хордой AB в треугольник NML (рис. 7). Обозначим $\angle NML = \beta$, а $\angle NLM = \gamma$. Пусть окружность касается стороны ML в точке K. Тогда

$$\angle AKB = 180° - (\angle AKM + \angle BKL) = 180° - \left(90° - \frac{\beta}{2} + 90° - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\beta + \gamma}{2}.$$

Но

$$\beta + \gamma = 180° - \angle MNL = 180° - 180° + 2\alpha = 2\alpha,$$

откуда $\angle AKB = \alpha$, а $\cup AB = 2\alpha$.

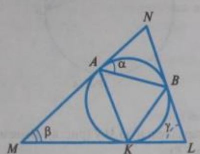

Рис. 7

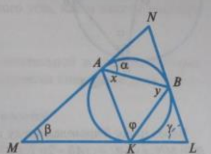

Рис. 8

Восьмой способ

Обозначим $\angle AKB = \varphi. \cup AB = 2\varphi, \cup BK = 2x, \cup AK = 2y$. Из ΔAMK:

$$x + \alpha = \beta + 90° - \frac{\beta}{2} = 90° + \frac{\beta}{2},\ x = 90° + \frac{\beta}{2} - \alpha;$$

аналогично, $y = 90° + \frac{\gamma}{2} - \alpha$ (ΔBKL).

$$x + y = 180° + \left(\frac{\beta + \gamma}{2} - 2\alpha\right) = 180° + \frac{180° - N}{2} - 2\alpha =$$

$$= 180° + \frac{180° - 180° + 2\alpha}{2} - 2\alpha = 180° - \alpha.$$

$$\cup AB = 360° - 2(x + y) = 360° - 360° + 2\alpha,$$

$$\text{или } \cup AB = 2\alpha.$$

Девятый способ
(с маленькой историей)

Предложил доказать эту теорему восьмиклассникам. Они как раз изучали тему «Подобие» и теорему о секущей и касательной. Как ни странно, «зомбирование» пошло на пользу.

Пусть AB — касательная, BC — секущая (рис. 9). Имеем

$$AB^2 = BC \cdot BD, \text{ или}$$

$$\frac{AB}{BD} = \frac{BC}{AB}, \qquad (1)$$

поскольку у треугольников ABC и DBA угол B общий, и имеет место равенство (1), то они подобны и $\angle CAB = \angle ADC$, или

$$\angle CAB = \frac{1}{2}\cup AnC.$$

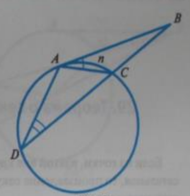

Рис. 9

Десятый способ предлагается найти самостоятельно.

29. Теорема о секущей и касательной

Если из точки, взятой вне круга, проведены к нему секущая и касательная, то произведение секущей на внешнюю часть равно квадрату касательной.

Первый способ

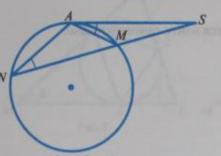

Рис. 1

Пусть SA — касательная, SN — секущая (рис. 1). Поскольку $\angle SAM = \angle ANM$, то треугольники SNA и SMA подобны, а потому

$$\frac{SA}{SN} = \frac{SM}{SA},$$

или $SA^2 = SN \cdot SM$.

Второй способ

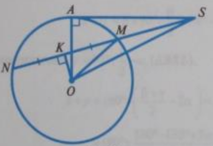

Рис. 2

Из центра O проведем перпендикуляр OK к секущей SN (рис. 2). Обозначим

$$SK = a;$$

$$MK = KN = q,$$

$$OK = t,$$

радиус окружности R, A — точка касания. Имеем

$$SM \cdot SN = (a-q)(a+q) = a^2 - q^2.$$

Но $a^2 = SK^2 = SO^2 - OK^2$ (из ΔSOK), $q^2 = MO^2 - OK^2$. Имеем

$$SM \cdot SN = \left(SO^2 - t^2\right) - \left(MO^2 - t^2\right) = SO^2 - MO^2 = SO^2 - R^2.$$

Но $SO^2 - R^2 = SA^2$ (ΔSAO). Значит,

$$SM \cdot SN = SA^2,$$

что и требовалось доказать.

Третий способ

Обозначим (рис. 3)

$$\angle NOE = \alpha, \angle MOS = \beta$$

(рис. 3). Имеем

$$\angle NOM = 180° - (\alpha + \beta);$$

$$\angle OMN = \angle ONM = \frac{\alpha + \beta}{2};$$

$$\angle OSM = \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

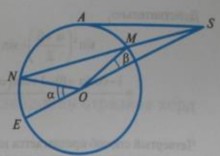

Рис. 3

Из треугольников OMS и OSN:

$$\frac{SM}{\sin\beta} = \frac{R}{\sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)} = \frac{OS}{\sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)} = \frac{SN}{\sin\alpha}$$

(R — радиус окружности). Отсюда

$$SN \cdot SM = R^2 \cdot \frac{\sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin^2\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)},$$

а также

$$SO^2 = R^2 \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)}.$$

Пусть A — точка касания.

$$SA^2 = SO^2 - R^2 = R^2\left(\frac{\sin^2\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)} - 1\right).$$

Остается доказать, что

$$R^2\left(\frac{\sin^2\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)} - 1\right) = R^2\,\frac{\sin\alpha\,\sin\beta}{\sin^2\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)},$$

или

$$\sin^2\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) = \sin\alpha\,\sin\beta.$$

Действительно,

$$\sin^2\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) =$$

$$= \frac{1 - \cos(\alpha + \beta) - 1 + \cos(\alpha - \beta)}{2} = \sin\alpha\,\sin\beta.$$

Четвертый способ предлагается найти самостоятельно.

30. Теорема о произведении отрезков хорд

Если через точку E, взятую внутри круга, проведены хорды AB и CD, то

$$AE \cdot EB = CE \cdot ED.$$

Доказательство этой теоремы традиционно просто (рис. 1):

$$\Delta AEC \sim \Delta DEB;$$

$$\frac{AE}{ED} = \frac{CE}{BE},$$

откуда $AE \cdot BE = CE \cdot ED$.

Но уже доказательство вторым способом достаточно интересно.

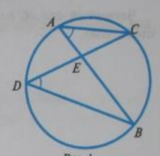

Рис. 1

Второй способ
(такой интересный подход)

Пусть хорды AB и CD пересекаются в точке X (рис. 2). Докажем, что произведение $AX \cdot XB$ зависит только от радиуса окружности R и расстояния t точки X от центра окружности O.

Построим на хорде AB как на диаметре окружность γ (Q — центр окружности). Пусть r — радиус этой окружности. Из точки X восставим перпендикуляр $XH = h$ до пересечения с окружностью γ.

Рис. 2

Из ΔXHQ: $XQ^2 = r^2 - h^2$.

Из ΔQBO: $QO^2 = R^2 - r^2$.

Из ΔXOQ:

$$t^2 = XQ^2 + QO^2 = r^2 - h^2 + R^2 - r^2 = R^2 - h^2.$$

Но поскольку $HX^2 = AX \cdot XB$, то $AX \cdot XB = R^2 - t^2$. Аналогично, $CX \cdot XD = h^2 = R^2 - t^2$, что доказывает утверждение теоремы.

Третий способ

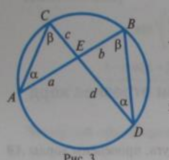

Рис. 3

Пусть $AE = a$; $BE = b$; $CE = c$; $ED = d$; $\angle CAB = \alpha$; $\angle ACD = \beta$. По теореме синусов

$$\frac{a}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\alpha}; \frac{b}{\sin\alpha} = \frac{d}{\sin\beta},$$

значит,

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c}{a} = \frac{b}{d},$$

откуда $ab = cd$.

Четвертый способ доказательства предлагается найти самостоятельно.

31. Две касательные

Одна из самых, самых... простых и необходимых теорем планиметрии. Касательные SK_1 и SK_2 равны (рис. 1).

Первый способ

Первый способ очевиден: прямоугольные треугольники SOK_1 и SOK_2 равны.

Второй способ

Обозначим $\angle OK_1K_2 = \angle OK_2K_1 = \alpha$ (рис. 1). Тогда

$$\angle K_2K_1S = \angle K_1K_2S = 90°-\alpha$$

и $SK_1 = SK_2$.

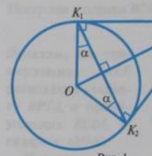

Рис. 1

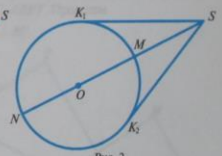

Рис. 2

Третий способ

Через центр окружности O проведем секущую SN (рис. 2). Тогда

$$SN \cdot SM = SK_1^2 \text{ и } SN \cdot SM = SK_2^2,$$

следовательно, $SK_1 = SK_2$.

Четвертый способ

$$\angle SK_1K_2 = \angle SK_2K_1 = \frac{1}{2} \cup K_1K_2,$$

как угол между касательной и хордой. Тогда $SK_1 = SK_2$.

Пятый способ

Из точки S (рис. 3) как из центра сделаем засечку радиусом, равным касательной SK_1. Получим точку K_2, а треугольник SOK_2 будет равен треугольнику SOK_1, следовательно, $\angle OK_2S$ — прямой и SK_2 — касательная, равная касательной SK_1.

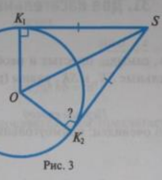

Рис. 3

32. Популярные доказательства теоремы Пифагора

Теорема: квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов его катетов (теорема Пифагора).

Первый способ
(доказательство Евклида)

Первоначальная формулировка теоремы Пифагора:

Сумма площадей квадратов, построенных на катетах прямоугольного треугольника, равна площади квадрата, построенного на гипотенузе этого треугольника.

Пусть ABC — прямоугольный треугольник ($\angle BAC = 90°$) (рис. 1). Построим квадраты $BCDE$, $AMNC$, $ABPT$. Проведем

$$AL \perp BC.$$

Докажем, что прямоугольник $BKLE$ равновелик квадрату $BPTA$, а прямоугольник $KCDL$ — квадрату $AMNC$.

Проведем отрезки PC и AE. Площадь треугольника PCB равна половине площади квадрата $BPTA$ (докажите!).

Площадь треугольника ABE равна половине площади прямоугольника $BKLE$ (докажите!).

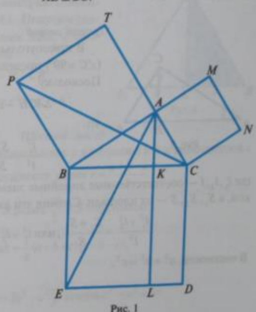

Рис. 1

Треугольники ABE и PBC равны (докажите!).

Отсюда следует, что прямоугольник $BKLE$ равновелик квадрату $BPTA$. Соединив N с B и A с D, аналогично докажем, что прямоугольник $KCDL$ равновелик квадрату $AMNC$. Отсюда следует, что квадрат $BCDE$ равновелик сумме площадей квадратов $PTAB$ и $AMNC$.

Второй способ
(способ индийского математика Бхаскары (1114—1165) в книге «Венец системы» (ок. 1150))

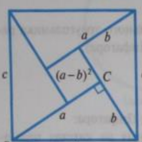

Рис. 2

Доказательство теоремы Пифагора дает в виде чертежа с надписью «Смотри!» (рис. 2).

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90°$). Площадь квадрата, построенного на гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC равна сумме площадей четырех прямоугольных треугольников и квадрата, длина стороны которого равна $a-b$. Тогда

$$c^2 = 4\cdot\frac{ab}{2} + (a-b)^2 = 2ab + a^2 - 2ab + b^2 = a^2 + b^2.$$

Значит, $c^2 = a^2 + b^2$.

Третий способ

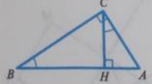

Рис. 3

В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) проведем высоту CH (рис. 3). Поскольку

$$\Delta ACH \sim \Delta BCH \sim \Delta ABC,$$

то

$$\frac{l_1^2}{l^2} = \frac{S_1}{S},\ \frac{l_2^2}{l^2} = \frac{S_2}{S},$$

где l_1, l_2, l — соответственные линейные элементы этих треугольников, а S_1, S_2, S — их площади. Сложив эти два равенства, получим

$$\frac{l_1^2 + l_2^2}{l^2} = \frac{S_1 + S_2}{S},\ \text{или}\ l_1^2 + l_2^2 = l^2.$$

В частности, $a^2 + b^2 = c^2$.

Четвертый способ

В окружности с центром C проведем касательную AB и секущую AE, которой принадлежит центр O (рис. 4). По теореме о секущей и касательной

$$AB^2 = AD\cdot AE. \qquad (1)$$

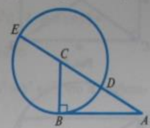

Рис. 4

Поскольку

$$AC = CD + AD,$$
$$AE = AC + CE = AC + CB,$$
$$\text{то}\ AD = AC - CD = AC - CB.$$

Подставим эти выражения в (1):

$$AB^2 = (AC - CB)(AC + CB),$$
$$\text{или}\ AB^2 = AC^2 - CB^2,\ AB^2 + CB^2 = AC^2,$$

что и требовалось доказать.

Пятый способ

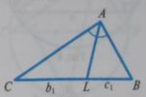

Рис. 5

Воспользуемся формулой биссектрисы (рис. 5)

$$l_a^2 = bc - b_1c_1.$$

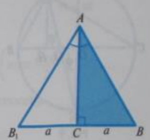

Рис. 6

Имеем треугольник ABC ($\angle C = 90°$). Произведем осевую симметрию относительно катета AC (рис. 6). Получим равнобедренный треугольник ABB_1 с биссектрисой $AC = a$. Имеем

$$AC^2 = AB\cdot AB_1 - BC\cdot CB_1,$$

или $b^2 = c\cdot c - a\cdot a$, откуда $c^2 = a^2 + b^2$.

Шестой способ

В прямоугольном треугольнике с катетами a и b и гипотенузой c радиус r вписанной окружности равен $r = \frac{a+b-c}{2}$.

Поскольку площадь S равна $\frac{ab}{2}$ и $S = rp$, имеем

$$\frac{1}{2}ab = \frac{1}{4}(a+b+c)(a+b-c),$$

или

$$ab = \frac{1}{2}\left((a+b)^2 - c^2\right),\ \text{откуда}\ c^2 = a^2 + b^2.$$

Седьмой способ

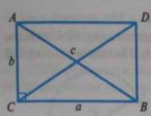

Рис. 7

Дополним прямоугольный треугольник до прямоугольника и воспользуемся теоремой о сумме квадратов диагоналей (рис. 7).

$$2\left(a^2 + b^2\right) = 2c^2,\ \text{или}\ a^2 + b^2 = c^2.$$

Восьмой способ

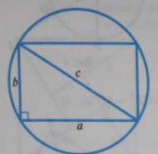

Рис. 8

Воспользуемся теоремой Птолемея (рис. 8):

$$a\cdot a + b\cdot b = c\cdot c,\ a^2 + b^2 = c^2.$$

Девятый способ

Воспользуемся формулой медианы

$$4m_c^2 = 2\left(a^2 + b^2\right) - c^2.$$

Поскольку $m_c = \frac{c}{2}$, то

$$2c^2 = 2\left(a^2 + b^2\right),\ \text{или}\ a^2 + b^2 = c^2.$$

Десятый способ

Рис. 9

Пусть в треугольнике ABC $\angle A = 90°$. Обозначим φ — угол между биссектрисой l_a и высотой AH_1 (рис. 9). Применим авторскую формулу

$$S = \frac{1}{2}AW_1\cdot MN. \qquad (1)$$

Для прямоугольного треугольника ($\angle A = 90°$)

$$l_a = \frac{2bc}{b+c}\cos 45° = \frac{bc}{b+c}\cdot\sqrt{2}.$$

Пусть для определенности $\angle B > \angle C$. Тогда $\varphi = \frac{B-C}{2}$, а

$$AW_1 = 2R\cos\varphi = a\cos\frac{B-C}{2}\ (\text{из}\ \Delta W_1AD).$$

Учитывая формулу (1), имеем:

$$\frac{bc}{2} = \frac{1}{2}a\cos\varphi\frac{bc}{b+c}\cdot\sqrt{2},\ \text{или}\ \left(\frac{b+c}{\sqrt{2}}\right)^2 = \left(a\cos\frac{B-C}{2}\right)^2.$$

Преобразуем это выражение:

$$(b+c)^2 = 2a^2\cos^2\frac{B-C}{2} = a^2(1 + \cos(B-C)) =$$
$$= a^2(1 + \cos B\cos C + \sin B\sin C) = a^2(1 + 2\sin B\sin C) =$$
$$= a^2\left(1 + 2\cdot\frac{b}{a}\cdot\frac{c}{a}\right) = a^2 + 2bc.$$

Значит, $b^2 + c^2 + 2bc = a^2 + 2bc$, а отсюда $a^2 = b^2 + c^2$, что и требовалось доказать.

Одиннадцатый способ

Применим формулу Архимеда:

$$AK = \frac{b+c}{2}$$

Рис. 10

(K — проекция точки B на сторону AC) (рис. 10). Доказательство сводится к предыдущему способу: ΔAW_1K — прямоугольный, равнобедренный.

$$AW_1 = a\cos\frac{B-C}{2}.$$

Поскольку

$$AK = KW_1 = \frac{b+c}{2},\ \text{то}\ \left(\frac{b+c}{\sqrt{2}}\right)^2 = \left(a\cos\frac{B-C}{2}\right)^2.$$

Дальнейшее тождественно предыдущему способу.

Двенадцатый способ

На сторонах прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$) построим векторы $\overline{CB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$. Тогда $\overline{AB} = \overline{CB} + \overline{AC}$. Возведем это равенство в квадрат:

$$\overline{AB}^2 = (\overline{CB} + \overline{AC})^2.$$

Имеем

$$\overline{AB}^2 = \overline{CB}^2 + 2\overline{CB}\cdot\overline{AC} + \overline{AC}^2.$$

Поскольку $\overline{CB} \perp \overline{AC}$, то $\overline{CB}\cdot\overline{AC} = 0$, откуда $BC^2 + AC^2 = AB^2$, что и требовалось доказать.

Предлагается самостоятельно доказать тринадцатым способом.

33. Теорема Пифагора. Обратная

Теорема, обратная теореме Пифагора: Если квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон, то треугольник прямоугольный.

Конечно, эта теорема не столь популярна, как прямая. Но однообразность ее доказательств (от обратного!) во всех учебниках нецелесообразна. Рассмотрим несколько способов ее доказательства.

Первый способ

Пусть в треугольнике ABC

$$c^2 = a^2 + b^2. \tag{1}$$

Докажем, что $\angle C = 90^\circ$. Рассмотрим прямоугольный треугольник $A_1B_1C_1$ ($\angle C_1 = 90^\circ$), у которого: $a_1 = a$, $b_1 = b$, где a и b — стороны треугольника ABC. По теореме Пифагора:

$$a^2 + b^2 = c_1^2. \tag{2}$$

Сравним выражения (1) и (2): $c = c_1$, следовательно,

$$\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$$

по трем сторонам. Потому $C = C_1$, значит, треугольник ABC — прямоугольный, что и требовалось доказать.

Второй способ

Применим теорему косинусов. В треугольнике ABC:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

Поскольку по условию $a^2 + b^2 = c^2$, то

$$2ab\cos C = 0,$$

откуда $\cos C = 0$; $\angle C = 90^\circ$.

Третий способ

Этот способ связан с теоремой о медиане: если

$$m_c = \frac{1}{2}c, \text{ то } \angle C = 90^\circ \text{ (см. раздел 15).}$$

Воспользуемся формулой медианы:

$$m_c^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}.$$

Учитывая условие, имеем

$$m_c^2 = \frac{2c^2 - c^2}{4} = \frac{c^2}{4},$$

значит, $m_c = \frac{c}{2}$, откуда $\angle C = 90^\circ$.

Четвертый способ

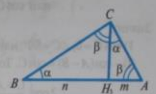

Рис. 1

Пусть в треугольнике ABC проведена высота $h_c = CH_3$ (рис. 1). Обозначим отрезки $AH_3 = m$; $BH_3 = n$. Докажем, что если $h = \sqrt{mn}$, то $\angle C = 90^\circ$. Действительно, поскольку $h^2 = mn$, то

$$\frac{h}{m} = \frac{n}{h},$$

а это значит, что прямоугольные треугольники CH_3A и CH_3B подобны, поэтому

$$\angle ACH_3 = \angle CBH_3 = \alpha, \angle BCH_3 = \angle CAH_3 = \beta,$$

значит, $2(\alpha + \beta) = 180^\circ$, или $\alpha + \beta = 90^\circ$.

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы.

Имеем ($AH_3 = m$; $BH_3 = n$) по условию $c^2 = a^2 + b^2$, или

$$(m+n)^2 = h_c^2 + n^2 + h_c^2 + m^2,$$

$$\text{или } m^2 + n^2 + 2mn = n^2 + m^2 + 2h_c^2,$$

значит, $mn = h_c^2$, а это значит, что треугольник ABC — прямоугольный.

Пятый способ

Пусть S — площадь треугольника ABC Очевидно, что если

$$S = \frac{1}{2}ab, \text{ то } \angle C = 90^\circ.$$

По формуле Герона

$$S^2 = \frac{1}{16}\left(4a^2b^2 - \left(a^2 + b^2 - c^2\right)^2\right) = \frac{4a^2b^2}{16} = \frac{a^2b^2}{4},$$

т. е. $S = \frac{ab}{2}$, значит, $\angle C = 90^\circ$.

Шестой способ

Имеем: $c^2 = a^2 + b^2$, или

$$4R^2\sin^2 C = 4R^2\sin^2 A + 4R^2\sin^2 B$$

(R — радиус описанной окружности). Значит,

$$1 - \cos 2C = 1 - \cos 2A + 1 - \cos 2B,$$

$$\cos 2A + \cos 2B = 1 + \cos 2C,$$

$$2\cos(A+B)\cos(A-B) = 2\cos^2 C$$

$$\text{или } \cos C\left(\cos C + \cos(A-B)\right) = 0.$$

Значит,

1) $\cos C = 0$, $\angle C = 90^\circ$ или
2) $-\cos(A-B) = \cos C$. Тогда

$$2\cos\left(\frac{C+A-B}{2}\right)\cos\left(\frac{C-A+B}{2}\right) = 0,$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos\left(\dfrac{A+C-B}{2}\right) = 0,\\ \cos\left(\dfrac{C+B-A}{2}\right) = 0,\end{array}\right.$$

значит,

$$\left[\begin{array}{l}\cos\left(\dfrac{180^\circ - 2B}{2}\right) = 0,\\ \cos\left(\dfrac{180^\circ - 2A}{2}\right) = 0,\end{array}\right.$$

значит, $\sin B = 0$ или $\sin A = 0$, что невозможно. Значит, $\angle C = 90^\circ$.

Седьмой способ

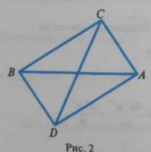

Рис. 2

Достроим треугольник ABC до параллелограмма $ADBC$ (рис. 2). Тогда

$$AB^2 + CD^2 = 2\left(AC^2 + BC^2\right),$$

$$\text{т. е. } c^2 + CD^2 = 2\left(a^2 + b^2\right).$$

Так как по условию $a^2 + b^2 = c^2$, то

$$CD^2 = c^2,$$

т. е. $ADBC$ — параллелограмм с равными диагоналями, значит, $ADBC$ — прямоугольник и $\angle C = 90^\circ$.

Восьмой способ

Применим теорему Лейбница. Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC. По теореме Лейбница для любой точки X имеем

$$XA^2 + XB^2 + XC^2 = AM^2 + BM^2 + CM^2 + 3XM^2.$$

Пусть X совпадает с вершиной C треугольника ABC. Имеем

$$CA^2 + CB^2 + 0 = AM^2 + BM^2 + 4CM^2,$$

$$\text{или } b^2 + a^2 = \left(\frac{2}{3}m_a\right)^2 + \left(\frac{2}{3}m_b\right)^2 + 4\left(\frac{2}{3}m_c\right)^2,$$

$$\text{или } c^2 = \frac{4}{9}\left(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2\right) + 3\cdot\frac{4}{9}m_c^2.$$

Учитывая, что

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}\left(a^2 + b^2 + c^2\right),$$

получим:

$$c^2 = \frac{1}{3}\left(a^2 + b^2 + c^2\right) + \frac{4}{3}m_c^2. \tag{1}$$

Поскольку $a^2 + b^2 = c^2$, то выражение (1) примет вид: $m_c^2 = \frac{1}{4}c^2$, откуда $m_c = \frac{1}{2}c$, значит, $\angle C = 90^\circ$.

Девятый способ

Формула биссектрисы l_c имеет вид:

$$l_c^2 = ab - b_1a_1 \ (b_1 = BL_1, c = AL_1).$$

Поскольку $b_1 = \frac{bc}{a+b}$, $c_1 = \frac{ac}{a+b}$, то

$$l_c^2 = ab - \frac{c^2ab}{(a+b)^2} = ab\left(\frac{(a+b)^2 - c^2}{(a+b)^2}\right) = \frac{ab\left(a^2 + b^2 + 2ab - c^2\right)}{(a+b)^2} = \frac{2a^2b^2}{(a+b)^2}$$

(воспользовавшись условием $c^2 = a^2 + b^2$). Итак,

$$l_c^2 = \frac{2a^2b^2}{(a+b)^2}. \tag{1}$$

Известна следующая формула биссектрисы:

$$l_c = \frac{2ab}{a+b}\cos\frac{C}{2}. \tag{2}$$

Сравнив выражения (1) и (2), получим

$$\cos\frac{C}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Значит, $\frac{C}{2}=45°$, значит, $\angle C=90°$.

Десятый способ

Пусть в треугольнике ABC

$$c^2=a^2+b^2.$$

Опишем вокруг треугольника ABC окружность и проведем диаметр CD (рис. 3). По теореме Птолемея

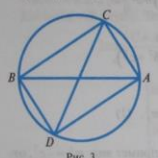

Рис. 3

$$AC\cdot BD+AD\cdot BC=AB\cdot CD,$$

$$\text{или } b\cdot BD+a\cdot AD=c\cdot 2R \qquad (1)$$

(R — радиус описанной окружности).

Поскольку ΔCAD — прямоугольный, то по теореме Пифагора

$$AD=\sqrt{4R^2-b^2}, \qquad (2)$$

$$BD=\sqrt{4R^2-a^2}. \qquad (3)$$

Подставим выражения (2) и (3) в (1). Получим

$$b\cdot\sqrt{4R^2-a^2}+a\sqrt{4R^2-b^2}=c\cdot 2R.$$

Возведем в квадрат:

$$b^2\left(4R^2-a^2\right)+a^2\left(4R^2-b^2\right)+2ab\sqrt{4R^2-a^2}\cdot\sqrt{4R^2-b^2}=c^2\cdot 4R^2.$$

Значит,

$$2ab\sqrt{\left(4R^2-a^2\right)\left(4R^2-b^2\right)}=2a^2b^2+4R^2\left(c^2-a^2-b^2\right)$$

$$\text{или } 2ab\sqrt{\left(4R^2-a^2\right)\left(4R^2-b^2\right)}=2a^2b^2,$$

откуда

$$\left(4R^2-a^2\right)\left(4R^2-b^2\right)=a^2b^2,$$

$$\text{или } 16R^2-4R^2\left(a^2+b^2\right)+a^2b^2=a^2b^2,$$

следовательно,

$$4R^2=a^2+b^2, \text{ или } c=2R,$$

т. е. треугольник ABC — прямоугольный.

Одиннадцатый способ (провокационный)

Пусть H — ортоцентр треугольника ABC. Имеет место формула:

$$OH^2=9R^2-\left(a^2+b^2+c^2\right) \qquad (\bullet)$$

Поскольку

$$CH=2R\cos C \quad (1°)$$

$$\text{и } CH^2=4R^2-c^2,$$

$$\varphi=\angle OCH=|A-B|,$$

то из ΔOCH (рис. 4) по теореме косинусов

$$OH^2=OC^2+CH^2-2OC\cdot CH\cos\varphi. \quad (1)$$

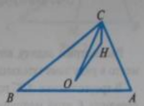

Рис. 4

Сравним левые части выражений ($\bullet$) и (1):

$$9R^2-\left(a^2+b^2+c^2\right)=OC^2+CH^2-2OC\cdot CH\cdot\cos\varphi.$$

Учитывая, что $OC=R$ и $a^2+b^2=c^2$, имеем

$$8R^2-2c^2=CH^2-2R\cdot CH\cos\varphi.$$

Поскольку $CH^2=4R^2-c^2$, последнее выражение примет вид:

$$2CH^2=CH^2-2R\cdot CH\cos\varphi, \qquad (\bullet\bullet)$$

$$\text{или } CH=-2R\cos\varphi.$$

Сравнив с выражением (1°), получим

$$-2R\cos\varphi=2R\cos C.$$

Тогда $-\cos C=\cos\varphi$, отсюда

$$\left[\begin{array}{l}\sin A=0,\\ \sin B=0,\end{array}\right.$$

значит, треугольника, у которого $c^2=a^2+b^2$ не существует?!

Предлагаем читателю найти ошибку.

Ответ: это не только ошибка, но и решение вопроса: при сокращении на CH в формуле ($\bullet\bullet$) обе части равенства делились на нуль: длина отрезка CH может равняться нулю, что возможно (!) ... в прямоугольном треугольнике — конца света не произошло.

Предлагаем читателям найти двенадцатый способ.

В написании главы принимал участие Д. Басов.

34. Двадцать два. Кто больше?

Рассмотрим задачу, которая по праву может занимать почетное место в ряду замечательных теорем треугольника.

В треугольнике ABC проведена медиана AM_1. Через вершину C и середину E этой медианы проведена прямая. В каком отношении она делит сторону AB?

Первый способ

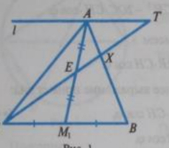

Рис. 1

Через вершину A проведем прямую l, параллельную стороне BC (рис. 1). Пусть прямая CE пересекает сторону AB в точке X, а прямую l — в точке T. Треугольники ATX и BCX подобны, поэтому:

$$\frac{AX}{XB}=\frac{AT}{BC}. \qquad (1)$$

Треугольники AET и M_1EC равны, откуда $AT=CM_1$, а следовательно, $\frac{AT}{BC}=\frac{1}{2}$. Учитывая равенство (1), имеем $\frac{AX}{XB}=\frac{1}{2}$.

Второй способ

Через точку M_1 проведем отрезок M_1D ($D\in AB$), параллельный отрезку CX (рис. 2). Поскольку

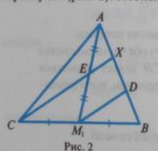

Рис. 2

$$BM_1=CM_1, \text{ то } BD=DX.$$

Поскольку

$$AE=EM_1, \text{ то } AX=XD.$$

Следовательно,

$$AX=XD=DB,$$

откуда $\frac{AX}{XB}=\frac{1}{2}$.

Третий способ

Пусть M_3 — середина стороны AB (рис. 3). Поскольку EM_3 — средняя линия в треугольнике AM_1B, то

$$EM_3=\frac{1}{4}BC.$$

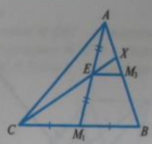

Рис. 3

Треугольники EXM_3 и CXB подобны, поэтому

$$\frac{XM_3}{XB}=\frac{EM_3}{BC}=\frac{1}{4},$$

следовательно, $XM_3=\frac{1}{4}XB$. Но ведь $AM_3=M_3B$, откуда

$$AX+XM_3=XB-XM_3, \text{ или } AX+\frac{1}{4}XB=XB-\frac{1}{4}XB, AX=\frac{1}{2}XB.$$

Четвертый способ

Пусть M_2 — середина стороны AC, F — точка пересечения отрезков M_1M_2 и CE (рис. 4). Имеем:

$$\frac{AX}{XB}=\frac{M_2F}{FM_1}=\frac{M_2E}{CM_1}=\frac{1}{2}.$$

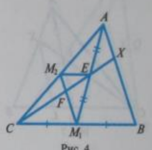

Рис. 4

Пятый способ

Докажем вначале соотношение

$$\frac{XE}{CE}=\frac{1}{3}. \qquad (\bullet)$$

Из треугольника CXB (рис. 5):

$$\frac{XC}{XE}=\frac{BC}{EM_3}=\frac{4EM_3}{EM_3}=4,$$

откуда

$$\frac{CE}{XE}=\frac{CX-XE}{XE}=\frac{CX}{XE}-1=3,$$

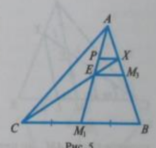

Рис. 5

что и требовалось доказать.

Проведем теперь отрезок $XP\,||\,BC$ ($P\in AM_1$). Тогда

$$\frac{AX}{AB}=\frac{XP}{M_1B}=\frac{XP}{M_1C}=\frac{EX}{CE}=\frac{1}{3}, \text{ следовательно, } \frac{AX}{XB}=\frac{1}{2}.$$

Шестой способ

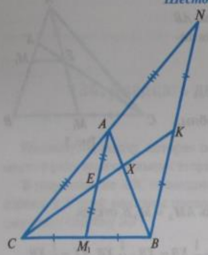

Рис. 6

Проведем через точку B прямую, параллельную отрезку AM_1. Пусть N — точка пересечения ее с прямой CA (рис. 6). Поскольку

$$CM_1 = M_1B, \text{ то } CA = AN.$$

Пусть K — точка пересечения прямых CX и NB. Поскольку

$$AE = EM_1, \text{ то } NK = KB.$$

Следовательно, CK и BA — медианы треугольника BNC. Как известно, они пересекаются в отношении 2 :1, откуда $\frac{AX}{XB} = \frac{1}{2}$.

Седьмой способ

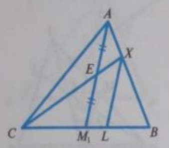

Рис. 7

Проведем отрезок $XL \parallel AM_1$ $(L \in BC)$ (рис. 7). Тогда

$$\frac{AB}{BX} = \frac{AM_1}{XL} = \frac{2EM_1}{XL} = 2\frac{CE}{CX}.$$

Используя равенство (*), имеем

$$\frac{CX}{CE} = \frac{CE + EX}{CE} = 1 + \frac{EX}{CE} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3},$$

следовательно,

$$\frac{AX + BX}{BX} = 2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{2}, \text{ откуда } \frac{AX}{BX} = \frac{1}{2}.$$

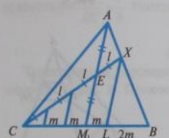

Рис. 8

Восьмой способ

Пусть $EX = l$. Тогда из равенства (*) следует, что $CE = 3l$. Разделим отрезок CE на три равные части (рис. 8) и проведем через точки деления прямые, параллельные AM_1, до пересечения со стороной BC. Они разделят отрезок CM_1 на три равные части, длины которых обозначим m. Проведем еще отрезок $XL \parallel AM_1$. Тогда $M_1L = m$, а поскольку $3m = CM_1 = M_1B$, то $BL = 2m$. Следовательно,

$$\frac{AX}{XB} = \frac{M_1L}{LB} = \frac{1}{2}.$$

Девятый способ

Удвоим отрезок CE (рис. 9). Четырехугольник M_1CAT — параллелограмм: $CE = ET$, $AE = EM_1$. Далее, четырехугольник M_1ATB — также параллелограмм: $AT = CM_1 = M_1B$, $AT \parallel M_1B$. Пусть F — точка пересечения диагоналей параллелограмма M_1ATB. Тогда отрезки TE и AF — медианы в треугольнике TM_1A, следовательно, $AX = \frac{2}{3}AF$. С другой стороны,

$$AF = FB = \frac{1}{2}AB.$$

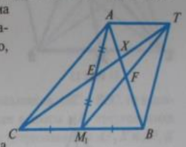

Рис. 9

Поэтому $AX = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}AB = \frac{1}{3}AB$, откуда $BX = \frac{2}{3}AB$, а следовательно, $\frac{AX}{BX} = \frac{1}{2}$.

Десятый способ

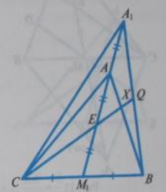

Рис. 10

Пусть A_1 — точка на прямой M_1A и $A_1A = AE = EM_1$ (рис. 10). Соединим точки A_1 и B и продлим отрезок CX до пересечения с A_1B в некоторой точке Q. Поскольку, по построению, $\frac{EM_1}{A_1E} = \frac{1}{2}$ и A_1M_1 — медиана треугольника A_1BC, то точка E — центроид этого треугольника, следовательно, CQ — также его медиана. Отсюда EQ — медиана треугольника EA_1B, а тогда X — центроид этого треугольника. Следовательно, $\frac{AX}{XB} = \frac{1}{2}$.

Одиннадцатый способ

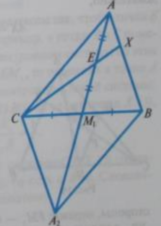

Рис. 11

Удвоим медиану AM_1: $AM_1 = M_1A_2$ (рис. 11), получим параллелограмм ABA_2C. Треугольники EA_2C и EAX подобны, откуда

$$\frac{AX}{AB} = \frac{AX}{A_2C} = \frac{AE}{EA_2} = \frac{1}{3},$$

и следовательно, $\frac{AX}{XB} = \frac{1}{2}$.

Двенадцатый способ

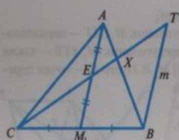

Рис. 12

Через точку B проведем прямую m, параллельную AM_1 (рис. 12) и продлим прямую CX до пересечения с m в точке T. Поскольку EM_1 — средняя линия в треугольнике CTB, то $TB = 2EM_1$. Треугольники AEX и BTX подобны, следовательно,

$$\frac{AX}{BX} = \frac{EA}{TB} = \frac{EM_1}{TB} = \frac{1}{2}.$$

Тринадцатый способ

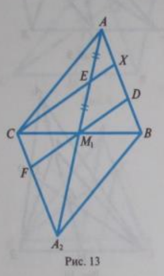

Рис. 13

Удвоим медиану AM_1 (рис. 13):

$$AM_1 = M_1A_2,$$

получим параллелограмм ABA_2C. Через точку M_1 проведем прямую, параллельную CX. Пусть она пересечет отрезки CA_2 и AB в точках F и D, соответственно. Поскольку EX — средняя линия в треугольнике AM_1D, а четырехугольник $CXDF$ — параллелограмм, то

$$AX = XD = CF.$$

Но ведь треугольники CM_1F и BM_1D равны, откуда $CF = BD$. Следовательно,

$$AX = XD = DB, \ \frac{AX}{XB} = \frac{1}{2}.$$

Четырнадцатый способ

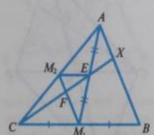

Рис. 14

Пусть точка M_2 — середина стороны AC треугольника ABC (рис. 14), F — точка пересечения отрезков M_1M_2 и CX. Поскольку

$$M_1M_2 \parallel AB \text{ и } AE = EM_1,$$

то треугольники AXE и M_1FE равны, а поэтому $FM_1 = AX$. С другой стороны, отрезок FM_1 — средняя линия треугольника BCX, откуда $XB = 2FM_1$. Следовательно, $XB = 2AX$.

Пятнадцатый способ

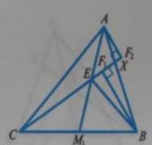

Рис. 15

Сравним площади треугольников AEC и BEC (рис. 15). Поскольку CE — медиана треугольника ACM_1, а EM_1 — медиана треугольника BEC, то

$$S_{AEC} = S_{CEM_1} = S_{EBM_1}.$$

Следовательно,

$$S_{BEC} = 2S_{AEC}.$$

Поскольку CE — общая сторона треугольников AEC и BEC, то высота BF_1 треугольника BEC вдвое больше высоты AF_2 треугольника AEC. Тогда из подобия прямоугольных треугольников AF_2X и BF_1X следует, что $\frac{AX}{XB} = \frac{1}{2}$.

Шестнадцатый способ

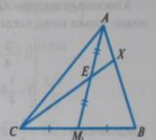

Рис. 16

Применим теорему Менелая к треугольнику AM_1B и секущей CEX (рис. 16):

$$\frac{AE}{EM_1} \cdot \frac{M_1C}{CB} \cdot \frac{BX}{XA} = 1.$$

Поскольку

$$\frac{AE}{EM_1} = 1, \frac{M_1C}{CB} = \frac{1}{2}, \text{ то } \frac{BX}{XA} = 2, \frac{AX}{XB} = \frac{1}{2}.$$

Семнадцатый способ

Поместим в вершины A, B, C некоторые массы так, чтобы точка E стала центроидом системы (рис. 16). Например, в точки B и C поместим единичные массы: $B(1), C(1)$. Тогда центроидом системы из этих двух точек будет $M_1(2)$. Поскольку $AE = EM_1$, то поместив в точке A массу 2, мы получим, что $E(4)$ является центроидом такой системы: $A(2)\,B(1)\,C(1)$. Заменим теперь систему $A(2)\,B(1)$ на ее центроид $X_1(3)$, который лежит на стороне AB, причем $\frac{AX_1}{X_1B} = \frac{1}{2}$.

Учитывая, что $CE : EX = 3:1$, центроид системы $C(1)\,X_1(3)$ совпадает с центроидом системы $A(2)\,B(1)\,C(1)$, то есть с $E(4)$. Следовательно, точка E лежит на отрезке CX_1, а поэтому

$$X \equiv X_1 \text{ и } \frac{AX}{XB} = \frac{1}{2}.$$

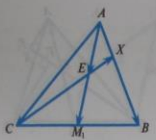

Рис. 17

Восемнадцатый способ

Пусть α, β $(0<\alpha<1, \beta>1)$ — некоторые числа, такие что

$$\overline{AX}=\alpha\,\overline{AB}, \overline{CX}=\beta\overline{CE} \text{ (рис. 17).}$$

Тогда $\alpha\,\overline{AB}=\overline{AC}+\beta\overline{CE}$. Но

$$\overline{CE}=\overline{AE}-\overline{AC}=\frac{1}{2}\overline{AM_1}-\overline{AC}=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\overline{AC}+\overline{AB}\right)-\overline{AC}=\frac{1}{4}\overline{AB}-\frac{3}{4}\overline{AC}.$$

Отсюда, $\alpha\,\overline{AB}=\overline{AC}+\beta\left(\frac{1}{4}\overline{AB}-\frac{3}{4}\overline{AC}\right), \left(\alpha-\frac{\beta}{4}\right)\overline{AB}=\left(1-\frac{3}{4}\beta\right)\overline{AC}.$

А поскольку векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ не коллинеарны, то равенство возможно только тогда, когда

$$\begin{cases}\alpha-\frac{\beta}{4}=0\\ 1-\frac{3}{4}\beta=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\frac{\beta}{4}\\ \beta=\frac{4}{3}\end{cases}\Rightarrow\alpha=\frac{1}{3}.$$

Следовательно, $\overline{AX}=\frac{1}{3}\overline{AB}$, откуда $\frac{AX}{XB}=\frac{1}{2}$.

Девятнадцатый способ

Положим $AX=x$, $BX=y$ (рис. 17). Тогда

$$\overline{CX}=\frac{y}{x+y}\overline{CA}+\frac{x}{x+y}\overline{CB} \qquad (1)$$

(векторная формула деления отрезка в данном отношении). Пусть (см. восемнадцатый способ) $\overline{CX}=\beta\overline{CE}$ $(\beta>1)$. Тогда $\overline{CE}=\frac{1}{2}(\overline{CA}+\overline{CM_1})$, $\overline{CX}=\frac{\beta}{2}(\overline{CA}+\overline{CM_1})$, следовательно,

$$\overline{CX}=\frac{\beta}{2}\overline{CA}+\frac{\beta}{4}\overline{CB}. \qquad (2)$$

Сравнивая формулы (1) и (2), получим:

$$\begin{cases}\frac{y}{x+y}=\frac{\beta}{2},\\ \frac{x}{x+y}=\frac{\beta}{4},\end{cases} \text{откуда } \frac{x}{y}=\frac{1}{2}.$$

Двадцатый способ

Спроектируем данный треугольник в равносторонний (рис. 18). Тогда медиана AM_1 в нем будет и высотой. Положим $AX=x$, $BX=y$. Пусть сторона этого равностороннего треугольника равна a, а $\angle XCM_1=\alpha$. Из прямоугольного треугольника EM_1C получим:

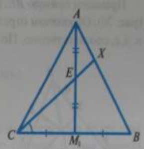

Рис. 18

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{EM_1}{CM_1}=\frac{a\sqrt{3}}{4}:\frac{a}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Из треугольника CXB:

$$\frac{XB}{\sin\angle XCB}=\frac{BC}{\sin\angle BXC}, \text{ или } \frac{y}{\sin\alpha}=\frac{a}{\sin(120^\circ-\alpha)}.$$

Поскольку $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$, то $\sin\alpha=\sqrt{\frac{3}{7}}, \cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{7}}$, откуда

$$\sin(120^\circ-\alpha)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha+\frac{1}{2}\sin\alpha=\frac{1}{2}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}}.$$

Тогда:

$$y=\frac{a\sin\alpha}{\sin(120^\circ-\alpha)}=\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}:\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}=\frac{2a}{3}, x=a-y=\frac{a}{3}, \frac{x}{y}=\frac{1}{2}.$$

Двадцать первый способ

Используем формулу радиус-вектора для произвольной точки Y плоскости:

$$\overline{YE}=\frac{p\overline{YC}+q\overline{YA}+\overline{YB}}{p+q+1},$$

где (рис. 19)

$$p=BM_1:M_1C=1,\ q=BX:XA.$$

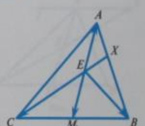

Рис. 19

Пусть $Y\equiv E$, тогда

$$\overline{0}=\frac{\overline{EC}+q\overline{EA}+\overline{EB}}{q+2},$$

откуда $\overline{0}=\overline{EC}+q\overline{EA}+\overline{EB}$. Но $\overline{EC}+\overline{EB}=2\overline{EM_1}$, следовательно,

$$\overline{0}=q\overline{EA}+2\overline{EM_1}=q\overline{EA}-2\overline{M_1E}=(q-2)\overline{EA}, \text{ а отсюда: } q=2, \frac{XA}{XB}=\frac{1}{2}.$$

Двадцать второй способ

Проведем прямую BE. Пусть она пересечет сторону AC в точке Y (рис. 20). Обозначим отрезки $AX, XB, BM_1, M_1C, CY, YA$ через x, y, m, n, p, q, соответственно. По теореме Чевы:

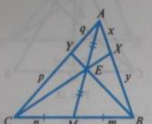

Рис. 20

$$\frac{xmp}{ynq}=1.$$

Поскольку $m=n$, то

$$\frac{x}{y}=\frac{q}{p}. \qquad (1)$$

По теореме Ван-Обеля:

$$\frac{x}{y}+\frac{q}{p}=\frac{AE}{EM_1}, \text{ то есть } \frac{x}{y}+\frac{q}{p}=1.$$

Учитывая (1), имеем:

$$\frac{x}{y}+\frac{x}{y}=1, \frac{x}{y}=\frac{1}{2}.$$

35. Три медианы

Теоремой о точке пересечения медиан интересуются более двух тысяч лет. Она всегда входила и входит (иногда в виде задачи) в школьные учебники, так что популярность ее огромна. В предыдущем сюжете я предложил двадцать два способа решения задачи:

В треугольнике ABC проведена медиана AM_1. Через вершину C и середину E этой медианы проведена прямая. В каком отношении она делит сторону AB?

И вдруг... Ах, эта аналогия! Вспомнилось: «Математик — это тот...», и мелькнула мысль: «Не подойдут ли эти двадцать два способа для доказательства теоремы о медиане»? Вот что из этого получилось: способ из книги «Повернення втраченої геометрії» — мы будем обозначать А, способ доказательства теоремы о медиане — М.

В каждом из способов будем доказывать, что две медианы, пересекаясь, делятся в отношении 2:1, считая от вершины, что равносильно доказательству единственности точки пересечения трех медиан. Доказав это, докажем и саму теорему.

Первый способ А

Через вершину A проведем прямую l, параллельную стороне BC (рис. 1). Пусть прямая CE пересекает сторону AB в точке X, а прямую l — в точке T. Треугольники ATX и BCX подобны, поэтому:

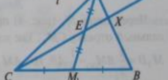

Рис. 1

$$\frac{AX}{XB}=\frac{AT}{BC}. \qquad (1)$$

Треугольники AET и M_1EC равны; отсюда

$$AT=CM_1, \text{ значит, } \frac{AT}{BC}=\frac{1}{2}.$$

Учитывая равенство (1), имеем $\frac{AX}{XB}=\frac{1}{2}$.

Первый способ М

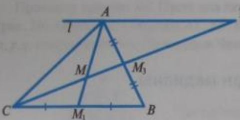

Рис. 2

Через вершину A (рис. 2) проведем прямую l, параллельную стороне BC. Пусть прямая CM_3 пересекает прямую l в точке T. Поскольку

$$\angle AM_3T = \angle BM_3C,$$
$$\angle ATM_3 = \angle BCM_3,$$

а $AM_3 = M_3B$, то $AT = BC = 2CM_1$. Треугольник ATM подобен треугольнику M_1CM, откуда $\frac{AM}{MM_1} = \frac{AT}{CM_1} = \frac{2}{1}$.

Второй способ А

Через точку M_1 проведем отрезок M_1D ($D \in AB$), параллельный отрезку CX (рис. 3). Поскольку $BM_1 = CM_1$, то $BD = DX$. Поскольку $AE = EM_1$, то $AX = XD$. Значит, $AX = XD = DB$, откуда $AX : XB = 1:2$.

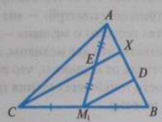

Рис. 3

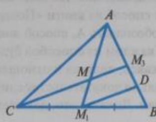

Рис. 4

Второй способ М

Через точку M_1 (рис. 4) проведем отрезок M_1D ($D \in AB$), параллельный отрезку CM_3. Так как $BM_1 = CM_1$, то $BD = DM_3$, а значит, $M_3D = \frac{1}{2}BM_3 = \frac{1}{4}AB$. Но $AM_3 = \frac{1}{2}AB$, отсюда $AM_3 : M_3D = 2:1$, следовательно, по теореме Фалеса: $AM : MM_1 = 2:1$.

Третий способ А

Пусть M_3 — середина стороны AB (рис. 5). Поскольку EM_3 — средняя линия в треугольнике AM_1B, то $EM_3 = \frac{1}{4}BC$. Треугольники EXM_3 и CXB подобны, поэтому

$$\frac{XM_3}{XB} = \frac{EM_3}{BC} = \frac{1}{4},$$

т. е. $XM_3 = \frac{1}{4}XB$. Но $AM_3 = M_3B$, откуда

$$AX + XM_3 = XB - XM_3,$$

или

$$AX + \frac{1}{4}XB = XB - \frac{1}{4}XB, AX = \frac{1}{2}XB.$$

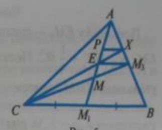

Рис. 5

Третий способ М

Проведем прямую M_3E параллельно BC (рис. 5). Тогда в треугольнике AM_1B EM_3 — средняя линия и $EM_3 = \frac{1}{2}M_1B = \frac{1}{4}BC$. Треугольники EMM_3 и M_1MC подобны, значит,

$$\frac{EM}{MM_1} = \frac{EM_3}{CM_1} = \frac{\frac{1}{4}BC}{\frac{1}{2}BC} = \frac{1}{2}.$$

Тогда $MM_1 = \frac{2}{3}EM_1$. Поскольку EM_3 — средняя линия треугольника ABM_1, имеем

$$\frac{2}{3}EM_1 = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}AM_1 = \frac{1}{3}AM_1,$$

тогда $AM = \frac{2}{3}AM_1$, или $AM : MM_1 = 2:1$.

Четвертый способ А

Докажем вначале соотношение (рис. 6): $\frac{XE}{CE} = \frac{1}{3}$. Из треугольника CXB:

$$\frac{XC}{XE} = \frac{BC}{EM_3} = \frac{4EM_3}{EM_3} = 4, \text{ откуда } \frac{CE}{XE} = \frac{CX - XE}{XE} = \frac{CX}{XE} - 1 = 3,$$

что и требовалось доказать.

Проведем теперь отрезок

$$XP \parallel BC\ (P \in AM_1).$$

Тогда

$$\frac{AX}{AB} = \frac{XP}{M_1B} = \frac{XP}{M_1C} = \frac{EX}{CE} = \frac{1}{3},$$

значит, $AX : XB = 1:2$.

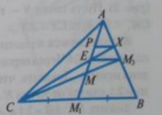

Рис. 6

Четвертый способ М

Поскольку EM_3 — средняя линия треугольника ABM_1 (рис. 6), то $EM_3 = \frac{1}{2}BM_1 = \frac{1}{4}BC$. Поскольку треугольник M_1MC подобен треугольнику EMM_3, имеем

$$\frac{CM}{MM_3} = \frac{CM_1}{EM_3} = \frac{\frac{1}{2}BC}{\frac{1}{4}BC} = \frac{2}{1}.$$

Пятый способ А

Проведем через точку B прямую, параллельную отрезку AM_1 (рис. 7). Пусть N — точка пересечения ее с прямой CA. Поскольку $CM_1 = M_1B$, то $CA = AN$. Пусть точка K — точка пересечения прямой CX с NB. Поскольку $AE = EM_1$, то $NK = KB$. Значит, CK и BA — медианы в треугольнике BNC. Как известно, они пересекаются в соотношении 2:1, откуда $AX : XB = 1:2$.

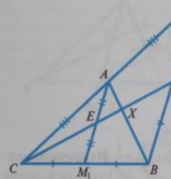

Рис. 7

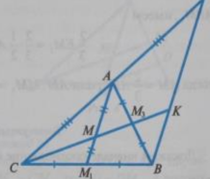

Рис. 8

Пятый способ М

Проведем через точку B прямую, параллельную отрезку AM_1 (рис. 8). Пусть точка N — точка пересечения ее с прямой AC. Так как $CM_1 = M_1B$, то $CA = AN$.

Воспользуемся известной задачей: в треугольнике NBC проведена медиана BA. Через вершину C и середину M_3 этой медианы проведена прямая. Доказать, что эта прямая делит сторону BN в отношении 2:1, считая от точки N.

Значит, $NK : KB = 2:1$ и $AM : MM_1 = 2:1$.

Шестой способ А

Пусть $EX = l$. Тогда, воспользовавшись равенством $\frac{XE}{CE} = \frac{1}{3}$, имеем, что $CE = 3l$. Разделим отрезок CE на три равные части (рис. 9) и проведем через точки деления прямые, которые параллельны AM_1. Они разделят отрезок CM_1 на три равные части, длины которых обозначим m. Проведем отрезок $XL \parallel AM_1$. Тогда $M_1L = m$, а поскольку $3m = CM_1 = M_1B$, то $BL = 2m$. Следовательно, $\frac{AX}{XB} = \frac{M_1L}{LB} = \frac{1}{2}$.

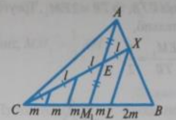

Рис. 9

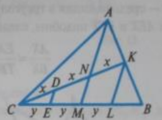

Рис. 10

Шестой способ М

Пусть AM_1 — медиана, точка K принадлежит AB, а N — точка пересечения отрезков СК и AM_1, причем $CN : NK = 2:1$ (рис. 10). Докажем, что CK — медиана. Пусть $NK = x$. Тогда $CN = 2x$. Проведем через середину CN прямую DE, параллельную AM_1, а через точку K прямую, параллельную AM_1 (прямую KL). Имеем

$$CD = DN = NK = x, \text{ отсюда } CE = EM_1 = M_1L = y.$$

Но $BM_1 = CM_1 = 2y$, следовательно, $LB = BM_1 - M_1L = 2y - y = y$. Значит, LK — средняя линия треугольника BM_1A, тогда K — середина AB, следовательно, CK — медиана.

Седьмой способ А

«Удвоим» медиану AM_1 ($AM_1 = M_1A_2$). Получим параллелограмм ABA_2C (рис. 11). Треугольники EA_2C и EAX — подобны, отсюда

$$\frac{AX}{AB} = \frac{AX}{A_2C} = \frac{AE}{EA_2} = \frac{1}{3},$$

значит, $\frac{AX}{XB} = \frac{1}{2}$.

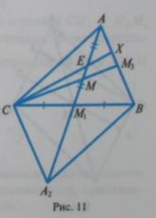

Рис. 11

Седьмой способ M

«Удвоим» медиану AM_1 (рис. 11) — получим параллелограмм ABA_2C. Треугольники MA_2C и MAM_3 подобны:

$$\frac{CM}{MM_3}=\frac{CA_2}{AM_3}=\frac{AB}{AM_3}=\frac{2}{1}.$$

Восьмой способ A

Через точку B проведем прямую m, параллельную AM_1 (рис. 12) и продолжим отрезок CX до его пересечения с m в точке T. Поскольку EM_1 — средняя линия в треугольнике CTB, то $TB=2EM_1$. Треугольники AEX и BTX подобны, следовательно,

$$\frac{AX}{BX}=\frac{EA}{TB}=\frac{EM_1}{TB}=\frac{1}{2}.$$

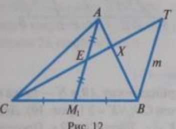

Рис. 12

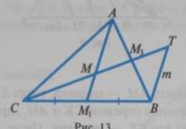

Рис. 13

Восьмой способ M

Через точку B проведем прямую m, параллельную AM_1 и продолжим отрезок CM_3 до пересечения с этой прямой в точке T (рис. 13). Так как MM_1 — средняя линия треугольника CTB, то $BT=2MM_1$. Треугольники AM_3M и BM_3T равны, поэтому $AM=BT=2MM_1$.

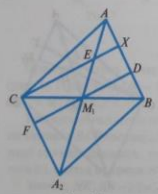

Рис. 14

Девятый способ A

«Удвоим» медиану AM_1 $(AM_1=M_1A_2)$. Получим параллелограмм (рис. 14). Через точку M_1 проведем прямую, параллельную CX. Она пересечет отрезки CA_2 и AB в точках F и D соответственно. Поскольку EX — средняя линия в треугольнике AM_1D, а четырехугольник $CXDF$ — параллелограмм, то $AX=XD=CF$. Но треугольники CM_1F и BM_1D равны, значит, $CF=BD$. Итак,

$$AX=XD=DB;\ AX:XB=1:2.$$

Девятый способ M

«Удвоим» медиану AM_1 $(AM_1=M_1A_2)$. Получим параллелограмм ABA_2C (рис. 15). Через точку M_1 проведем прямую, параллельную CM_3. Она пересечет отрезки CA_2 и AB в точках F и D соответственно. Поскольку треугольники CM_1F и BM_1D равны, то $BD=CF$. Четырехугольник CM_3DF — параллелограмм, значит, $M_3D=CF$, отсюда $M_3D=\frac{1}{2}BM_3=\frac{1}{2}AM_3$,

значит, $MM_1=\frac{1}{2}AM$.

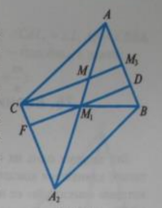

Рис. 15

Десятый способ A

Пусть точка F — точка пересечения отрезков M_1M_2 и CX (рис. 16). Поскольку $M_1M_2 \parallel AB$, то треугольники AXE и M_1FE — равны, а поэтому $FM_1=AX$. Но отрезок FM_1 — средняя линия треугольника BCX, отсюда $XB=2FM_1$. Значит, $XB=2AX$.

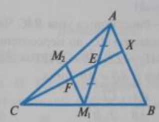

Рис. 16

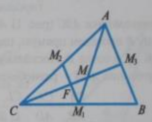

Рис. 17

Десятый способ M

Пусть точка F — точка пересечения отрезков CM_3 и M_2M_1 (рис. 17). Так как $M_1M_2 \parallel AB$, то M_1F — средняя линия треугольника CM_3B, откуда $FM_1=\frac{1}{2}M_3B$. Но треугольники M_1FM и AM_3M подобны, поэтому

$$\frac{M_1M}{MA}=\frac{M_1F}{AM_3}=\frac{\frac{1}{2}M_3B}{AM_3}=\frac{1}{2}.$$

Остальные способы доказательства свойства медиан предлагаем читателю доказать самостоятельно, воспользовавшись, естественно, книгой «Повернення втраченої геометрії».

36. Верните теорему в школу!

Эта теорема одна их самых важных в решении задач. Можно только удивляться концепции сегодняшних школьных учебников, которые «выкинули» ее и даже не поместили среди задач. Бедные учебники, бедная геометрия. На многое не претендую — хотелось бы вернуть ее в школу. Даже не с математическим уклоном.

Теорема. Докажите, что биссектриса угла треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные двум другим его сторонам.

Первый способ
(традиционный)

В треугольнике ABC (рис. 1) AL_1 — биссектриса угла BAC. Через вершину B проведем прямую, параллельную AL_1 до пересечения с прямой AC в точке D. Поскольку $\angle CAL_1=\angle L_1AB=\angle ABD=\angle ADB$, то треугольник ADB — равнобедренный и $AD=AB$. Тогда

$$\frac{CA}{AB}=\frac{CA}{AD}=\frac{CL_1}{L_1B},\ \text{или}\ \frac{CA}{AB}=\frac{CL_1}{L_1B},$$

что и требовалось.

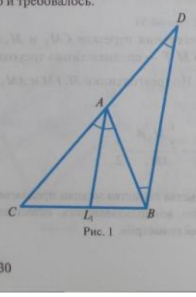

Рис. 1

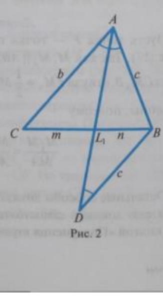

Рис. 2

Второй способ

Проведем $BD \parallel AC$ (рис. 2). Поскольку $\angle CAL_1=\angle L_1AB=\angle BDA$, то $BD=AB=c$. Треугольники CAL_1 и BDL_1 — подобны, а значит,

$$AC:BD=CL_1:L_1B\ \left(\frac{b}{c}=\frac{m}{n}\right).$$

Третий способ

Пусть S_1 и S_2 — площади треугольников AL_1B и AL_1C, $L_1D=L_1E=t$ — их высоты (рис. 3). Имеем $S_1=\frac{1}{2}tc$; $S_2=\frac{1}{2}tb$;

$\frac{S_1}{S_2}=\frac{c}{b}$. Но $\frac{S_1}{S_2}=\frac{n}{m}$, значит, $\frac{b}{c}=\frac{m}{n}$.

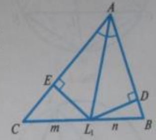

Рис. 3

Четвертый способ

$$S_2=\frac{1}{2}b\cdot l_a\cdot\sin\frac{A}{2};\ S_1=\frac{1}{2}c\cdot l_a\sin\frac{A}{2}.$$

Значит, $S_1:S_2=c:b$. Но $S_1:S_2=n:m$, значит, $\frac{b}{c}=\frac{m}{n}$.

Пятый способ

Обозначим $\angle CAL_1=\frac{\alpha}{2}$; $\angle AL_1C=\varphi$ (рис. 4). Тогда по теореме синусов из треугольников ACL_1 и AL_1B:

$$\frac{b}{\sin\varphi}=\frac{m}{\sin\frac{\alpha}{2}}\ \text{и}\ \frac{c}{\sin(180^\circ-\varphi)}=\frac{n}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Отсюда $\frac{b}{c}=\frac{m}{n}$.

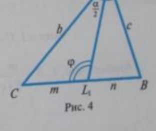

Рис. 4

Шестой способ

На прямую AL_1 из точек B и C опустим перпендикуляры $BD=d_1$ и $CE=d_2$ (рис. 5). Поскольку треугольники ABD и ACE подобны, то $\frac{d_1}{d_2}=\frac{c}{b}$. Из подобия треугольников BDL_1 и CL_1E:

$$\frac{d_1}{d_2}=\frac{n}{m}.\ \text{Значит,}\ \frac{b}{c}=\frac{m}{n}.$$

Рис. 5

Рис. 6

Седьмой способ

Опишем окружность около треугольника ABC (рис. 6). Треугольники AWB и ACL_1 подобны (рис. 6) (W — точка пересечения биссектрисы угла BAC с описанной окружностью). Обозначим $W_1B = W_1C = f$. Тогда $\frac{m}{f} = \frac{b}{AW_1}$. Аналогично, $\frac{n}{f} = \frac{c}{AW_1}$. Следовательно, $\frac{m}{n} = \frac{b}{c}$, что и требовалось доказать.

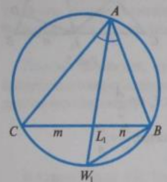

Рис. 7

Восьмой способ

Поскольку треугольник AL_1C подобен треугольнику AW_1B (рис. 7), то

$$\frac{L_1C}{W_1B} = \frac{AC}{AW_1};\; L_1C = \frac{b\cdot W_1B}{AW_1}.$$

Поскольку

$$W_1B = 2R\sin\frac{A}{2};\; AW_1 = \frac{b+c}{2}\cdot\frac{1}{\cos\frac{A}{2}},$$

имеем $L_1C = \dfrac{2b\cdot 2R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{b+c} = \dfrac{ab}{b+c}$.

Аналогично, $L_1B = \frac{ac}{b+c}$. Следовательно, $\frac{L_1B}{L_1C} = \frac{c}{b}$.

Девятый способ

По обозначениям восьмого способа: $\frac{CL_1}{W_1B} = \frac{l_a}{c}$. Поскольку

$$W_1B = 2R\sin\frac{A}{2} \text{ и } l_a = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2},$$

$$\text{то } CL_1 = \frac{2R\sin\frac{A}{2}\cdot 2bc\cdot\cos\frac{A}{2}}{(b+c)c} = \frac{ab}{b+c}.$$

Аналогично, $L_1B = \frac{ac}{b+c}$, значит, $\frac{L_1B}{L_1C} = \frac{c}{b}$, что и требовалось доказать.

Десятый способ предлагается найти самостоятельно.

37. Три высоты треугольника

Еще одна замечательная точка — точка пересечения высот, ортоцентр. Доказательства будем проводить в остроугольном треугольнике.

Теорема. Высоты треугольника пересекаются в одной точке.

Первый способ

Первый способ — общеизвестен. Его называют способом Гаусса. Через вершины A, B и C (рис. 1) проведем прямые, параллельные сторонам треугольника ABC. Получим треугольник $A_1B_1C_1$, в котором высоты данного треугольника ABC будут принадлежать прямым, проведенным через середины сторон:

$$AC_1 = AB_1,\; A_1C = CB_1,\; C_1B = BA_1.$$

Поскольку серединные перпендикуляры пересекаются в одной точке, то утверждение теоремы доказано.

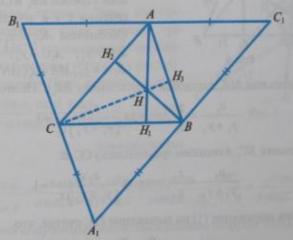

Рис. 1

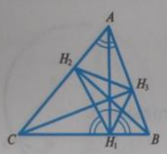

Рис. 2

Второй способ

Пусть H_1, H_2, H_3 — основания высот (рис. 2). Поскольку в ортоцентрическом треугольнике $H_1H_2H_3$ высоты AH_1, BH_2, CH_3 принадлежат биссектрисам внутренних углов этого треугольника, то у них есть общая точка — инцентр треугольника $H_1H_2H_3$.

Третий способ

Докажем вначале теорему Чевы. Пусть точки A_1, B_1, C_1 — три точки, которые принадлежат соответственно сторонам BC, CA, AB треугольника ABC или их продолжениям. Для того, чтобы прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекались в одной точке или были бы между собой попарно параллельны, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A} = 1. \qquad (*)$$

Доказательство

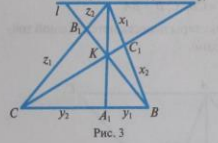

Рис. 3

Необходимость. Пусть отрезки AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке K (рис. 3). Проведем прямую l через точку A параллельно стороне BC и продолжим отрезки BB_1 и CC_1 до пересечения с l в точках M и N. Обозначим $AC_1 = x_1$, $C_1B = x_2$, $BA_1 = y_1$, $A_1C = y_2$, $CB_1 = z_1$, $B_1A = z_2$, $MA = a_1$, $AN = a_2$.

Треугольник MB_1A подобен треугольнику BB_1C. Поэтому

$$\frac{a_1}{y_1+y_2} = \frac{z_2}{z_1},\text{ отсюда } \frac{a_1z_1}{(y_1+y_2)z_2} = 1. \qquad (1)$$

Треугольник NC_1A подобен треугольнику CC_1B:

$$\frac{a_2}{y_1+y_2} = \frac{x_1}{x_2},\text{ отсюда } \frac{a_2x_2}{(y_1+y_2)x_1} = 1. \qquad (2)$$

Разделив выражение (1) на выражение (2), считая, что

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{y_1}{y_2}$$

(из подобия треугольников BKA_1 и MKA, CKA_1 и NKA), получим

$$\frac{x_1\cdot a_1\cdot z_1\cdot(y_1+y_2)}{(y_1+y_2)a_2\cdot x_2\cdot z_2} = 1,\text{ или } \frac{y_1\cdot x_1\cdot z_1}{y_2\cdot x_2\cdot z_2} = 1.$$

Случай, когда точки B_1 и C_1 лежат на продолжениях отрезков CA и BA, рассматривается аналогично.

Достаточность. На сторонах треугольника ABC (рис. 3) даны точки A_1, B_1, C_1 такие, что $\frac{AC_1\cdot BA_1\cdot CB_1}{BC_1\cdot CA_1\cdot AB_1} = 1$. Проведем отрезки AA_1 и CC_1. Они пересекутся в точке K. Пусть BB_1 не проходит через эту точку. Проведем через точку K прямую BB_2 (B_2 принадлежит AC). По условию (*) имеем $\frac{AC_1\cdot BA_1\cdot CB_2}{BC_1\cdot CA_1\cdot AB_2} = 1$. Из (1) и (2) получим $\frac{CB_1}{AB_1} = \frac{CB_2}{AB_2}$. Значит, точки B_1 и B_2 совпадают, то есть прямые AA_1, BB_1, CC_1 имеют общую точку, что и требовалось доказать.

Итак, *третий способ*

По теореме Чевы:

$$\frac{AH_3\cdot BH_1\cdot CH_2}{H_3B\cdot H_1C\cdot H_2A} = \frac{h_c\cos A\cdot h_a\cos B\cdot h_b\cos C}{h_c\cos B\cdot h_a\cos C\cdot h_b\cos A} = 1,$$

значит, три высоты пересекаются в одной точке.

* * *

Рассмотрим теоремы Чевы для прямых, проходящих через вершины треугольника ABC и составляющих с соответственными сторонами углы α, β, γ (рис. 4)[1]. Условие теоремы Чевы запишем в виде:

$$\frac{\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma}{\sin(A-\alpha)\sin(B-\beta)\sin(C-\gamma)} = 1. \qquad (\otimes)$$

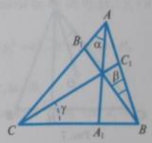

Рис. 4

Доказательство

Имеем

$$\frac{CA_1}{A_1B} = \frac{S_{AA_1C}}{S_{AA_1B}} = \frac{b\sin\alpha}{c\sin(A-\alpha)};\; \frac{AB_1}{B_1C} = \frac{c\sin\beta}{a\sin(B-\beta)};\; \frac{BC_1}{C_1A} = \frac{a\sin\gamma}{b\sin(C-\gamma)}.$$

Подставив полученные равенства в условие теоремы Чевы, получим ожидаемый результат.

[1] Такие прямые называются трансверсалями.

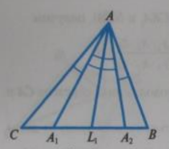

Рис. 5

Высоты как изогонали

Рассмотрим прямые, которые проходят через вершины треугольника и образуют равные углы с биссектрисами внутренних углов треугольника, проведенных из той же вершины. Такие прямые называются изогональными (рис. 5).

Теорема. Если три трансверсали имеют общую точку, то и изогональные им прямые имеют общую точку.

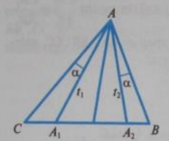

Рис. 6

Действительно (рис. 6), если, например, отрезок $AA_1 = t_1$ составляет со сторонами AC и AB углы α и $A-\alpha$, то t_2, изогональный отрезку t_1, составляет с AB углы $A-\alpha$ и α, т. е. имеет место теорема Чевы в виде формулы (⊗).

Четвертый способ

Пусть O — центр окружности, описанной вокруг треугольника ABC. Поскольку $\angle BAO = \angle CAH_1$, то прямые OA и AH_1 — изогональны (рис. 7). Но прямые OA, OB, OC имеют общую точку. Значит, прямые AH_1, BH_2, CH_3 также имеют общую точку.

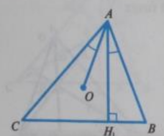

Рис. 7

Пятый способ

Пусть AH_1 и BH_2 — высоты треугольника ABC (рис. 8). Обозначим точку пересечения этих высот H и через эту точку проведем прямую CH до пересечения с AB в точке K. Обозначим также $\overline{HA} = \bar{a}$; $\overline{HB} = \bar{b}$; $\overline{HC} = \bar{c}$. Тогда $\overline{CB} = \bar{b} - \bar{c}$, $\overline{BA} = \bar{a} - \bar{b}$. Имеют место равенства

$$\bar{b}(\bar{c} - \bar{a}) = \bar{0};\ \ \bar{a}(\bar{b} - \bar{c}) = \bar{0}.$$

Отсюда $\bar{c}(\bar{a} - \bar{b}) = \bar{0}$. Значит, отрезок CK перпендикулярен к отрезку AB и $K \equiv H_3$.

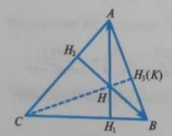

Рис. 8

Шестой способ

Рассмотрим вектор $\overline{OX} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$. Докажем, что точка X — точка пересечения высот треугольника ABC.

Для доказательства достаточно проверить, что $AX \perp BC, BX \perp AC$, $CX \perp AB$.

Ясно, что

$$\overline{AX} = \overline{AO} + \overline{OX} = \overline{AO} + \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \overline{OB} + \overline{OC}.$$

Поэтому

$$\overline{AX} \cdot \overline{BC} = (\overline{OB} + \overline{OC})(\overline{OC} - \overline{OB}) = \overline{OC}^2 - \overline{OB}^2 = 0$$

($OC = OB = R$ — радиусы окружности, описанной около треугольника ABC). Следовательно, $AX \perp BC$. Аналогично доказывается, что $BX \perp AC; CX \perp AB$.

Седьмой способ
(формула Карно и ортоцентр)

Докажем вначале формулу (теорема Карно):

Для того, чтобы прямые AB и C_1C_2 были перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы

$$AC_1^2 - BC_1^2 = AC_2^2 - BC_2^2.$$

Введем систему координат, направив ось абсцисс по прямой AB. Тогда точки A, B, C_1 и C_2 имеют координаты $(a; 0)$; $(b; 0)$; $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ соответственно. Поэтому

$$AC_1^2 - BC_1^2 = (a - x_1)^2 + y_1^2 - (b - x_1)^2 - y_1^2 = a^2 - b^2 - 2x_1(a-b).$$

Аналогично,

$$AC_2^2 - BC_2^2 = a^2 - b^2 - 2x_2(a-b).$$

Равенство $AC_1^2 - BC_1^2 = AC_2^2 - BC_2^2$ эквивалентно тому, что $x_1 = x_2$, т. е. $C_1C_2 \perp AB$.

Переходим к доказательству единственности точки пересечения высот.

Пусть высоты h_a и h_b треугольника ABC пересекаются в точке H. Тогда $BA^2 - CA^2 = BH^2 - CH^2$ и $CB^2 - AB^2 = CH^2 - AH^2$. Сложив эти равенства, получим $BC^2 - AC^2 = BH^2 - AH^2$, т. е. $CH \perp AB$.

Восьмой способ

Пусть две высоты треугольника ABC h_a и h_b пересекаются в точке Q. Тогда, учитывая, что $AB = 2R\sin C$, $\angle QAB = 90° - B$, $\angle QBA = 90° - A$ и $\angle AQB = 180° - C$ по теореме синусов для треугольника AQB:

$$\frac{AQ}{\sin(90° - A)} = \frac{AB}{\sin\angle AQB} \text{ или } \frac{AQ}{\cos A} = \frac{2R\sin C}{\sin(180° - C)} = 2R,$$

тогда $AQ = 2R\cos A$ (R — радиус окружности, описанной около треугольника ABC).

Пусть далее высота h_a пересекается с высотой h_c в точке T. Аналогично предыдущему $AT = 2R\cos A$. Следовательно, $AQ = AT$ и точки Q и T совпадают, значит, прямые AH_1, BH_2, CH_3 имеют общую точку, что и требовалось доказать.

Девятый способ

Доказательство основано на лемме: если три окружности попарно пересекаются, то три общие хорды каждой пары окружностей (или продолжения хорд) проходят через одну точку или параллельны (рис. 9).

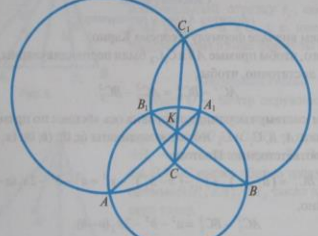

Рис. 9

Редкое доказательство с помощью стереометрии приведено в книге Д. О. Шклярского, Н. Н. Ченцова, И. М. Яглома «Избранные задачи и теоремы элементарной математики» (Часть 2. — Москва: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1952). Приведем это доказательство.

Построим на каждом круге как на экваторе, сферу (рис. 10). Эти три сферы пересекаются в двух точках (две любые сферы пересекаются по окружности, а третья сфера пересекает окружность, по которой пересекаются две сферы в двух точках, симметричных относительно общей диаметральной плоскости всех сфер.)

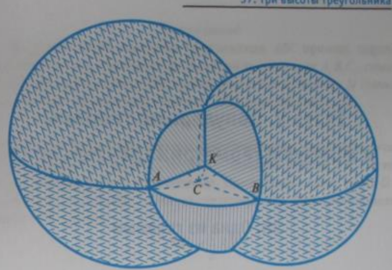

Рис. 10

Проекциями окружностей, по которым пересекаются пары сфер, служат общие хорды пар окружностей, а проекции общих точек всех пар сфер принадлежат всем трем хордам данных кругов. Следовательно, эти хорды пересекаются в одной точке, что и требовалось доказать.

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы о высотах: на отрезках AB, AC и BC как на диаметрах построим окружности $\gamma_{AB}, \gamma_{AC}, \gamma_{BC}$ (рис. 11). Общей хордой окружностей γ_{AB} и γ_{BC} является высота BH_2. Аналогично, общей хордой окружностей γ_{AB} и γ_{AC} является высота AH_1 и общей хордой окружностей γ_{BC} и γ_{AC} является высота CH_3.

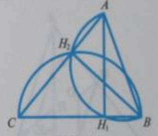

Рис. 11

Таким образом, у нас есть конфигурация из леммы: три попарно пересекающиеся окружности $\gamma_{AB}, \gamma_{AC}, \gamma_{BC}$ и их попарно общие хорды AH_1, BH_2, CH_3. Согласно лемме, отрезки AH_1, BH_2, CH_3 имеют общую точку, что и требовалось доказать.

Десятый способ предлагаем найти самостоятельно.

Глава V. Популярные теоремы и формулы геометрии треугольника

38. Одна из главных

Рассмотрим формулу

$$OM_1 = \frac{1}{2}AH,$$

где O — центр описанной окружности, H — ортоцентр, M_1 — середина стороны BC.

Первый способ

Обозначим E_1, E_2 середины отрезков AH и BH, M_2 — середина стороны AC (рис. 1). Поскольку

$$\angle HE_1E_2 = \angle OM_1M_2,$$
$$\angle E_1E_2H = \angle OM_2M_1$$
$$\text{и } E_1E_2 = M_1M_2 = \frac{1}{2}AB,$$

то треугольники OM_1M_2 и HE_1E_2 равны, значит,

$$OM_1 = E_1H = \frac{1}{2}AH.$$

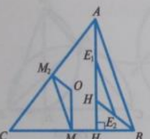

Рис. 1

Второй способ

Треугольники AHB и OM_1M_2 — подобны (рис. 1):

$$\frac{OM_1}{AH} = \frac{M_1M_2}{AB} = \frac{1}{2},$$

Значит, $OM_1 = \frac{1}{2}AH$.

Третий способ

Проведем через вершины треугольника ABC прямые, параллельные его сторонам (рис. 2). Получим треугольник $A_1B_1C_1$, гомотетичный треугольнику ABC с центром гомотетии в точке M (точка пересечения медиан треугольника ABC) и коэффициентом

$$k = -2$$

(этот факт рекомендуем доказать самостоятельно). Поскольку точка M_1 — середина отрезка BC, точка A — середина отрезка B_1C_1, то эти точки соответственно гомотетичны. Гомотетичны также точки O и H, значит, отрезки OM_1 и HA гомотетичны, а коэффициент гомотетии $k = -2$, значит,

$$OM_1 = \frac{1}{2}AH.$$

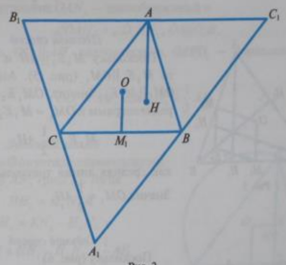

Рис. 2

Четвертый способ

Проведем диаметр DB, высоты AH_1 и CH_3 (рис. 3). Соединим точку D с точками A и C. Четырехугольник $ADCH$ параллелограмм:

$$AD \| CH, DC \| AH.$$

Но

$$OM_1 = \frac{1}{2}DC = \frac{1}{2}AH.$$

Рис. 3

Пятый способ

Продлим высоту AH_1 до пересечения с описанной окружностью в точке N (рис. 4). Тогда $HH_1 = H_1N$ (предлагается доказать самостоятельно). Обозначим точку пересечения прямых DH и BC как X. Поскольку $HH_1 = H_1N$ и $XH_1 \| DN$, то $DX = XH$. Но $DO = OA$, тогда $OX \| AH$. Значит, $OX \perp BC$. Поскольку точка O — центр окружности, то $BX = XC$. Значит, точка X совпадает с M_1, и из треугольника ADH следует, что

$$OX = OM_1 = \frac{1}{2}AH.$$

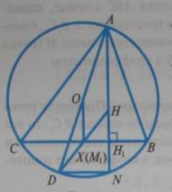

Рис. 4

Шестой способ

Поскольку $M_3E_2 \| AH$ и $OM_1 \| AH$, то $M_3E_2 \| OM_1$ (рис. 5). Аналогично, $OM_3 \| M_1E_2$. Значит, $OM_1E_2M_3$ — параллелограмм и $OM_1 = M_3E_2$. Но

$$M_3E_2 = \frac{1}{2}AH$$

как средняя линия треугольника AHB. Значит, $OM_1 = \frac{1}{2}AH$.

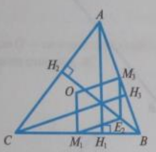

Рис. 5

Седьмой способ

Поскольку (рис. 6)

$$\angle ABH = 90° - A,\ \angle AHB = 180° - C,$$

то по теореме синусов из ΔAHB имеем

$$\frac{AH}{\sin(90° - A)} = \frac{AB}{\sin(180° - C)},$$

$$\text{или } \frac{AH}{\cos A} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

Значит, $AH = 2R\cos A$. Но $OM_1 = R\cos A$ (из треугольника OM_1C). Таким образом, утверждение доказано.

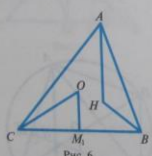

Рис. 6

Восьмой способ

Построим точки O_1 и N_1, симметричные точкам O и H относительно прямой BC (рис. 7). Точка N_1 принадлежит окружности, описанной около треугольника ABC (предлагается доказать самостоятельно). Поскольку отрезки ON_1 и O_1H симметричны относительно прямой CK, то

$$ON_1 = O_1H = R.$$

Докажем, что четырехугольник O_1OAH — параллелограмм. По свойствам симметрии: $\angle O_1HN_1 = \angle HN_1O$. Но $OA = ON_1$, значит, треугольник OAN_1 — равнобедренный и

$$\angle OAN_1 = \angle O_1HN_1,\ OA \| O_1H,$$

кроме того, $OO_1 \| AH$, следовательно, $OAHO_1$ — параллелограмм.

Значит,

$$OO_1 = AH, \text{ или } OM_1 = \frac{1}{2}AH.$$

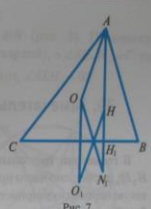

Рис. 7

Девятый способ

Из точки O опустили перпендикуляр OK на хорду AN_1 (рис. 8). Тогда

$$HH_1 = H_1N_1 \text{ и}$$
$$KH_1 = KN_1 - H_1N_1 =$$
$$= \frac{1}{2}AH + HH_1 - H_1N_1 = \frac{1}{2}AH.$$

Но $KH_1 = OM_1$. Значит, $OM_1 = \frac{1}{2}AH$.

Формула доказана.

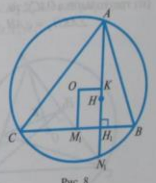

Рис. 8

39. Замечательная перпендикулярность

В геометрии треугольника перпендикулярность отрезков OA и H_2H_3 достаточно часто применяется и потому справедливо назвать такую перпендикулярность «замечательной». Хотя бы для того, чтобы обратить на нее внимание как педагогической общественности, так и учащихся, желающих глубже изучить геометрию.

Итак, треугольник ABC вписан в окружность с центром O, H_2 и H_3 — основания высот BH_2 и CH_3 (рис. 1). Докажем, что $OA \perp H_2H_3$.

Первый способ

Пусть отрезок OA пересекает отрезок H_2H_3 в точке K (рис. 1). Поскольку

$$\angle AH_2H_3 = B, \text{ а } \angle OAH_2 = 90° - B$$

(из треугольника OAC), то

$$\angle AKH_3 = \angle AH_2K + \angle H_2AK = B + 90° - B = 90°.$$

Рис. 1

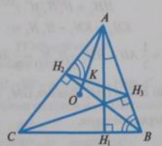

Рис. 2

Второй способ

Поскольку

$$\angle OAH_2 = \angle H_1AH_3, \text{ а } \angle AH_2K = \angle B,$$

то $\angle H_3KA = 90°$ (рис. 2).

Третий способ

В точке A проведем касательную MN (рис. 3). Поскольку $\angle H_3AM = C$ (угол между касательной и хордой), а $\angle AH_3H_2 = C$, то

$$H_2H_3 \parallel MN \text{ и } \angle KAM = 90°, \text{ значит, } \angle AKH_2 = 90°$$

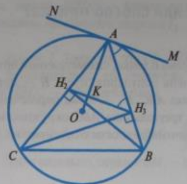

Рис. 3

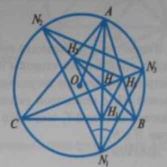

Рис. 4

Четвертый способ

Построим ортоцентрический треугольник $H_1H_2H_3$ и ортоудвоенный треугольник $N_1N_2N_3$ (рис. 4). Свойства этих треугольников подробно рассмотрены в книге автора «Треугольник и тетраэдр в задачах» (Киев: «Факт», 2004). Поскольку $\angle N_2N_1A = \angle N_3N_1A$, то

$$\cup AN_2 = \cup AN_3 \text{ и } OA \perp N_2N_3.$$

Но $H_2H_3 \parallel N_2N_3$, значит, $OA \perp H_2H_3$.

40. Поиск способов или способ поиска?

В геометрии треугольника теорема о точке, симметричной ортоцентру относительно стороны очень популярна: пусть H — ортоцентр остроугольного треугольника ABC, N_1 — точка пересечения прямой AH с описанной около треугольника ABC окружностью. Назовем теоремой T_1 теорему о симметричности относительно BC точек H и N_1.

Докажем ее.

Рис. 1

Первый способ

Поскольку (рис. 1)

$$\angle AN_1B = C = \angle BHN_1,$$

то треугольник HBN_1 равнобедренный, а значит, $HH_1 = H_1N_1$.

Второй способ

Поскольку (рис. 1)

$$\angle HBC = 90° - C = \angle CAN_1 = \angle CBN_1,$$

то BH_1 — биссектриса и высота треугольника HBN_1, а значит, $HH_1 = H_1N_1$.

Третий способ

Из треугольника AN_1B (рис. 1)

$$BN_1 = 2R\sin\angle N_1AB = 2R\sin(90° - B) = 2R\cos B = BH,$$

значит, $BH = BN_1$, следовательно, $HH_1 = H_1N_1$.

Вторая теорема, назовем ее T_2, менее популярна, чем теорема T_1. Напрасно! Постараемся это проиллюстрировать.

Обозначим D — точку диаметрально противоположную вершине A треугольника ABC (рис. 2). Докажем, что точки H и D — симметричны относительно середины M_1 отрезка BC (это и есть теорема T_2).

Действительно, поскольку

$$\angle ACD = 90°,$$

то BH и DC параллельны. Аналогично доказывается, что CH и DB — параллельны, значит, $HBDC$ — параллелограмм. Покажем применение теоремы T_2:

Рис. 2

Задача 1. Доказать, что $CD = HB$.

Действительно, это следует из того, что $HBDC$ — параллелограмм.

Задача 2. Доказать, что $OM_1 = \frac{1}{2}AH$.

Действительно, отрезок OM_1 — средняя линия треугольника AHD.

Задача 3. Доказать, что $BH^2 = 4R^2 - b^2$.

Действительно, поскольку

$$DC^2 = AD^2 - AC^2 \text{ (из } \Delta ADC),$$

а $DC = BH$, то утверждение доказано. (Еще один способ доказательства, что $AH^2 = 4R^2 - a^2$).

Задача 4. Доказать, что отрезки D_1M_1, D_2M_2, D_3M_3 пересекаются в одной точке (D_1, D_2, D_3 — точки диаметрально противоположные вершинам A, B и C треугольника ABC).

Действительно, это точка H (ортоцентр ΔABC).

Докажем с помощью теоремы T_2 теорему о единственности точки пересечения высот (*задача 5*).

Действительно, пусть прямая D_1M_1 пересекает высоту AH_1 в точке X и пусть высоты CH_3 и BH_2 пересекаются в точке H (рис. 3). Поскольку

$$OM_1 \parallel AH_1 \text{ и } AO = OD_1,$$

то OM_1 — средняя линия в треугольнике AD_1X и $DM_1 = M_1X$, а значит, по теореме T_2, точки X и H совпадают, т. е. высота AH_1 проходит через точку пересечения высот BH_2 и CH_3.

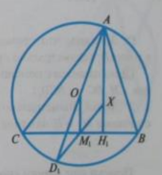

Рис. 3

Докажем теорему о точке пересечения медиан треугольника ABC (*задача 6*).

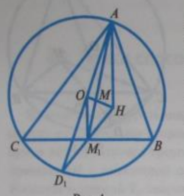

Рис. 4

В треугольнике AD_1H (рис. 4) проведем медиану AM_1 ($D_1M_1 = M_1H$ по теореме T_2). Поскольку $AO = OD_1$, то отрезок OH — тоже медиана треугольника. Обозначим M — точку пересечения медиан AM_1 и OH. Треугольники OMM_1 и HMA подобны и

$$OM : MH = OM_1 : AH = 1:2.$$

В аналогичных треугольниках AHD_2 и AHD_3 медианы также пересекаются в той же точке M, которая делит отрезок OH в отношении 1:2.

Как следствие — теорема о прямой Эйлера: точки O, M и H принадлежат одной прямой (*задача 7*).

Рис. 5

Итак, исследуя точку, симметричную ортоцентру H относительно середины стороны, мы получаем способы доказательства, отличные от традиционных.

И, наконец, заметим, что теоремы T_1 и T_2 взаимосвязаны — одна следует из другой. Действительно (рис. 5), это следует из ΔD_1HN_1.

Заметим также, что обе они имеют обратные.

1°. Доказать, что прямая HM_1 пересекает данную окружность в точке D_1 (диаметрально противоположной точке A).

(Доказывается с помощью параллельных прямых: $HH_2 \parallel D_1C$, так как $\angle H_2BC = \angle BCD_1$).

2°. Точка, диаметрально противоположная вершине A, находится с точками M_1 и H на одной прямой.

* * *

Поиски еще одного способа решения иногда приводят к новой более содержательной задаче, чем доказываемая.

Рассмотрим задачу, предложенную на Киевской математической олимпиаде:

Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон BC, AC, AB в точках K_1, K_2, K_3 соответственно. Пусть t_1, t_2, t_3 — прямые, которые параллельны биссектрисам AL_1, BL_2, CL_3 треугольника ABC и проходят через точки K_1, K_2, K_3 соответственно. Доказать, что прямые t_1, t_2, t_3 пересекаются в одной точке.

Доказательство

Поскольку треугольник AK_2K_3 — равнобедренный (рис. 6), то $AL_1 \perp K_2K_3$, откуда следует, что отрезок прямой t_1, лежащий внутри треугольника $K_1K_2K_3$, является высотой этого треугольника. Рассуждая аналогично, получим, что высоты треугольника $K_1K_2K_3$ лежат на прямых t_1, t_2, t_3, а следовательно, эти прямые имеют общую точку — ортоцентр треугольника $K_1K_2K_3$.

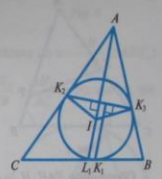

Рис. 6

Утверждение доказано.

Задача и решение настолько понравились, что захотелось найти еще один способ доказательства.

Вместо способа «возникла» новая задача.

В треугольнике ABC через основания высот H_1, H_2, H_3 проведены прямые t_1, t_2, t_3 соответственно параллельны диаметрам описанной вокруг треугольника ABC окружности, проведенных через вершины треугольника. Доказать, что эти прямые имеют общую точку.

Доказательство

Пусть O — центр окружности. Поскольку $OA \perp H_2H_3$ (рис. 7), то $t_1 \perp H_2H_3$, а это значит, что t_1 принадлежит высоте треугольника $H_1H_2H_3$, проведенной из вершины H_1. Значит, прямые t_1, t_2, t_3 имеют общую точку — ортоцентр треугольника $H_1H_2H_3$.

Рис. 7

41. Углы в антипараллелях

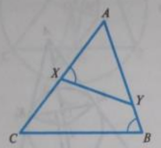

Рис. 1

Если на стороне AC треугольника ABC (рис. 1) или на ее продолжении выбрать произвольную точку X и провести через нее прямую XY ($Y \in AB$) так, чтобы $\angle AXY = B$, то тогда отрезок XY будем называть антипараллелью.

Антипараллели занимают заметное место в геометрии треугольника.

Обозначим $\angle AH_2H_3 = \alpha$, $\angle ABC = \beta$. Докажем, что $\alpha = \beta$ (рис. 2).

Первый способ

Опишем окружность около четырехугольника CH_2H_3B:

$$\angle H_3H_2C + \angle H_3BC = 180°$$
$$\text{и } \angle AH_2H_3 + \angle H_3H_2C = 180°,$$

значит, $\alpha = \beta$.

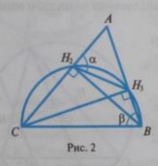

Рис. 2

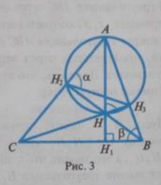

Рис. 3

Второй способ

Опишем вокруг четырехугольника AH_2HH_3 окружность (рис. 3). Поскольку

$$\angle AH_2H_3 = \angle AHH_3 = \angle ABH_1,$$

то $\alpha = \beta$.

Третий способ

Поскольку треугольники AH_2B и AH_3C подобны, то (рис. 4)

$$\frac{AH_2}{AH_3} = \frac{AB}{AC},$$

а это значит, что подобны треугольники AH_2H_3 и ABC, т. е. $\alpha = \beta$.

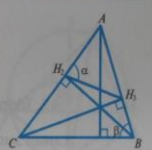

Рис. 4

Четвертый способ

Обозначим $\angle ABH_2 = \angle ACH_3 = \varphi$. Поскольку $\sin\varphi = \frac{AH_2}{AB}$ (ΔABH_2) и $\sin\varphi = \frac{AH_3}{AC}$ (ΔACH_3), следовательно, $\frac{AH_2}{AB} = \frac{AH_3}{AC}$, а это значит, что $\alpha = \beta$ (смотри третий способ).

Пятый способ

Пусть O — центр окружности, описанной вокруг треугольника ABC (рис. 5). Тогда $OA \perp H_2H_3$ (докажите!). Рассмотрим треугольник AOC. Поскольку $\angle AOC = 2B$, то $\angle OAC = 90° - B$, и $\angle AH_2H_3 = B$, значит, $\alpha = \beta$.

Рис. 5

Шестой способ

Опишем на BC как на диаметре полуокружность и продлим H_2H_3, как и BC, до пересечения в точке D (рис. 6). Из треугольника CH_2D:

$$\alpha = \angle H_2CD + \angle H_2DC.$$

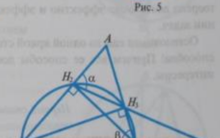

Рис. 6

Поскольку $\angle H_2DC$ как угол с вершиной вне круга равен

$$\frac{180° - 2C - 180° + 2B}{2} = B - C,$$

то $\alpha = C + B - C = B$, т. е. $\alpha = \beta$.

Предлагается найти и другие способы доказательств.

42. Теорема трилистника — самая эмоциональная теорема геометрии треугольника

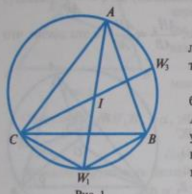

Рис. 1

Напомним, что «теоремой трилистника» мы называем следующую теорему:

Пусть W_1 — точка пересечения биссектрисы угла BAC треугольника ABC с описанной около этого треугольника окружностью. Точка I — инцентр треугольника ABC. Имеет место равенство (рис. 1)

$$W_1B = W_1C = W_1I.$$

О применении этой теоремы написано немало: удивительная теорема достаточно эффектно и эффективно применяется в решении задач.

Остановимся еще на одной яркой стороне теоремы — она многоспо́собна! Причем все ее способы достаточно самостоятельны и интересны.

Первый способ
(традиционный)

Докажем, что $\angle CIW_1 = \angle ICW_1$. Действительно,

$$\angle CIW_1 = \angle CAI + \angle ICA.$$

Но $\angle CAI = \angle W_1AB = \angle BCW_1$, а $\angle ICA = \angle ICB$.

Второй способ

Рассмотрим угол W_1IC как угол с вершиной внутри круга:

$$\angle W_1IC = \frac{\smile AW_3 + \smile CW_1}{2} = \frac{C+A}{2}.$$

Далее,

$$\angle ICW_1 = \frac{\smile W_3B + \smile W_1B}{2} = \frac{C+A}{2},$$

значит, $\angle CIW_1 = \angle ICW_1$.

Третий способ

Опишем окружность около треугольника BIC (рис. 2). Точка W_1 будет центром этой окружности, так как она принадлежит серединному перпендикуляру W_1O и

$$\angle BW_1C = 180° - A \text{ (докажите!).}$$

Значит, $W_1B = W_1C = W_1I$ как радиусы этой окружности.

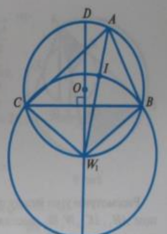

Рис. 2

Четвертый способ
(самый эмоциональный)

Пусть биссектриса угла ABC (рис. 3) пересекает окружность в точке W_2. Тогда

$$\Delta W_1IW_2 = \Delta W_1CW_2,$$

значит, $W_1I = W_1C$.

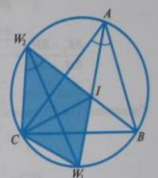

Рис. 3

Пятый способ

Воспользуемся соотношением

$$AI \cdot IW_1 = 2Rr.$$

Поскольку

$$AI = \frac{r}{\sin\frac{A}{2}},$$

то

$$\frac{r}{\sin\frac{A}{2}} \cdot IW_1 = 2Rr,$$

или (рис. 4)

$$IW_1 = 2R \cdot \sin\frac{A}{2} = CW_1.$$

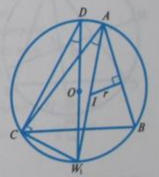

Рис. 4

Рис. 5

Шестой способ

Рассмотрим подобные треугольники AIK_2 и CW_1M_1 (рис. 5) (K_1, K_2, K_3 — точки касания вписанной окружности со сторонами BC, AC, AB; M_1 — середина стороны BC).

Имеем

$$\frac{AI}{CW_1} = \frac{AK_2}{CM_1} = \frac{p-a}{\frac{a}{2}} = \frac{b+c-a}{a}. \quad (1)$$

Рассмотрим угол между прямыми AW_1 и BC. Параллельные секущие AH_1, IK_1, W_1M_1 высекают на сторонах этого угла пропорциональные отрезки:

$$\frac{AI}{IW_1} = \frac{H_1K_1}{K_1M_1}, \text{ или}$$

$$\frac{BK_1 - BH_1}{BM_1 - BK_1} = \frac{\frac{a+c-b}{2} - \frac{a^2+c^2-b^2}{2a}}{\frac{a}{2} - \frac{a+c-b}{2}} = \frac{b+c-a}{a}. \quad (2)$$

Сравнивая (1) и (2), имеем $\frac{AI}{CW_1} = \frac{AI}{IW_1}$, значит, $CW_1 = IW_1$.

Седьмой способ

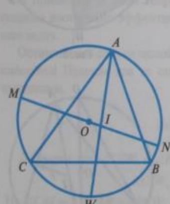

Рис. 6

Воспользуемся формулой

$$AI \cdot IW_1 = 2Rr \quad (*)$$

(R и r — радиусы описанной и вписанной окружностей). Имеем:

$$AI = \frac{r}{\sin\frac{A}{2}}.$$

Через центр O и инцентр I проведем прямую OI, которая пересечет окружность в точках M и N (рис. 6). Пусть $OI = d$. Тогда

$$MI = R+d, \; IN = R-d.$$

По теореме о произведении отрезков хорд, учитывая (*):

$$(R+d)(R-d) = AI \cdot IW_1,$$

$$\text{или } R^2 - d^2 = \frac{r}{\sin\frac{A}{2}} \cdot IW_1.$$

По формуле Эйлера $d^2 = R^2 - 2Rr$. Значит,

$$IW_1 = \frac{(R^2 - R^2 + 2Rr)\sin\frac{A}{2}}{r} = 2R\sin\frac{A}{2} = W_1B.$$

Восьмой способ

Имеем

$$IW_1 = AW_1 - AI = 2R\cos\varphi - \frac{r}{\sin\frac{A}{2}} =$$

$$= 2R\cos\frac{B-C}{2} - 4R\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

($\varphi = \frac{B-C}{2}$ и $r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$).

Значит,

$$IW_1 = 2R\left(\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} + \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} - 2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right) =$$

$$= 2R\left(\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} - \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right) =$$

$$= 2R\cos\frac{B+C}{2} = 2R\sin\frac{A}{2} = CW_1.$$

Девятый способ

Из треугольника OW_1I по теореме косинусов:

$$R^2 - 2Rr = R^2 + x^2 - 2Rx\cos\varphi$$

(тут $\varphi = \frac{B-C}{2}$, $x = W_1I$)

$$x^2 - 2Rx\cos\varphi + 2Rr = 0; \quad x^2 - 2Rx\cos\varphi + AI \cdot IW_1 = 0;$$

$$x - 2R\cos\varphi + AI = 0; \quad x = 2R\cos\varphi - AI = AW_1 - AI$$

(далее — предыдущий способ).

Покажем, что способы доказательства теоремы трилистника имеют место и в случае вневписанной окружности. Правда, в этом случае она называется «теоремой четырехлистника».

Рис. 7

Итак, точку пересечения внешней биссектрисы l'_a треугольника ABC с описанной около него окружностью назовем точкой W^A (рис. 7). Точки W_1 и W^A — диаметрально противоположны.

Теорема «четырехлистника». Имеет место равенство:

$$W^A B = W^A C = W^A I_b = W^A I_c$$

(I_a, I_b, I_c — инцентры вневписанных окружностей). Доказать.

Первый способ

$W^A B = W^A C$ (рис. 8). Докажем, что $W^A I_b = W^A B$, или $\angle 1 = \angle 2$. Из $\Delta I_b AI$:

$$\angle 2 = 90° - \angle AII_b = 90° - (180° - \angle AIB) =$$
$$= 90° - \left(180° - \left(90° + \frac{C}{2}\right)\right) = \frac{C}{2}.$$

Далее,

$$\angle 1 = \angle I_b BA - \angle ABW^A = \frac{B}{2} - \angle W^A W_1 A = \frac{B}{2} - \left(\frac{B}{2} - \frac{C}{2}\right) = \frac{C}{2},$$

что и требовалось доказать.

Аналогично доказывается, что $W^A C = W^A I_c$, значит, утверждение доказано.

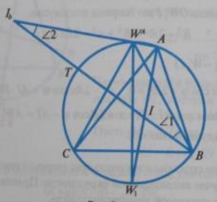

Рис. 8

Второй способ

Рассмотрим $\angle 2$ как угол с вершиной вне круга (рис. 8)

$$\angle 2 = \frac{1}{2}\left(\cup AB - \cup W^A T\right)$$

(T — точка пересечения окружности и прямой BI_b). Поскольку $\angle 1 = \frac{C}{2}$, то $\cup W^A T = C$, ясно, что $\cup AB = 2C$. Значит,

$$\angle 2 = \frac{1}{2}(2C - C) = \frac{C}{2}.$$

Предлагается найти и другие способы доказательства.

43. Биссектрисы ортоцентрического треугольника

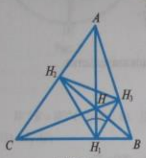

Рис. 1

О том, что высоты остроугольного треугольника ABC являются биссектрисами ортоцентрического треугольника $H_1H_2H_3$ (рис. 1), известно издавна. Наиболее «прибрано» теорема выглядит так:

Высотам треугольника принадлежат биссектрисы ортоцентрического треугольника.

Наш интерес к этой теореме усиливается не только ее частым применением в решении задач, а несколькими способами доказательств, отличающимися от обычно принятых (с помощью вспомогательных окружностей).

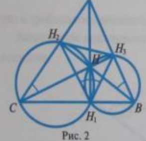

Рис. 2

Первый способ

Опишем окружности около четырехугольников H_2HH_1C и H_3HH_1B (рис. 2). Тогда

$$\angle ACH_3 = \angle H_2H_1A,$$
$$\text{а } \angle AH_1H_3 = \angle H_2BA.$$

Но $\angle ACH_3 = \angle H_2BA$.

Второй способ

Аналогичен первому, только окружности описываются, например, вокруг четырехугольников H_2HH_1C и CH_2H_3B, значит,

$$\angle H_2H_1A = \angle H_3H_1A.$$

Третий способ

Опишем окружность около треугольника ABC (рис. 3). Проведем прямые AH, BH, CH до пересечения с окружностью в точках N_1, N_2, N_3.

Поскольку

$$HH_1 = H_1N_1,\ \ HH_2 = H_2N_2,\ HH_3 = H_3N_3,$$

то треугольники $H_1H_2H_3$ и $N_1N_2N_3$ — гомотетичны.

Но

$$OA \perp H_2H_3,$$

значит,

$$OA \perp N_2N_3 \text{ и } \cup N_2A = \cup AN_3,$$

следовательно,

$$\angle N_2N_1A = \angle AN_1N_3$$
$$\text{и } \angle H_2H_1A = \angle H_3H_1A,$$

следовательно, HH_1 принадлежит биссектрисе угла $H_2H_1H_3$. Аналогично доказывается равенство двух других пар углов ортоцентрического треугольника.

Рис. 3

Другие способы связаны с углами при антипараллельных прямых.

Четвертый способ

Поскольку $\angle H_2H_1C = A = \angle H_3H_1B$ (рис. 4), значит,

$$\angle H_2H_1A = \angle H_3H_1A.$$

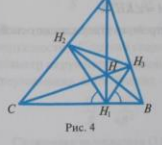

Рис. 4

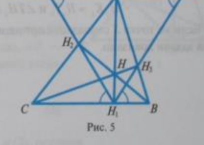

Рис. 5

Пятый способ

Через вершину A проведем прямую t, параллельную BC (рис. 5). Продлим H_1H_2 и H_1H_3 до пересечения с прямой t в точках E и K. Обозначим $AK = x$; $AE = y$. Имеем

$$\frac{x}{BH_1} = \frac{AH_3}{BH_3};\ \frac{y}{CH_1} = \frac{AH_2}{CH_2};\ \frac{x}{y} = \frac{AH_3 \cdot BH_1 \cdot CH_2}{BH_3 \cdot CH_1 \cdot AH_2}.$$

По теореме Чевы $\frac{x}{y}=1$, значит, $x=y$, следовательно, высота H_1A треугольника H_1EK будет медианой и биссектрисой.

Шестой способ

На высоте AH_1 (рис. 6) выберем произвольную точку X. Пусть K — точка пересечения прямых AC и BX, T — точка пересечения прямых AB и CX. Докажем, что $\angle TH_1A=\angle KH_1A$. Обозначим K_1 и T_1 — точки пересечения прямых H_1K и H_1T с прямой l, проведенной через вершину A параллельно стороне BC. Докажем, что $AK_1=AT_1$.

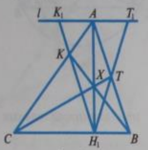

Рис. 6

По теореме Чевы

$$AK\cdot CH_1\cdot BT=KC\cdot BH_1\cdot TA.$$

Из подобия треугольников AKK_1 и CKH_1 следует, что

$$AK_1=\frac{CH_1\cdot AK}{CK}.$$

Аналогично,

$$AT_1=\frac{BH_1\cdot AT}{BT}.$$

Равенство $AT_1=AK_1$ верно, если

$$CH_1\cdot AK\cdot BT=BH_1\cdot AT\cdot CK,$$

но это следует из теоремы Чевы, отсюда

$$H_1K_1=H_1T_1 \text{ и } \angle TH_1A=\angle KH_1A.$$

Если же точка X совпадает с ортоцентром, то утверждение основной задачи доказано.

44. Второй способ решения как повод для импровизации

Рассмотрим задачу о равноделящей, т. е. прямой, которая делит площадь треугольника пополам:

Пусть AH_1 — высота треугольника ABC, M и N — проекции точки H_1 на стороны AC и AB соответственно, O — центр описанной вокруг треугольника ABC окружности. Доказать, что если точка O принадлежит отрезку MN, то этот отрезок делит площадь треугольника пополам.

Первый способ

Пусть S — площадь треугольника ABC (рис. 1). Обозначим S_x — площадь треугольника AMN. Треугольник AMN подобен треугольнику ABC (докажите!):

$$\frac{S_x}{S}=\frac{OA^2}{AH_1^2}=\frac{R^2}{h_a^2}. \qquad (1)$$

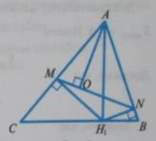

Рис. 1

(R — радиус описанной вокруг ΔABC окружности). С другой стороны, AH_1 — диаметр окружности, описанной около треугольника AMN. Значит,

$$\frac{S_x}{S}=\frac{h_a^2}{4R^2}. \qquad (2)$$

Сравнивая выражения (1) и (2), получим

$$\left(\frac{S_x}{S}\right)^2=\frac{1}{4};\quad \frac{S_x}{S}=\frac{1}{2},$$

что и требовалось доказать.

Второй способ

Известно, что отрезок MN равен полупериметру ортоцентрического треугольника $H_1H_2H_3$ и $OA\perp MN$ (докажите!). Поскольку

$$S_x=\frac{1}{2}MN\cdot OA, \text{ а } p_H=\frac{S}{R},$$

то $S_x=\frac{1}{2}\cdot\frac{S}{R}\cdot R=\frac{1}{2}S.$

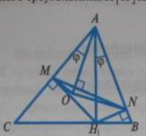

Рис. 2

Итак, в случае, если центр O принадлежит MN, то MN — равноделящая. А если O не принадлежит отрезку MN (рис. 2)?

Рассмотрим четырехугольник $AMON$ (рис. 2).

$$S_{AMON}=\frac{1}{2}AO\cdot MN=\frac{1}{2}R\cdot p_H=\frac{1}{2}S.$$

Оказалось, что ломаная MON — тоже равноделящая.

Изучение равноделящей MON приводит к непривычному способу доказательства формулы

$$S=R\cdot p_H. \qquad (1^o)$$

Действительно, докажем без применения формулы (1^o), что $S_{AMON}=\frac{1}{2}S$. Имеем

$$S_{AMON}=S_{AMO}+S_{ANO}.$$

Докажем, что

$$S_{AMO}=\frac{1}{2}S_{AH_1B}.$$[1]

Заметим, что

$$\angle MAO=\angle H_1AN,$$

$$\text{а } \angle AH_1M=\angle ACB$$

(как углы с взаимно перпендикулярными сторонами). Значит,

$$S_{AMO}=\frac{1}{2}AM\cdot AO\cdot\sin\varphi=\frac{1}{2}h_a\cdot\sin C\cdot R\sin\varphi$$

($\varphi=\angle MAO$).

$$S_{AH_1B}=\frac{1}{2}h_a\cdot c\cdot\sin\varphi.$$

[1] Доказательство столь интересно, что равенство $S_{AMO}=\frac{1}{2}S_{AH_1B}$ может быть представлено отдельной задачей.

Имеем

$$\frac{S_{AMO}}{S_{AH_1B}}=\frac{\frac{1}{2}h_a\cdot\sin C\cdot R\sin\varphi}{\frac{1}{2}h_a\cdot\sin\varphi\cdot c}=\frac{R\sin C}{c}=\frac{1}{2}.$$

Итак, $S_{AMO}=\frac{1}{2}S_{AH_1B}$. Аналогично доказывается, что

$$S_{ANO}=\frac{1}{2}S_{AH_1C} \text{ и } S_{AMO}+S_{ANO}=\frac{1}{2}\left(S_{AH_1B}+S_{AH_1C}\right)=\frac{1}{2}S.$$

Поскольку $MN=p_H$, и

$$S_{AMON}=\frac{1}{2}MN\cdot AO=\frac{1}{2}p_H\cdot R,$$

то

$$\frac{1}{2}p_H\cdot R=\frac{1}{2}S, \text{ или } S=R\cdot p_H.$$

И, наконец, при изучении проекций точки H_1 на стороны AB и AC (точки M и N), кроме рассмотренных сюжетов в книге «Треугольник и тетраэдр в задачах», мы получили интересное свойство:

ломаная MON — равноделящая.

Заметим, что доказать это можно не одним способом. Постарайтесь это сделать самостоятельно.

45. Векторный способ как повод для размышлений

Рассмотрим задачу:

Доказать, что если в треугольнике совпадают точка пересечения высот и медиан (ортоцентр H и центроид M), то треугольник ABC — равносторонний.

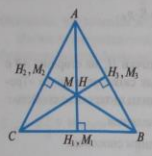

Рис. 1

Докажем этот факт традиционно. Обозначим основания высот H_1, H_2, H_3, а медиан M_1, M_2, M_3 (рис. 1). Поскольку ортоцентр H совпадает с центроидом M, то высоты треугольника ABC совпадут с соответственными медианами, и из равенства прямоугольных треугольников, например, AH_1B и AH_1C, следует, что $AB = AC$.

Аналогично доказывается, что

$$AB = BC, \text{ т. е. } AB = BC = AC.$$

Утверждение задачи доказано.

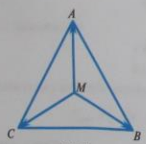

Рис. 2

Докажем задачу с помощью векторов (рис. 2). Обозначим $\overline{MA} = \overline{r_1}$, $\overline{MB} = \overline{r_2}$, $\overline{MC} = \overline{r_3}$. Тогда $\overline{AB} = \overline{r_2} - \overline{r_1}$, $\overline{AC} = \overline{r_3} - \overline{r_1}$, $\overline{BC} = \overline{r_3} - \overline{r_2}$. Докажем, что

$$\left(\overline{r_3} - \overline{r_1}\right)^2 = \left(\overline{r_2} - \overline{r_1}\right)^2 = \left(\overline{r_3} - \overline{r_2}\right)^2. \quad (1)$$

Поскольку $\overline{MC} \perp AB$, то $\overline{r_3}\left(\overline{r_2} - \overline{r_1}\right) = 0$.

По условию

$$\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = \overline{0}.$$

Учитывая, что

$$\overline{r_1} + \overline{r_2} + \overline{r_3} = \overline{0}, \text{ или } \overline{r_3} = -\left(\overline{r_1} + \overline{r_2}\right),$$

имеем

$$\left(\overline{r_1} + \overline{r_2}\right)\left(\overline{r_2} - \overline{r_1}\right) = 0, \text{ откуда } \overline{r_1}^2 = \overline{r_2}^2.$$

Аналогично получаем, что $\overline{r_2}^2 = \overline{r_3}^2$. Итак,

$$\overline{r_1}^2 = \overline{r_2}^2 = \overline{r_3}^2. \quad (2)$$

Далее, из равенств

$$\overline{r_1}\left(\overline{r_3} - \overline{r_2}\right) = 0, \quad \overline{r_2}\left(\overline{r_3} - \overline{r_1}\right) = 0$$

следует, что

$$\overline{r_1} \cdot \overline{r_2} = \overline{r_2} \cdot \overline{r_3} = \overline{r_3} \cdot \overline{r_1}. \quad (3)$$

Учитывая равенства (2) и (3), получаем, что доказано равенство (1), а следовательно, утверждение задачи.

Векторное решение задачи естественно может показаться более громоздким, чем традиционное. Хотим сразу предупредить читателя: такое сравнение неуместно, так как классический и векторный метод — это разные языки математики и надо учиться «говорить» на каждом из них.

46. Трилистник и вневписанная окружность

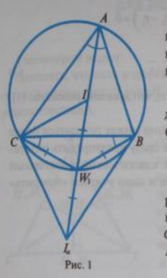

Рис. 1

Обозначим I_a — центр вневписанной окружности, касающейся стороны BC треугольника ABC (рис. 1). К известному «равенству трилистника»

$$BW_1 = CW_1 = IW_1$$

добавляется еще один компонент I_aW_1 (рис. 1): $BW_1 = CW_1 = IW_1 = I_aW_1$.

Первый способ

Поскольку IC биссектриса внутреннего угла ACB, а I_aC — биссектриса внешнего угла, то $\angle I_aCI = 90°$, и $CW_1 = W_1I$ (теорема трилистника), то $IW_1 = W_1I_a$.

Второй способ

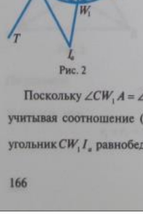

Рис. 2

Пусть прямая CI_a вторично пересекает окружность, описанную вокруг треугольника ABC в точке M (рис. 2). Тогда

$$\angle MCA = \angle I_aCT = \frac{1}{2}\angle TCB = \frac{180°-C}{2}$$

(точка T принадлежит прямой AC). Поскольку $\cup MA = 180° - C$, имеем

$$\angle CI_aW_1 = \frac{\cup MA - \cup CW_1}{2} = \frac{180°-C-A}{2} = \frac{B}{2}. \quad (1)$$

Поскольку $\angle CW_1A = \angle CBA = B$ и $\angle CW_1A = \angle W_1CI_a + \angle CI_aW_1$, то, учитывая соотношение (1), получим $\angle W_1CI_a = \frac{1}{2}B$, а значит, треугольник CW_1I_a равнобедренный, поэтому $CW_1 = W_1I_a$.

Третий способ

Пусть прямая BI (рис. 3) пересекает окружность, описанную около треугольника ABC в точке W_2, а прямую I_aC в точке I_b.

Докажем, что

$$I_aI_b \,||\, W_1W_2.$$

Действительно,

$$\angle W_2W_1C = \frac{1}{2}\cup W_2C = \angle W_2BC = \frac{B}{2}.$$

$$\angle W_1CI_a = 180° - \angle TCI_a - \angle W_1CA = 180° - \frac{180°-C}{2} - C - \frac{A}{2} = \frac{180°-C-A}{2} = \frac{B}{2},$$

Рис. 3

таким образом, $I_aI_b \,||\, W_1W_2$.

Далее. Поскольку по теореме трилистника

$$CW_1 = W_1I, CW_2 = W_2I,$$

то $\Delta CW_2W_1 = \Delta IW_2W_1$, отсюда W_2W_1 пересекает CI в середине этого отрезка, значит, W_2W_1 — средняя линия треугольника II_aI_b, следовательно, $IW_1 = I_aW_1$.

Четвертый способ

Поскольку $CI \perp I_aI_b$ (как внешняя и внутренняя биссектрисы) (рис. 3) и $CI \perp W_1W_2$ (из равнобедренного треугольника W_2CI), потому $I_aI_b \,||\, W_1W_2$. Далее доказательство можно провести как в предыдущем способе.

Пятый способ

Поскольку $CI \perp CI_a$, то

$$\angle CI_aI = 90° - \angle CII_a = 90° - (180° - \angle CIA) = 90° - \left(180° - \left(90° + \frac{B}{2}\right)\right) = \frac{B}{2}.$$

Но $\angle W_2W_1A = \frac{B}{2}$, поэтому $W_2W_1 \,||\, I_aI_b$.

Далее доказательство можно провести как в предыдущем способе.

Шестой способ

Пусть $\angle CIW_1 = \alpha$. Тогда по теореме трилистника

$$\angle ICW_1 = \alpha, \text{ а } \angle W_1CI_a = 90° - \alpha.$$

Но из ΔICI_a:

$$\angle CI_aI = 90° - \angle CII_a = 90° - \alpha,$$

следовательно, треугольник CW_1I_a равнобедренный и

$$CW_1 = W_1I_a.$$

47. Прямая Эйлера

Вместо первого способа

В 1961 году в Нью-Йорке вышла книга Г. С. М. Кокстера (Коксетера) «Введение в геометрию», о которой известный математик И. М. Яглом отозвался так:

«Все книги Г. С. М. Кокстера могут служить школой геометрического мышления».

(*Г. С. М. Кокстер. «Введение в геометрию». — Москва: Наука, 1966.*)

Шестой параграф этой книги называется «Прямая Эйлера и ортоцентр».

Рассказ об этой замечательной прямой столь необычен, что я счел своим долгом процитировать его.

«...Эйлер внес значительный вклад буквально во все области математики. Некоторые из его простейших открытий таковы, что можно представить себе дух Евклида вопрошающий: „Почему при жизни на Земле я не додумался до этого?“.

Если центроид[1] G и центр описанной окружности O у некоторого треугольника совпадают, то каждая медиана перпендикулярна к стороне, которую она делит пополам, и треугольник „трижды равнобедренный“, т. е. равносторонний. Следовательно, если треугольник ABC не равносторонний, то его центроид G и центр описанной окружности O задают единственную прямую OG.

Рассмотрим такую точку H этой прямой, называемой прямой Эйлера, что

$$OH = 3OG, \text{ т. е. } GH = 2OG$$

(рис. 1). Так как кроме того,

$$GA = 2A_1G,$$

то из второй половины предложения (VI.2)[2] Евклида следует, что прямая AH параллельна прямой A_1O, которая

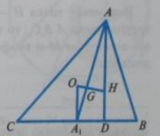

Рис. 1

[1] Центроид — точка пересечения медиан.

представляет собой перпендикуляр, восставленный к отрезку BC в его середине. Таким образом, прямая AH перпендикулярна к BC.

Точно так же можно показать, что прямая BH перпендикулярна к CA, а прямая CH — прямой AB.

Прямая, проходящая через вершину треугольника и перпендикулярная к противоположной стороне, называется высотой треугольника.

Из сказанного выше следует, что

> три высоты треугольника пересекаются в некоторой точке H прямой Эйлера. Эта общая точка H трех высот называется ортоцентром треугольника».

Заметим, что подобное доказательство есть еще один способ утверждения о единственности ортоцентра.

* * *

Перейдем к нашему исследованию.

Теорема. В треугольнике ABC центр O описанной окружности, точка M пересечения медиан и ортоцентр H принадлежат одной прямой (прямой Эйлера), причем

$$2OM = MH.$$

Первый способ

Через вершины треугольника ABC проведем прямые, параллельные его сторонам, получим треугольник $A_1B_1C_1$ (рис. 2). Он будет гомотетичен треугольнику ABC с центром гомотетии в точке M пересечения медиан треугольника ABC и коэффициентом $k = -2$:

$$\overline{MA_1} = -2\overline{MA}; \ \overline{MB_1} = -2\overline{MB};$$

$$\overline{MC_1} = -2\overline{MC}.$$

Поскольку точка H — центр окружности, описанной около треугольника $A_1B_1C_1$, то точки O и H соответственно гомотетичны с центром M и коэффициентом $k = -2$, значит, утверждение доказано.

[2] Имеется в виду VI книга «Начал» Евклида, теорема 2: «Если прямая линия проведена параллельно одной стороне треугольника, то она рассечет другие стороны пропорционально, обратно, если две стороны треугольника рассечены пропорционально, то прямая, соединяющая точки деления, будет параллельна третьей стороне треугольника.

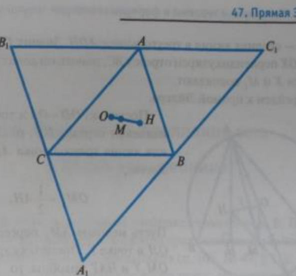

Рис. 2

Второй способ

Соединим середину стороны BC точку M_1 с точкой A, точку O с ортоцентром H (рис. 3). Поскольку

$$OM_1 = \frac{1}{2}AH,$$

то отрезок AM_1 пересечет отрезок OH в точке M — центроиде треугольника ABC, что доказывает утверждение.

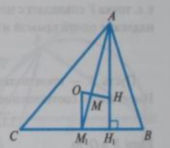

Рис. 3

Третий способ

Докажем, что точка D, диаметрально противоположная точке A (вершине вписанного треугольника ABC), середина M_1, ортоцентр H принадлежат одной прямой (рис. 4).

Соединим точки D и N_1 (N_1 — точка пересечения прямой AH с описанной около треугольника ABC окружностью), D и H. Пусть точка X — точка пересечения отрезков DH и BC.

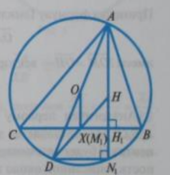

Рис. 4

Поскольку $HH_1 = H_1N_1$, то XH_1 — средняя линия треугольника DHN_1 и $DX = XH$. Рассмотрим треугольник ADH. Поскольку

$$AO = DO \text{ и } DX = XH,$$

то OX — средняя линия в треугольнике ADH. Значит, $OX \parallel AH$, и отрезок OX перпендикулярен отрезку BC, значит, он делит его пополам и точки X и M_1 совпадают.

Перейдем к прямой Эйлера.

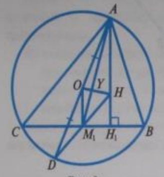

Рис. 5

Поскольку $OD = OA$ и точка M_1 принадлежит отрезку DH, то OM_1 — средняя линия треугольника ADH (рис. 5), значит,

$$OM_1 = \frac{1}{2} AH.$$

Пусть медиана AM_1 пересечет отрезок OH в точке Y. Поскольку треугольники OM_1Y и HAY подобны, то

$$M_1Y = \frac{1}{2} AY,$$

т. е. точка Y совпадает с центроидом M. Значит, точки O, M и H принадлежат одной прямой и $OM:MH = 1:2$. Утверждение доказано.

Четвертый способ

Пусть X — произвольная точка, M — центроид треугольника. Имеет место соотношение

$$3\overline{XM} = \overline{XA} + \overline{XB} + \overline{XC}.$$

Если $X \equiv O$, то

$$3\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}.$$

Применяя формулу Гамильтона

$$\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \overline{OH},$$

имеем $3\overline{OM} = \overline{OH}$ — векторная форма прямой Эйлера.

Пятый способ

Аналогичен первому способу, только вместо треугольника $A_1B_1C_1$ рассматривается треугольник $M_1M_2M_3$ и образом ортоцентра H будет ортоцентр O треугольника $M_1M_2M_3$ (центр окружности, описанной около треугольника ABC).

48. Окружность Аполлония есть в школьном учебнике

Да, именно так, в школьном учебнике геометрии А. В. Погорелова задача об окружности Аполлония предлагается после изучения подобия прямоугольных треугольников (п. 106, № 47, § 11):

Докажите, что геометрическое место точек, отношение расстояний от которых до двух данных точек постоянно (не равно единице) есть окружность.

Первый способ

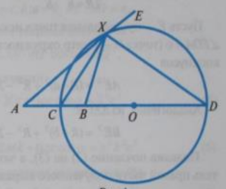

Рис. 1

Пусть X — одна из точек искомого геометрического места (рис. 1). Соединим точку X с заданными точками A и B. По условию

$$\frac{XA}{XB} = \frac{m}{n}. \qquad (1)$$

Построим биссектрисы углов AXB и BXE. По свойству этих биссектрис

$$\frac{AC}{CB} = \frac{XA}{XB}, \quad (2) \qquad \frac{AD}{DB} = \frac{XA}{XB}. \quad (3)$$

Учитывая соотношения (1), (2) и (3), получим $\frac{AC}{CB} = \frac{AD}{DB} = \frac{XA}{XB}$.

Поскольку точки A и B заданы, значит, заданы точки C и D, которые делят отрезок AB в данном соотношении внутренним и внешним образом, а $\angle CXD = 90°$.

Итак, делим отрезок AB точкой C в отношении $m:n$ — внутренним образом, точкой D в отношении $m:n$ внешним образом и на отрезке CD как на диаметре строим окружность.

Эта окружность и называется окружностью Аполлония.

Второй способ[1]

Пусть A и B — данные точки, на прямой AB есть две точки C и D, принадлежащие искомому геометрическому месту. Одна из них — точка C лежит между точками A и B.

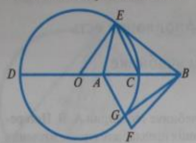

Рис. 2

Обозначим длину отрезков

$$AC = a, BC = b$$

и пусть для определенности $b > a$ (рис. 2). По условию

$$AD:BD = a:b,$$

D — вторая точка.

Очевидно, что

$$AD = CD - AC, \quad BD = CD + BC.$$

Докажем, что искомое ГМТ — окружность. Если R — радиус искомой окружности, то $AD = 2R - a$, $BD = 2R + b$ и

$$\frac{2R-a}{2R+b} = \frac{a}{b}, \text{откуда } R = \frac{ab}{b-a}.$$

Пусть E — произвольная точка искомой окружности. Обозначим $\angle EOA = \varphi$ (точка O — центр окружности). Тогда из ΔEOA по теореме косинусов

$$AE^2 = (R-a)^2 + R^2 - 2R(R-a)\cos\varphi. \qquad (2)$$

Аналогично, из ΔEOB:

$$BE^2 = (R+b)^2 + R^2 - 2R(R+b)\cos\varphi. \qquad (3)$$

Поделив почленно (2) на (3), а затем еще числитель и знаменатель правой части полученного выражения на R^2:

$$\left(\frac{AE}{BE}\right)^2 = \frac{\left(1-\frac{a}{R}\right)^2 + 1 - 2\left(1-\frac{a}{R}\right)\cos\varphi}{\left(1+\frac{b}{R}\right)^2 + 1 - 2\left(1+\frac{b}{R}\right)\cos\varphi}. \qquad (4)$$

Подставим (1) в (4)

$$\left(\frac{AE}{BE}\right)^2 = \frac{\left(1-\frac{b-a}{b}\right)^2 + 1 - 2\left(1-\frac{b-a}{b}\right)\cos\varphi}{\left(1+\frac{b-a}{a}\right)^2 + 1 - 2\left(1+\frac{b-a}{a}\right)\cos\varphi}.$$

[1] Автор доказательства Е. Доннер, газета «Математика», 2001.

Упрощая, получим

$$\left(\frac{AE}{BE}\right)^2 = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1 - 2\cdot\frac{a}{b}\cos\varphi}{\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 1 - 2\cdot\frac{b}{a}\cos\varphi} = \frac{a^2\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{a^2}-\frac{2\cos\varphi}{ab}\right)}{b^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}-\frac{2\cos\varphi}{ab}\right)} = \frac{a^2}{b^2}.$$

Итак,

$$\frac{AE}{BE} = \frac{a}{b}$$

для любого φ. Это и означает, что рассматриваемая окружность является искомым геометрическим местом точек. Других точек нет.

Докажем это утверждение от противного. Пусть точка F удовлетворяет условию $AF:BF = a:b$ и не лежит на построенной окружности. Луч AF пересекает окружность в точке G, и поэтому $AG:BG = a:b$ (рис. 2).

Обозначим

$$\angle BAF = \alpha, AG = c, b:a = k, AF:AG = n.$$

По условию $0 < n \neq 1$. Из ΔABG по теореме косинусов

$$AB^2 + AG^2 - 2AB\cdot AG\cdot\cos\alpha = BG^2,$$

или с учетом введенных обозначений:

$$(k+1)^2a^2 + c^2 - 2(k+1)ac\cos\alpha = k^2c^2. \qquad (5)$$

Аналогично, из ΔABF

$$(k+1)^2a^2 + n^2c^2 - 2n(k+1)ac\cos\alpha = n^2k^2c^2. \qquad (6)$$

Домножим обе части (5) на n и вычтем почленно из (6)

$$(1-n)(k+1)^2a^2 + \left(n^2-n\right)c^2 = \left(n^2-n\right)k^2c^2. \qquad (7)$$

Из (7):

$$n = \frac{(1+k)a^2}{(1-k)c^2}. \qquad (8)$$

Из (8) следует, что $n < 0$, так как $k > 1$ по условию задачи.

Полученное противоречие доказывает, что других точек нет.

49. Страдания юного эрудита

На I Украинской республиканской математической олимпиаде (Киев, 1961) была предложена задача:

Вычислить углы равнобедренного треугольника, в котором центры вписанной и описанной окружностей взаимно симметричны относительно основания треугольника.

Приступая к решению этой задачи, юноша (будем называть его «Эрудитом») начал наиболее естественно (с его точки зрения):

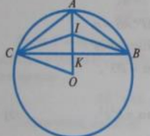

Рис. 1

Пусть I — инцентр равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$) (рис. 1), O — центр описанной окружности.

Обозначим $\angle ICK = \angle KCO = x$ (K — середина отрезка IO). Тогда

$$\sin x = \frac{r}{R} = \frac{4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{R} = 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

(r — радиус вписанной окружности, R — радиус описанной окружности). Учитывая, что

$$\sin x = \sin\frac{C}{2},\ \frac{A}{2} = 90° - C,$$

имеем:

$$\frac{1}{4} = \cos C \cdot \sin\frac{C}{2},\ \frac{1}{4} = \left(1 - 2\sin^2\frac{C}{2}\right)\sin\frac{C}{2}.$$

Итак, получили кубическое уравнение относительно $\sin\frac{C}{2}$, которое обычными школьными приемами не решается (или, по крайней мере, решается очень непросто).

Тогда Эрудит «увеличил мощность» фактического материала и для решения задачи использовал формулу Эйлера:

$$OI^2 = R^2 - 2Rr.$$

Имеем $r = \frac{1}{2}OI$, откуда

$$4r^2 = R^2 - 2Rr,\ 4r^2 + 2Rr - R^2 = 0,$$

$$r = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 + 4R^2}}{4},\ r = \frac{\sqrt{5}-1}{4}R$$

(так как $r > 0$).

Следовательно,

$$\sin x = \frac{r}{R} = \frac{\sqrt{5}-1}{4},$$

откуда $x = 18°$, поэтому $\angle B = \angle C = 36°, \angle A = 108°$.

Ответ: $108°, 36°, 36°$.

Эрудиция помогла! И все же юноша не успокоился. Он намерен решить задачу «полностью геометрически».

Второй способ

Треугольник ICO (см. рис. 1) — равнобедренный, следовательно, $\angle KCO = x$, откуда

$$\angle CAO = \angle ACO = 3x.$$

Кроме этого, $\angle AOC = 2\angle ABC = 4x$, следовательно, из треугольника AOC:

$$2 \cdot 3x + 4x = 180°,\ x = 18°,\ \angle A = 108°.$$

Следующий способ решения задачи родился просто автоматически.

Третий способ

В ромбе (!) $COBI$ (см. рис. 1): $\angle ICO + \angle CIB = 180°$, но ведь

$$\angle CIB = 2\angle CIO = 2\angle COI = 8x,$$

следовательно, $2x + 8x = 180°, x = 18°$.

И последняя точка:

Четвертый способ

Поскольку

$$\angle BIC = 90° + \frac{A}{2} \text{ и } \angle COB = 360° - 2A,$$

то $90° + \frac{A}{2} = 360° - 2A, \angle A = 108°$.

Глава VI. Формулы планиметрии

Рассмотрим различные способы доказательств формул, вошедших в школьные учебники геометрии и формул менее известных, а также новых, авторских. Часто они взаимосвязаны, хотя эта связь не всегда видна. Тем более интересно!

50. Возникла связь времен

Распалась связь времен
В. Шекспир, «Гамлет»

Поиски новых способов доказательств привели к удивительному результату:

формула Архимеда, формула Лагранжа и авторская формула есть «одно и то же лицо».

Докажем это.

I. Формула Архимеда и авторская формула идентичны

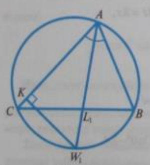

Рис. 1

Введем обозначения (рис. 1, 2) a, b, c — стороны треугольника ABC, W_1 — точка пересечения биссектрисы угла BAC с описанной окружностью, L_1 — точка пересечения биссектрисы l_a угла BAC со стороной BC.

Формула Архимеда имеет вид:

$$AK = \frac{1}{2}(b + c) \qquad (1)$$

(W_1K — перпендикуляр к стороне AC).

Авторская формула имеет вид

$$S = \frac{1}{2}AW_1 \cdot MN \qquad (2)$$

Рис. 2

(M и N основания перпендикуляров (рис.2), опущенных из точки L_1 на стороны AC и AB, S — площадь треугольника ABC).

Итак, имеем (из ΔAW_1K):

$$AK = \frac{1}{2}(b + c) = AW_1\cos\frac{A}{2}. \qquad (1°)$$

С другой стороны из авторской формулы, учитывая, что

$$l_a = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}, \text{ имеем:}$$

$$AW_1 = \frac{2S}{MN} = \frac{bc \cdot \sin A}{l_a \sin A} = \frac{bc}{\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}} = \frac{b+c}{2} \cdot \frac{1}{\cos\frac{A}{2}}. \qquad (2°)$$

Сравним выражения (1°) и (2°) — формула Архимеда и авторская формула идентичны.

II. Формула Лагранжа и авторская формула идентичны

Формула Лагранжа имеет вид ($b_1 = BL_1, c_1 = CL_1$):

$$l_a^2 = bc - b_1c_1. \qquad (3)$$

Домножим обе части формулы (3) на $\frac{1}{2}\sin A$:

$$\frac{1}{2}l_a \cdot l_a \sin A = \frac{1}{2}bc\sin A - \frac{1}{2}b_1c_1 \sin A.$$

Учитывая, что $l_a \cdot \sin A = MN$, и $b_1c_1 = l_a \cdot L_1W_1$ (теорема о произведении отрезков хорд), формулу (3) запишем в виде:

$$\frac{1}{2}l_a \cdot MN = S - \frac{1}{2}l_a \cdot L_1W_1 \cdot \sin A$$

$$\text{или } S = \frac{1}{2}l_aMN + \frac{1}{2}MN \cdot L_1W_1,$$

$$\text{или } S = \frac{1}{2}MN(l_a + L_1W_1) = \frac{1}{2}MN \cdot AW_1.$$

Получили авторскую формулу, а значит, формула Лагранжа также идентична авторской формуле.

51. Новый основной элемент

Известно, что основными элементами треугольника являются стороны (a, b, c) и углы (A, B, C).

Не менее важным является и элемент R — радиус окружности, описанной около треугольника ABC. Именно этот элемент связывает стороны и углы треугольника:

$$\frac{a}{\sin A} = 2R.$$

С нее, с этой формулы и начнем, как обычно, фантазируя.

Первый способ

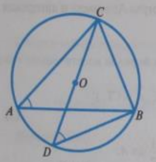

Рис. 1

Проведем диаметр CD (рис. 1). Тогда

$$BC = CD \cdot \sin D,$$

но $\angle CDB = \angle CAB$, значит, $a = 2R \sin A$.

Второй способ

Из центра O описанной окружности опустим перпендикуляр OM_1.

Из треугольника OM_1C, учитывая, что

$$\angle COM_1 = \frac{1}{2} \angle COB = A,$$

имеем

$$\frac{a}{2} = R \cdot \sin A, \text{ или } a = 2R \sin A.$$

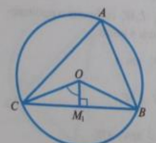

Рис. 2

Третий способ

Имеем

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{abc}{4 \cdot \frac{1}{2} bc \cdot \sin A} = \frac{a}{2 \sin A}.$$

Четвертый способ

Воспользуемся равенством (рис. 3)

$$AI \cdot IW_1 = 2Rr$$

(I — инцентр, W_1 — точка пересечения биссектрисы угла BAC с описанной окружностью).

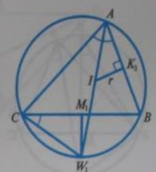

Рис. 3

Имеем

$$AI = \frac{r}{\sin \frac{A}{2}}$$

(из $\Delta AIK_3 : IK_3 \perp AB$). Тогда

$$R = \frac{r \cdot IW_1}{\sin \frac{A}{2} \cdot 2r} = \frac{IW_1}{2 \sin \frac{A}{2}}.$$

По теореме трилистника

$$IW_1 = CW_1 = \frac{a}{2 \cos \frac{A}{2}}$$

(из ΔCM_1W_1 : M_1 — середина стороны BC). Значит,

$$R = \frac{IW_1}{2 \sin \frac{A}{2}} = \frac{a}{4 \cos \frac{A}{2} \sin \frac{A}{2}} = \frac{a}{2 \sin A},$$

что и требовалось доказать.

Пятый способ

Воспользуемся формулой

$$R = \frac{ab}{2h_c}$$

(см.: *І. Кушнір. «Геометричні формули, що не ввійшли до шкільних підручників». — Киев: Факт, 2002*).

Поскольку

$$\frac{b}{h_c} = \sin A,$$

то $\dfrac{a}{\sin A} = 2R.$

Шестой способ

Рис. 4

Проведем диаметр W_1D, перпендикулярный BC и биссектрису AW_1 (рис. 4).

Из ΔBDW_1:

$$2R = \frac{BW_1}{\sin \frac{A}{2}}. \quad (1)$$

Из ΔBW_1M_1 (M_1 — середина стороны BC):

$$BW_1 = \frac{a}{2 \cos \frac{A}{2}}. \quad (2)$$

Подставим формулу (2) в формулу (1):

$$2R = \frac{a}{2 \cos \frac{A}{2} \sin \frac{A}{2}} = \frac{a}{\sin A}, \text{ или } \frac{a}{\sin A} = 2R.$$

Седьмой способ

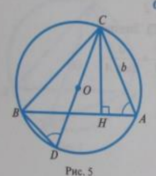

Рис. 5

В треугольнике ABC (рис. 5) проведем высоту CH. Тогда из ΔCHA:

$$h_c = b \cdot \sin A. \quad (1)$$

Поскольку треугольник CHA подобен треугольнику CBD (CD — диаметр), то

$$\frac{h_c}{a} = \frac{b}{2R}, \text{ или } h_c = \frac{ab}{2R},$$

или учитывая (1):

$$b \sin A = \frac{ab}{2R},$$

откуда $a = 2R \sin A$.

Восьмой способ

Пусть H — ортоцентр в треугольнике ABC. Через вершины A, B и C проведем прямые, параллельные сторонам BC, AC и AB (рис. 6). Можно доказать, что H — центр окружности, описанной около полученного треугольника $A_1B_1C_1$, причем $HC_1 = 2R$, а $\angle AHC_1 = A$, и $AC_1 = a$. Имеем

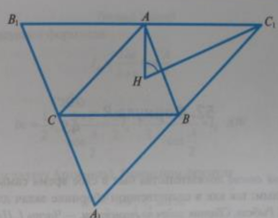

Рис. 6

$$\sin \angle AHC_1 = \frac{AC_1}{HC_1}, \text{ или } \sin A = \frac{a}{2R}.$$

Девятый способ

Из треугольника AHC_1 (рис. 6) имеем

$$AH^2 = 4R^2 - a^2, \text{ или } \frac{AH^2}{4R^2} = 1 - \frac{a^2}{4R^2}.$$

Значит,

$$\cos^2 A = 1 - \frac{a^2}{4R^2}, \text{ откуда } 1 - \cos^2 A = \frac{a^2}{4R^2};$$

$$\sin^2 A = \frac{a^2}{4R^2}, \sin A = \frac{a}{2R}.$$

Десятый способ предлагается найти самостоятельно.

52. Формула $R = \dfrac{abc}{4S}$

Первый способ доказательства был в свое время самым распространенным: так как в единственном сборнике задач для школ —

Н. Рыбкин. Сборник задач по геометрии. — Часть I. Планиметрия для 6—9 классов семилетней и средней школ. — Издание двадцатое. — Москва—Ленинград: Государственное учебно-педагогическое издательство Министерства просвещения РСФСР, 1954 —

в задаче № 15 (2) § 14 значилось:

Доказать, что радиус описанного круга $R = \dfrac{abc}{4S}$.

В ответах указания не было, но... в предыдущей задаче (§ 14 № 15) требовалось: «Доказать, что во всяком треугольнике произведение двух сторон равно произведению диаметра описанного круга на высоту, опущенную на третью сторону». Это и был *первый способ* доказательства формулы (рис. 1). Действительно, пусть треугольник ABC вписан в окружность с центром O и диаметром AD (рис. 1), AH_1 — высота треугольника. Поскольку

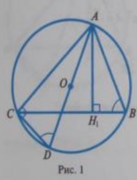

Рис. 1

$$\angle ABH_1 = \angle ADC,$$

то $\Delta ABH_1 \sim \Delta ADC$ и $\dfrac{h_a}{b} = \dfrac{c}{2R}$,

или $2R = \dfrac{bc}{h_a} = \dfrac{bc \cdot a}{2S}$, откуда $R = \dfrac{abc}{4S}$.

Второй способ

Второй способ связан с тригонометрией. Доказывалось равенство $a = 2R\sin A$ (R — радиус описанной окружности) и применялась формула $S = \dfrac{1}{2} bc \sin A$.

Третий способ

Воспользуемся формулой

$$l_a = \frac{2bc}{b+c} \cos\frac{A}{2}.$$

Имеем

$$bc = \frac{1}{2} l_a \cdot \frac{b+c}{\cos\frac{A}{2}} = \frac{1}{2} l_a \cdot \frac{b+c}{2} \cdot \frac{2}{\cos\frac{A}{2}} = l_a \cdot AW_1$$

(применили задачу Архимеда). Применим формулу

$$S = \frac{1}{2} AW_1 \cdot l_a \sin A.$$

Имеем

$$\frac{abc}{4S} = \frac{a \cdot l_a \cdot AW_1}{4S} = \frac{a \cdot l_a \cdot AW_1}{4 \cdot \frac{1}{2} AW_1 \cdot l_a \sin A} = \frac{a}{2\sin A} = R.$$

Четвертый способ

Имеем $r = 4R \sin\dfrac{A}{2} \sin\dfrac{B}{2} \sin\dfrac{C}{2}$, отсюда

$$R = \frac{r}{4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} = \frac{S}{p \cdot 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} =$$

$$= \frac{S}{\frac{1}{2}(a+b+c) \cdot 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} =$$

$$= \frac{S}{\frac{1}{2} \cdot 2R(\sin A + \sin B + \sin C) \cdot 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} =$$

$$= \frac{S}{\frac{1}{2} \cdot 2R \cdot 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \cdot 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} =$$

$$= \frac{S}{2R\sin A \sin B \sin C} = \frac{S \cdot R^2 \cdot 4}{abc},$$

отсюда $R = \dfrac{abc}{4S}$.

Пятый способ предлагается найти самостоятельно.

53. Радиус вписанной в треугольник окружности

Формула $r = \dfrac{S}{p}$ общеизвестна: сколько существует школьная геометрия, столько и эта формула. Но «никто и никогда» или точнее никому и никогда не приходила мысль доказать эту формулу разными способами. **Особое внимание обращаем на второй способ — это впервые.** Итак, r — радиус вписанной в ΔABC окружности, S — площадь этого треугольника, p — полупериметр $\left(p = \dfrac{a+b+c}{2}\right)$.

Первый способ

Первый способ общеизвестен:

$$S = \frac{1}{2} ra + \frac{1}{2} rb + \frac{1}{2} rc = \frac{1}{2} r(a+b+c) = rp.$$

Второй способ (!)

«Спрямим» стороны $AC = CK$ и $AB = BT$ (рис. 1). Тогда отрезок KT равен периметру треугольника ABC, а поскольку

$$\angle AKC = \angle ICB = \frac{C}{2} \text{ (} I \text{ — инцентр), а } \angle IBC = \angle ATB = \frac{B}{2},$$

то $\Delta IBC \sim \Delta ATK$ и $\dfrac{r}{h_a} = \dfrac{a}{2p}$. Значит, $r = \dfrac{ah_a}{2p} = \dfrac{S}{p}$.

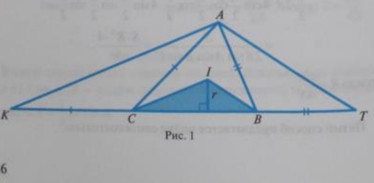

Рис. 1

Третий способ

Пусть окружность с центром I касается стороны AC треугольника ABC в точке K_2 (рис. 2). Поскольку отрезок

$$AK_2 = p - a, \text{ то } S_1 = S_{AIK_2} = \frac{1}{2}(p-a)r.$$

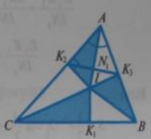

Рис. 2

Аналогично,

$$S_2 = S_{IK_3B} = \frac{1}{2}(p-b)r, \quad S_3 = \frac{1}{2}(p-c)r.$$

Поскольку $S_{ABC} = S = 2(S_1 + S_2 + S_3)$, то

$$S = 2 \cdot \frac{1}{2} r(p-a+p-b+p-c) = r \cdot p, \text{ или } r = \frac{S}{p}.$$

Четвертый способ

Имеем

$$rp = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \cdot R(\sin A + \sin B + \sin C) =$$

$$= 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \cdot 4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} =$$

$$= 2R^2 \sin A \sin B \sin C = S.$$

Пятый способ

Обозначим S_1 — площадь четырехугольника AK_3IK_2 (рис. 2) (K_1, K_2, K_3 — точки касания вписанной в треугольник ABC окружности со сторонами BC, AC, AB). Ясно, что $S_1 = \dfrac{1}{2} AI \cdot K_2K_3$. Пусть N_1 — середина отрезка K_2K_3. Тогда

$$r^2 = AI \cdot IN_1, \quad AI = \frac{r^2}{IN_1}.$$

Значит,

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{r^2}{IN_1} \cdot K_2K_3.$$

Пусть S_2, S_3 — площади четырехугольников IK_1BK_3, IK_1CIK_2. Имеем

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = \frac{1}{2} r^2 \left(\frac{K_2K_3}{IN_1} + \frac{K_1K_3}{IN_2} + \frac{K_1K_2}{IN_3} \right)$$

$$\frac{K_2K_3}{IN_1}=\frac{2K_2N_1}{IN_1}=2\operatorname{tg}\angle K_2IA \text{ (из } \Delta IK_2N_1\text{)}.$$

$$\frac{K_2K_3}{IN_1}=2\operatorname{tg}\left(\frac{180^\circ-A}{2}\right)=2\operatorname{ctg}\frac{A}{2}.$$

Итак,

$$S=\frac{1}{2}r^2\cdot 2\left(\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\right)=r^2\cdot\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}.$$

$$S=\frac{r^2\cdot p(p-a)(p-b)(p-c)}{pr^3},$$

или $S=\frac{S^2}{p\cdot r}$, откуда $r=\frac{S}{p}$.

Шестой способ

Поскольку

$$r=(p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2},\ r=(p-b)\operatorname{tg}\frac{B}{2},\ r=(p-c)\operatorname{tg}\frac{C}{2},$$

то $r^3=(p-a)(p-b)(p-c)\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}$.

Но $\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$. Действительно,

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}=\sqrt{\frac{2bc-\left(b^2+c^2-a^2\right)}{2bc+\left(b^2+c^2-a^2\right)}}=$$

$$=\sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{(b+c)^2-a^2}}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}.$$

Значит, $r^3=(p-a)(p-b)(p-c)\sqrt{\frac{S^2}{p^3\cdot p}}=\frac{S^3}{p^3}$, или $r=\frac{S}{p}$.

Седьмой способ

Имеем $r=(p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2}$. Но $\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$, значит,

$$r^2=(p-a)^2\cdot\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}, \text{ или } r^2p^2=p(p-a)(p-b)(p-c),$$

откуда $r\cdot p=S$.

54. Знакомая формула

Формула радиуса окружности, вписанной в прямоугольный треугольник известна, хотя далеко не все школьные учебники геометрии предлагают ее учащимся.

$$r=\frac{a+b-c}{2}\ (\angle C=90^\circ).$$

Удобство этой формулы по сравнению с формулой $r=\frac{S}{p}$ — очевидно: она состоит из линейных элементов, да и не просто элементов, а основных (два катета и гипотенуза). Поиски способов доказательства служат также поводом для упражнения в применении различных формул и теорем геометрии треугольника.

Первый способ

Пусть I — инцентр прямоугольного треугольника ABC ($\angle C=90^\circ$) (рис. 1). Точки K_1, K_2, K_3 — точки касания вписанной окружности со сторонами треугольника ABC. Поскольку CK_1IK_2 — квадрат, то

$$K_2A=K_3A=b-r;$$

$$BK_1=BK_3=a-r.$$

Гипотенуза AB равна $2R$, значит:

$$AB=AK_3+K_3B,$$

или $2R=b-r+a-r$, откуда $r=\frac{a+b-c}{2}$.

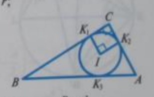

Рис. 1

Второй способ

Пусть окружность с центром I касается катета CA в точке K_2 (рис. 2). Поскольку $CK_2=p-c$, а $\angle ICK_2$ равен 45°, то $IK_2=CK_2$, значит,

$$r=p-c=\frac{a+b-c}{2}.$$

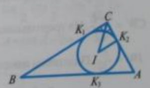

Рис. 2

Глава VI. Формулы планиметрии

Третий способ

Учитывая, что $r=\frac{S}{p}$, и в прямоугольном треугольнике

$$S=\frac{1}{2}ab\ (\angle C=90^\circ),$$

докажем, что

$$\frac{a+b-c}{2}=\frac{\frac{1}{2}ab}{\frac{a+b+c}{2}},$$

или $(a+b)^2-c^2=2ab$, или $a^2+2ab+b^2-c^2=2ab$. Но $a^2+b^2=c^2$, значит, равенство доказано.

Четвертый способ

Равенство

$$\frac{ab}{a+b+c}=\frac{a+b-c}{2}$$

докажем иначе:

$$\frac{ab(a+b-c)}{(a+b)^2-c^2}=\frac{ab(a+b-c)}{a^2+2ab+b^2-c^2}=\frac{ab(a+b-c)}{2ab}=\frac{a+b-c}{2}.$$

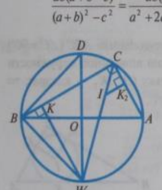

Рис. 3

Пятый способ

Опишем вокруг прямоугольного треугольника ABC ($\angle C=90^\circ$) (рис. 3) окружность, WD — диаметр, I — инцентр, точка K — проекция точки W на катет BC, CW — биссектриса прямого угла ACB. Имеем

$$CW=CI+IW. \qquad (1)$$

$$CI=r\sqrt{2}\ (\angle CIK_2=45^\circ).$$

По формуле Архимеда $CK=\frac{a+b}{2}$, из треугольника CWK: $CW=\frac{a+b}{\sqrt{2}}$. Из треугольника WDB: $WB=\frac{c}{\sqrt{2}}$. По теореме трилистника $IW=\frac{c}{\sqrt{2}}$. Подставим в выражение (1)

$$\frac{a+b}{\sqrt{2}}=r\sqrt{2}+\frac{c}{\sqrt{2}}, \text{ отсюда } r=\frac{a+b-c}{2}.$$

Шестой способ

Известно, что

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}.$$

Для прямоугольного треугольника

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{h_c}, \text{ или } \frac{1}{r}=\frac{a+b}{ab}+\frac{c}{ab},$$

$$\text{или } \frac{1}{r}=\frac{a+b+c}{ab},$$

значит,

$$r=\frac{ab(a+b-c)}{(a+b+c)(a+b-c)}=\frac{(a+b-c)ab}{(a+b)^2-c^2}=$$

$$=\frac{(a+b-c)ab}{\underbrace{a^2+b^2}_{c^2}-c^2+2ab}=\frac{a+b-c}{2}.$$

Седьмой способ

Воспользуемся формулой

$$r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

когда $\angle C=90^\circ$. Имеем

$$r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\left(\frac{90^\circ-A}{2}\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2},$$

значит,

$$r=2\sqrt{2}R\sin\frac{A}{2}\sin\left(45^\circ-\frac{A}{2}\right)=$$

$$=2\sqrt{2}R\sin\frac{A}{2}\left(\sin 45^\circ\cos\frac{A}{2}-\cos 45^\circ\sin\frac{A}{2}\right)=$$

$$=2\sqrt{2}R\sin\frac{A}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{A}{2}-\sin\frac{A}{2}\right)=2R\left(\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}-\sin^2\frac{A}{2}\right)=$$

$$=R\left(\sin A-\left(1-\cos A\right)\right)=R(\sin A+\cos A-1)=$$

$$=R(\sin A+\sin B-\sin C)=\frac{a+b-c}{2}.$$

Восьмой способ

Воспользуемся формулой Архимеда: $CK = \frac{a+b}{2}$ (рис. 4). Для прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$)

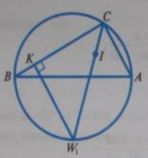

Рис. 4

$$CW_1 = \frac{a+b}{2\cos\frac{C}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(a+b).$$

По теореме трилистника

$$IW_1 = BW_1 = \frac{c}{2\cos\frac{C}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}c.$$

$$CI = CW_1 - IW_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(a+b-c).$$

Воспользуемся формулой $CI \cdot IW_1 = 2Rr$. Имеем

$$2Rr = c \cdot r = \frac{1}{2}c(a+b-c), r = \frac{1}{2}(a+b-c).$$

Девятый способ

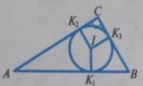

Рис. 5

Докажем, что $a+b = 2R+2r$ (рис. 5). Действительно, диаметр описанной окружности равен $AB = 2R = c$. Диаметр $2r$ вписанной окружности равен $K_2C + CK_3$ (так как IK_2CK_3 — квадрат). Следовательно,

$$AC + BC = (AK_2 + BK_3) + (K_2C + CK_3) =$$
$$= (AK_1 + K_1B) + (K_2C + CK_3) = 2R + 2r.$$

Итак, $a+b = c+2r$, значит, $r = \frac{a+b-c}{2}$.

Десятый способ

По формуле Карно[1]: $R + r = OM_1 + OM_2 + OM_3$.

В прямоугольном треугольнике

$$OM_1 = \frac{1}{2}b, OM_2 = \frac{1}{2}a, OM_3 = 0.$$

Значит, $R + r = \frac{a+b}{2}$, или $r = \frac{a+b-c}{2}$.

[1] Треугольник ABC — не тупоугольный.

Одиннадцатый способ

Применим формулу Эйлера:

$$OI^2 = R^2 - 2Rr.$$

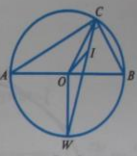

Рис. 6

Имеем (рис. 6):

$$IW = \frac{\sqrt{2}c}{2}; OW = \frac{c}{2};$$

$$r = \frac{R^2 - OI^2}{2R} = \frac{\frac{c^2}{4} - OI^2}{c} = \frac{c^2 - 4OI^2}{4c}.$$

Из треугольника OIW по теореме косинусов

$$OI^2 = OW^2 + IW^2 - 2OW \cdot IW \cdot \cos\varphi$$

($\varphi = \angle OWI$). Известно, что $\varphi = \frac{B-C}{2}$. В данном случае

$$\varphi = \frac{90° - 2A}{2} = 45° - A;$$

$$\cos\varphi = \cos(45° - A) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos A + \sin A) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin B + \sin A).$$

Имеем

$$OI^2 = \frac{c^2}{4} + \frac{c^2}{2} - 2 \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot c \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin B + \sin A) =$$
$$= \frac{3c^2}{4} - \frac{c^2}{2}(\sin B + \sin A) =$$
$$= \frac{c^2}{4}(3 - 2\sin B - 2\sin A) =$$
$$= \frac{c^2}{4}\left(1 + 2(1 - \sin B - \sin A)\right) =$$
$$= \frac{c^2}{4}\left(1 - 2(\sin B + \sin A - \sin C)\right) =$$
$$= \frac{c}{4}\left(c - 2(c\sin B + c\sin A - c\sin C)\right) =$$
$$= \frac{c}{4}(c - 2(a+b-c)) = \frac{c}{4}(c - 2b - 2a + 2c) = \frac{c}{4}(3c - 2b - 2a).$$

$$r = \frac{c^2 - 4OI^2}{4c} = \frac{c^2}{4c} - \frac{OI^2}{c} = \frac{c}{4} - \frac{1}{4}(3c - 2b - 2a) = \frac{a+b-c}{2}.$$

13 - 6-1744

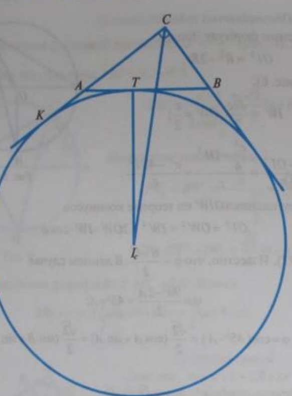

Рис. 7

Двенадцатый способ

Построим вневписанную окружность (рис. 7). Пусть r_c — радиус вневписанной окружности. Поскольку $\angle C = 90°$, то $r_c = p$. Имеем

$$r_c = \frac{S}{p-c} = \frac{2S}{a+b-c} = p = \frac{S}{r}, \text{ откуда } r = \frac{a+b-c}{2}.$$

Предлагаем найти тринадцатый способ доказательства.

55. Кто бы мог подумать?

Кто бы мог подумать, что формула биссектрисы $l_a = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$ как ни одна из рассматриваемых формул является «Клондайком» методов доказательства: применение вспомогательного элемента, различных дополнительных построений, авторской формулы, формулы Архимеда и что особенно ценно — метода аналогии: способы доказательства теоремы о свойстве биссектрисы, связанную с пропорциональностью сторон, уместно применить для доказательства рассматриваемой формулы.

Первый способ

Первый способ общеизвестен (рис. 1):

$$S_{ABC} = S_{AL_1B} + S_{AL_1C}.$$

$$\frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}l_a c\sin\frac{A}{2} + \frac{1}{2}l_a b\sin\frac{A}{2}.$$

$$2bc\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} = l_a(b+c)\sin\frac{A}{2}.$$

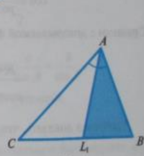

Рис. 1

Отсюда

$$l_a = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}.$$

Второй способ

По теореме синусов из треугольника AL_1B (рис. 1):

$$\frac{l_a}{\sin B} = \frac{c}{\sin\left(C + \frac{A}{2}\right)}, \text{ откуда } l_a = \frac{c \cdot \sin B}{\sin\left(C + \frac{A}{2}\right)}.$$

Требуется доказать, что

$$\frac{c \cdot \sin B}{\sin\left(C + \frac{A}{2}\right)} = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2},$$

13*

или

$$\frac{\sin B}{\sin\left(C+\frac{A}{2}\right)}=\frac{4R\sin B\cos\frac{A}{2}}{2R(\sin B+\sin C)},$$

$$\text{или } \sin B+\sin C=2\cos\frac{A}{2}\sin\left(C+\frac{A}{2}\right),$$

$$\text{или } \sin B+\sin C=\sin(C+A)+\sin C,$$

что очевидно.

Третий способ

Поскольку

$$\angle(h_a, l_a)=\frac{B-C}{2}$$

(пусть $B>C$), то

$$l_a=\frac{h_a}{\cos\frac{B-C}{2}}=\frac{2S}{a\cos\frac{B-C}{2}}=\frac{bc\sin A}{a\cos\frac{B-C}{2}}.$$

Сравним с доказываемой формулой:

$$\frac{bc\sin A}{a\cos\frac{B-C}{2}}=\frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}.$$

Требуется доказать, что

$$\frac{\sin A}{2R\sin A\cos\frac{B-C}{2}}=\frac{2\cos\frac{A}{2}}{2R(\sin B+\sin C)},$$

$$\text{или } \frac{\sin A(\sin B+\sin C)}{2}=\cos\frac{A}{2}\sin A\cos\frac{B-C}{2},$$

откуда

$$2\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{A}{2}=\sin B+\sin C.$$

Но $\sin B+\sin C=2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}$, значит,

$$l_a=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}.$$

Четвертый способ

Поскольку $L_1B=\frac{ac}{b+c}$, то по теореме синусов

$$\frac{ac}{(b+c)\sin\frac{A}{2}}=\frac{l_a}{\sin B},\ \text{отсюда } l_a=\frac{ac\cdot\sin B}{(b+c)\sin\frac{A}{2}}.$$

Докажем, что

$$\frac{ac\cdot\sin B}{(b+c)\sin\frac{A}{2}}=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}.$$

Действительно,

$$ac\cdot\sin B=2bc\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2},\ \frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}bc\sin A,$$

или $S_{ABC}=S_{ABC}$ — площадь треугольника ABC.

Пятый способ

Этот способ имеет смысл рассматривать, несмотря на кажущуюся идентичность четвертому способу. Действительно,

$$\frac{ac\sin B}{(b+c)\sin\frac{A}{2}}=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2},$$

$$\text{или } a\sin B=2b\cos\frac{A}{2}\sin\frac{A}{2},\ \text{или } \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B},$$

что очевидно и отличается от предыдущего способа.

Шестой способ

Проведем через точку B прямую, параллельную биссектрисе AL_1 до пересечения с прямой AC в точке D (рис. 2). В треугольнике DAB:

$$\angle ADB=\angle ABD=\frac{1}{2}A:$$

$$BD=2AB\cos\angle ABD=2c\cdot\cos\frac{A}{2}.$$

Поскольку $\frac{AL_1}{BD}=\frac{CA}{CD}$, то

$$\frac{l_a}{2c\cos\frac{A}{2}}=\frac{b}{b+c},$$

значит, $l_a=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$.

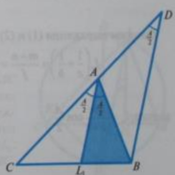

Рис. 2

Седьмой способ

Проведем $BD \parallel AC$ (рис. 3). Поскольку

$$\angle L_1AB=\angle L_1DB=\frac{1}{2}A,$$

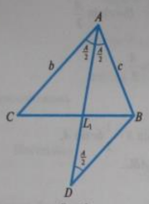

Рис. 3

то $AB=BD=c$. Треугольник ACL_1 подобен треугольнику DBL_1.

$$\frac{DL_1}{L_1A}=\frac{c}{b},\ \text{или } \frac{DL_1+L_1A}{L_1A}=\frac{c+b}{b},$$

откуда

$$l_a=\frac{b}{b+c}AD,$$

но $AD=2c\cos\frac{A}{2}$ (ΔABD), значит,

$$l_a=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}.$$

Восьмой способ

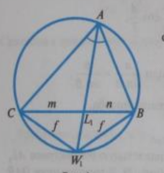

Рис. 4

Опишем вокруг треугольника ABC окружность и обозначим

$$CL_1=m;\ L_1B=n;\ CW_1=W_1B=f$$

(рис. 4). Поскольку

$$\Delta ACL_1\sim\Delta AW_1B:$$

$$\frac{l_a}{c}=\frac{m}{f}. \quad (1)$$

Поскольку $\Delta ABL_1\sim\Delta AW_1C$:

$$\frac{l_a}{b}=\frac{n}{f}. \quad (2)$$

Сложим выражения (1) и (2):

$$l_a\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{b}\right)=\frac{m+n}{f}=\frac{a}{f}=\frac{2R\sin A}{2R\sin\frac{A}{2}}=2\cos\frac{A}{2};$$

значит, $l_a=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$.

Девятый способ
(применение авторской формулы)

Имеем (рис. 5)

$$S=\frac{1}{2}AW_1\cdot MN.\ S=\frac{1}{2}bc\cdot\sin A.$$

Значит,

$$AW_1\cdot MN=bc\sin A.$$

Поскольку

$$MN=l_a\sin A,$$

$$AW_1=\frac{b+c}{2\cos\frac{A}{2}}$$

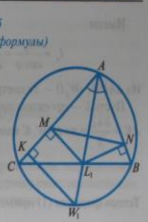

Рис. 5

(применили формулу Архимеда $AK=\frac{b+c}{2}$), то

$$\frac{b+c}{2\cos\frac{A}{2}}\cdot l_a\cdot\sin A=bc\cdot\sin A,$$

откуда

$$l_a=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}.$$

Десятый способ

Поскольку

$$AW_1=\frac{b+c}{2\cos\frac{A}{2}},$$

$$\text{а } AW_1\cdot l_a=b\cdot c\ (\Delta AW_1B\sim\Delta AL_1C),$$

то $l_a=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$.

Одиннадцатый способ

Опишем вокруг треугольника ABC окружность (рис. 6) и продлим биссектрису AL_1 до пересечения с этой окружностью в точке W_1. Обозначим φ — угол между высотой AH_1 и биссектрисой AL_1. Пусть S — площадь треугольника ABC, R — радиус описанной окружности.

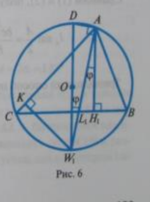

Рис. 6

Имеем

$$l_a = \frac{h_a}{\cos\varphi} = \frac{2S}{a\cos\varphi} = \frac{bc\sin A}{a\cos\varphi} = \frac{bc}{2R\cos\varphi}. \quad (1)$$

Из ΔADW_1 (W_1D — диаметр окружности): $AW_1 = 2R\cos\varphi$.

Пусть K — проекция точки W_1 на сторону AC. По задаче Архимеда: $AK = \frac{b+c}{2}$ и из ΔAW_1K имеем

$$AK = AW_1 \cos\frac{A}{2}.$$

Теперь формула (1) примет вид:

$$l_a = \frac{bc\cos\frac{A}{2}}{2R\cos\varphi\cos\frac{A}{2}} = \frac{bc\cos\frac{A}{2}}{AK} = \frac{bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}.$$

Двенадцатый способ

Проведем $L_1K \perp AC$ (рис. 7) и высоту BH_2. Имеем

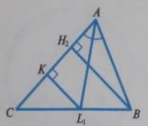

Рис. 7

$$KL_1 = l_a \sin\frac{A}{2}. \quad (1)$$

Поскольку треугольник CKL_1 подобен треугольнику CH_2B, то

$$\frac{KL_1}{h_b} = \frac{ab}{(b+c)\cdot a},$$

отсюда

$$KL_1 = \frac{b\cdot h_b}{b+c} = \frac{bc\sin A}{b+c}. \quad (2)$$

Сравним (1) и (2), получим

$$l_a \sin\frac{A}{2} = \frac{bc\sin A}{b+c}, \text{ отсюда } l_a = \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}.$$

Тринадцатый способ предлагается найти самостоятельно.

56. Дуэль на мясорубках

В январе 2005 года в газете «Математика» были опубликованы «Завдання олімпіади VII Всеукраїнського турніру юних математиків». Геометрическая задача, как говорится, «зацепила».

В треугольнике ABC проведены биссектрисы BL и AK. Известно, что KL — биссектриса угла AKC. Найти градусную меру угла BAC.

Решили предложить ее «олимпиадным бойцам» Русановского лицея. Достаточно быстро было получено первое решение.

Поскольку KL — биссектриса угла AKC (рис. 1), то

$$\frac{AL}{CL} = \frac{AK}{CK}. \quad (1)$$

Пусть a, b, c — длины сторон треугольника, а $\angle CAK = \alpha$. Тогда

$$CK = \frac{ab}{b+c};$$

$$AK = l_a = \frac{2bc}{b+c}\cos\alpha.$$

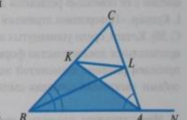

Рис. 1

Значит, выражение (1) можно записать, воспользовавшись свойством биссектрисы угла ABC:

$$\frac{c}{a} = \frac{2bc\cos\alpha\cdot(b+c)}{(b+c)\cdot ab},$$

или $2c\cos\alpha = c$, откуда $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, значит, $\angle A = 2\alpha = 120°$.

Вскоре было получено иное решение, наверняка то, на которое рассчитывали авторы задания: рассмотрим треугольник ABK: в нем BL — биссектриса внутреннего угла CBA, а KL — биссектриса внешнего угла CKA, значит, AC — биссектриса внешнего угла KAN и развернутый угол BAN состоит из трех равных углов, два из которых составляют угол A, т. е. $\angle A = 120°$.

После решения рисунок 1 стоило бы изменить, начертив угол BAC тупым. Но дело не в этом. Возник вопрос: какой способ решения лучше?

Приверженцы первого способа признавали, что он не столь изящен, как второй, но решение задачи было мгновенно и тут не возразить — все это видели.

Одни ученики считали применение формулы биссектрисы «тяжелым оружием», другие настаивали на эрудиции, знании формул. Противники первого способа упрекали в применении тригонометрии и даже «посягнули» на полномочия олимпиадного жюри: «А если бы задачу дали в восьмом классе?» Восьмиклассники не знают формулы

$$l_a = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}.$$

Спор разгорался. Весьма весомым аргументом был упрек в трудности воспользоваться свойством точки, в которой пересекаются биссектриса внутреннего и внешнего углов.

Думается, что спор возник из-за того, что теореме о пересечении внутренней и внешней биссектрис треугольника (в дальнейшем будем называть ее «теоремой о двух биссектрисах») не было уделено должного внимания, как, например, теореме о «трилистнике». Заметим, что именно с ее помощью решаются достаточно интересные задачи (см.: І. Кушнір. «Повернення втраченої геометрії». — Киев: Факт, 2000. — С. 30). Кстати, среди упомянутых задач есть задача — предмет спора и оригинальное доказательство формулы $S = R\cdot p_H$, а мы в заключении приведем решение знаменитой задачи Шебаршина (с другими способами уважаемый читатель сможет познакомиться в этой книге).

Итак, докажем, что если в треугольнике ABC угол A равен $120°$, то угол $L_2L_1L_3$ прямой (L_1, L_2, L_3 — точки пересечения биссектрис внутренних углов треугольника с соответственными сторонами). Поскольку $\angle BAC = 120°$, то $\angle L_1AB = \angle BAK$ (рис. 2), а значит, AL_3 принадлежит биссектрисе угла L_1AK, т. е. является биссектрисой внешнего угла при вершине A треугольника AL_1C. Пересечение биссектрис углов ACB и KAL_1 даст точку L_3, а значит, L_1L_3 — биссектриса угла AL_1B: $\angle 1 = \angle 2$. Аналогично, $\angle 3 = \angle 4$, а значит, $\angle 3 + \angle 1 = 90°$.

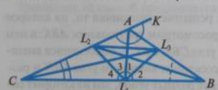

Рис. 2

Казалось, «спор» подошел к концу. И вдруг... вопрос?

Как решить обратную задачу: если $\angle L_2L_1L_3 = 90°$, то $\angle BAC = 120°$? Кажется, применить «теорему о двух биссектрисах» не удастся?! Может быть, применить первый способ? А может быть, обратная задача неверна? По крайней мере мне она не встречалась. Ответ на вопрос читатель может найти в книге «Треугольник и тетраэдр в задачах» (раздел «Биссектральный треугольник»). Дуэль за приоритет способа не может быть окончена за ненадобностью. Поэтому она и названа «дуэлью на мясорубках». Эту дуэль выиграет не тот, кто докажет, что его способ лучше, а тот, кто будет знать оба способа! И более того...

57. Самая популярная формула биссектрисы

Это формула

$$l_a^2 = bc - b_1c_1.$$

Здесь l_a — биссектриса AL_1, b и c — стороны AC и AB треугольника ABC, $b_1 = CL_1$, $c_1 = BL_1$.

Популярность формулы вполне доказуема — она в виде задачи была опубликована в уже упомянутом «Сборнике задач по геометрии, ч. I, планиметрия для 6—9 классов семилетней и средней школы», переиздававшемся десятки (!) раз.

Как указано в книге, ее тираж, например, в 1954 году составлял 1 500 000 экземпляров.

Гордо по сей день (задачник переиздается в Москве) носит она номер 9 в § 14:

Квадрат биссектрисы угла при вершине треугольника равен разности между произведением боковых сторон и произведением отрезков основания.

З. А. Скопец говорил, что это формула Лагранжа.

Правда, меня «волнует» иное: сколько учеников СССР могли решить эту задачу? А учителей? Разве что у них была книга «Собрание геометрических теоремъ и задачъ» Е. Пржевальского (Москва, 1901), где формула доказывалась с помощью теоремы Стюарта (III, № 100).

Хотелось бы знать, кто первый предложил суперэлегантный способ доказательства с помощью «вспомогательной окружности», который приведем как первый способ.

Рис. 1

Первый способ

Вокруг треугольника ABC опишем окружность (рис. 1). Продлим биссектрису AL_1 до пересечения с окружностью в точке W_1. Поскольку $\angle CAL_1 = \angle BAL_1$,

а $\angle ACB = \angle AW_1B$, то $\Delta ACL_1 \sim \Delta ABW_1$ и, значит,

$$\frac{AW_1}{AC} = \frac{AB}{AL_1},$$

$$\text{или } (AL_1 + L_1W_1)AL_1 = AC \cdot AB,$$

$$\text{или } AL_1^2 + AL_1 \cdot L_1W_1 = AC \cdot AB.$$

Учитывая, что

$$AL_1 \cdot L_1W_1 = CL_1 \cdot BL_1,$$

имеем

$$AL_1^2 = AC \cdot AB - CL_1 \cdot BL_1.$$

Второй способ

По теореме косинусов ($b_1 = CL_1$, $c_1 = BL_1$) (рис. 2)

$$b_1^2 = b^2 + l_a^2 - 2b \cdot l_a \cos\frac{A}{2};$$

$$c_1^2 = c^2 + l_a^2 - 2c \cdot l_a \cos\frac{A}{2},$$

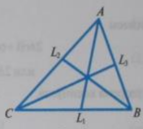

Рис. 2

откуда

$$\frac{b^2 + l_a^2 - b_1^2}{2b} = \frac{c^2 + l_a^2 - c_1^2}{2c},$$

или

$$l_a^2(b-c) = bc(b-c) - \left(cb_1^2 - c_1^2b\right).$$

Учитывая свойство биссектрисы внутреннего угла треугольника, имеем

$$\frac{b}{c} = \frac{b_1}{c_1}, \text{ или } bc_1 = b_1c.$$

Отсюда

$$cb_1^2 - c_1^2b = c_1b_1b - c_1b_1c = c_1b_1(b-c).$$

Значит,

$$l_a^2(b-c) = bc(b-c) - c_1b_1(b-c).$$

Пусть $b \neq c$, тогда $l_a^2 = bc - b_1c_1$. При $b = c$ формула очевидна.

Третий способ

Заметим, что

$$b_1c_1 = \frac{a^2bc}{(b+c)^2}.$$

Используем формулу

$$l_a = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}.$$

Имеем

$$\frac{4b^2c^2}{(b+c)^2} \cdot \cos^2\frac{A}{2} = bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2},$$

$$\text{или } \frac{4b^2c^2}{(b+c)^2} \cdot \cos^2\frac{A}{2} = bc\left(\frac{(b+c)^2 - a^2}{(b+c)^2}\right),$$

$$\text{или } \frac{4bc}{(b+c)^2} \cdot \cos^2\frac{A}{2} = \frac{(b+c)^2 - a^2}{(b+c)^2}.$$

Учитывая, что

$$\cos^2\frac{A}{2} = \frac{1+\cos A}{2},$$

имеем

$$2bc(1+\cos A) = b^2 + c^2 + 2bc - a^2,$$

$$\text{или } 2bc\cos A = b^2 + c^2 - a^2 \text{ —}$$

теорема косинусов.

Четвертый способ

Доказываемую формулу запишем в виде:

$$1 = \frac{bc}{l_a^2} - \frac{b_1c_1}{l_a^2}.$$

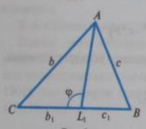

Рис. 3

Из ΔACL_1 (рис. 3):

$$\frac{b}{l_a} = \frac{\sin\varphi}{\sin C} \qquad (1)$$

(φ — угол AL_1C).

Из ΔABL_1:

$$\frac{c}{l_a} = \frac{\sin\varphi}{\sin B}. \qquad (2)$$

Из ΔACL_1:

$$\frac{b_1}{l_a} = \frac{\sin\frac{A}{2}}{\sin C}. \qquad (3)$$

Из ΔABL_2:

$$\frac{c_1}{l_a} = \frac{\sin\frac{A}{2}}{\sin B}. \qquad (4)$$

Учитывая (1)—(4), имеем

$$\frac{bc}{l_a^2} - \frac{b_1c_1}{l_a^2} = \frac{\sin^2\varphi}{\sin B\sin C} - \frac{\sin^2\frac{A}{2}}{\sin B\sin C} = \frac{1-\cos 2\varphi - 1 + \cos A}{2\sin B\sin C} =$$

$$= \frac{\cos A - \cos(2B+A)}{2\sin B\sin C} = \frac{2\sin B\sin C}{2\sin B\sin C} = 1.$$

Пятый способ

Обозначим φ — угол между биссектрисой l_a и высотой h_a. Заметим, что

$$\frac{h_a}{b} = \sin C; \qquad (1)$$

$$\frac{h_a}{c} = \sin B; \qquad (2)$$

$$\frac{a}{h_a} = \frac{\sin A}{\sin B\sin C}; \qquad (3)$$

$$\frac{1}{\cos^2\varphi} = \frac{1}{\sin B\sin C}. \qquad (4)$$

Доказываемую формулу разделим на h_a^2. Получим

$$\frac{l_a^2}{h_a^2} = \frac{bc}{h_a^2} - \frac{b_1c_1}{h_a^2},$$

$$\text{или } \frac{l_a^2}{h_a^2} = \frac{b}{h_a} \cdot \frac{c}{h_a} - \frac{b_1}{h_a} \cdot \frac{c_1}{h_a}.$$

Из формул (1), (2) и (3), примененных к треугольникам ABL_1 и ACL_1, имеем

$$\frac{1}{\cos^2\varphi} = \frac{1}{\sin C} \cdot \frac{1}{\sin B} - \frac{\sin^2\frac{A}{2}}{\sin B \cdot \sin C \sin\left(B+\frac{A}{2}\right)\sin\left(C+\frac{A}{2}\right)}.$$

Учитывая, что

$$\sin\left(\frac{A}{2}+B\right) = \sin\left(\frac{A}{2}+C\right),$$

имеем

$$\frac{1}{\cos^2\varphi}=\frac{1}{\sin B\cdot\sin C}-\frac{\sin^2\dfrac{A}{2}}{\sin B\sin C\sin^2\left(B+\dfrac{A}{2}\right)}=$$

$$=\frac{\sin^2\left(B+\dfrac{A}{2}\right)-\sin^2\dfrac{A}{2}}{\sin B\sin C\sin^2\left(B+\dfrac{A}{2}\right)}=$$

$$=\frac{2\sin B\sin(A+B)}{2\sin B\sin C\sin^2\left(B+\dfrac{A}{2}\right)}=\frac{1}{\sin^2\left(B+\dfrac{A}{2}\right)}.$$

Достаточно доказать, что

$$\cos^2\varphi=\sin^2\left(B+\frac{A}{2}\right).$$

Имеем

$$\cos^2\left(\frac{B-C}{2}\right)=\cos^2\left(\frac{180^\circ-2B-A}{2}\right)=\sin^2\left(B+\frac{A}{2}\right).$$

Шестой способ[1]

Лемма. В треугольнике ABC обозначим

$$AB-BL_1=m;\ AC+CL_1=n.$$

Докажем, что $AL_1=\sqrt{mn}$.

Доказательство

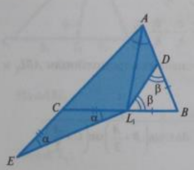

Рис. 4

На стороне AB (рис. 4) возьмем точку D так, что $BD=L_1B$ (AL_1 — биссектриса угла BAC). На прямой AC возьмем точку E так, что

$$L_1C=CE.$$

Докажем, что треугольник AL_1D подобен треугольнику AL_1E. Для этого докажем равенство углов AL_1D и CEL_1.

[1] Способ взят из книги И. Ф. Шарыгина «Задачник 9—11 класса» (Москва: Дрофа, 1997).

Обозначим

$$\angle CEL_1=\alpha,\ \angle DL_1B=\beta,\ \angle AL_1D=x.$$

Имеем: $\alpha=\frac{1}{2}C$ (из ΔECL_1), $\beta=\frac{180-B}{2}$. Далее,

$$x=\angle AL_1B-\beta=\left(180^\circ-\frac{A}{2}-B\right)-\frac{180^\circ-B}{2}=90^\circ-\frac{A}{2}-\frac{B}{2}.$$

$$\alpha=\frac{C}{2}=\frac{180^\circ-(B+A)}{2}=90^\circ-\frac{B}{2}-\frac{A}{2}.$$

Итак, $x=\alpha$. Поскольку $\angle CAL_1=\angle L_1AD$, то треугольники AL_1D и AL_1E подобны:

$$\frac{AL_1}{AE}=\frac{AD}{AL_1}. \tag{1}$$

Значит, $AL_1^2=mn$.

Перейдем к доказательству формулы

$$AL_1^2=AC\cdot AB-CL_1\cdot L_1B.$$

Из формулы (1):

$$AL_1^2=AD\cdot AE=(AB-BD)(AC+CE)=(AB-BL_1)(AC+CL_1)=$$

$$=AC\cdot AB-BL_1\cdot CL_1-(AC\cdot L_1B-AB\cdot CL_1)$$

(выражение в скобках равно нулю).

Седьмой способ

Докажем вначале теорему Стюарта:

Если отрезок $AX=d$ треугольника ABC делит сторону BC на отрезки $BX=m$ и $CX=n$, то

$$d^2a=b^2m+c^2n-amn.$$

Доказательство

Пусть AH_1 — высота треугольника ABC (рис. 5). Из треугольников BXA и AXC имеем

$$c^2=d^2+m^2+2mXH_1;$$
$$b^2=d^2+n^2-2nXH_1.$$

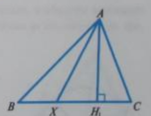

Рис. 5

Умножив члены первого равенства на n, а члены второго равенства на m и сложив их почленно, получим:

$$c^2n+b^2m=d^2(m+n)+mn(n+m),$$

14 - 6-1744

или

$$d^2a=b^2m+c^2n-amn. \tag{1}$$

Переходим к доказательству формулы биссектрисы.

Имеем

$$\frac{m}{a-m}=\frac{c}{b},\ \text{откуда}\ m=\frac{ac}{b+c},\ n=\frac{ab}{b+c}.$$

Подставив в (1), получим $l_a^2=bc-mn$.

Восьмой и девятый способы предлагались в разделе «Возникла связь времен».

Десятый способ предлагается найти самостоятельно.

58. Лучшая авторская задача, или 19 лет спустя

В 1987 году на XXVIII Международной математической олимпиаде от Советского Союза была предложена и принята жюри *моя задача*:

Биссектриса угла A остроугольного треугольника ABC пересекает сторону BC в точке L, а описанную окружность треугольника в точке N (отличной от A); K и M — основания перпендикуляров, опущенных из L на стороны AB и AC. Докажите, что четырехугольник $AKNM$ равновелик треугольнику ABC.

Для ее решения понадобилась удивительная формула

$$S=\frac{1}{2}AW_1\cdot MN, \tag{*}$$

где W_1 — точка пересечения биссектрисы угла BAC с описанной окружностью, M и N — проекции точки L_1 (основания биссектрисы AL_1) на стороны AC и AB.

За прошедшие годы задача неоднократно анализировалась. Формула (*) доказывалась разными способами и послужила причиной открытия новых зависимостей. Но сначала об истории создания этой замечательной формулы.

Работая над вписанной полуокружностью, я обратил внимание на отрезок F_1F_2, где F_1 и F_2 — точки касания ее со сторонами треугольника ABC (рис. 1). Ясно, что

$$F_1F_2=2R_a\cos\frac{A}{2},$$

где R_a — радиус полуокружности с центром L_1. Захотелось «связать» отрезок F_1F_2 с элементами треугольника ABC.

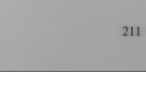

Рис. 1

14*

Поскольку $R_a = AL_1 \cdot \sin\frac{A}{2}$, то

$$F_1F_2 = 2l_a \sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} = l_a \sin A \qquad (1)$$

(l_a — биссектриса угла BAC, L_1 — точка пересечения биссектрисы угла BAC и стороны BC).

Соотношение (1) можно было бы получить сразу, описав окружность около четырехугольника $AF_1L_1F_2$ и применив соотношение $a = 2R\sin A$, но, может быть, тогда бы не было формулы (*). Приняв полученное выражение за промежуточное, я применил известную формулу

$$l_a = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}.$$

Тогда

$$F_1F_2 = \frac{2bc\sin A}{b+c}\cos\frac{A}{2} = \frac{S}{R\cos\frac{B-C}{2}}.$$

Итак, получилось «некрасивое» выражение

$$S = \frac{1}{2}F_1F_2 \cdot 2R\cos\frac{B-C}{2}.$$

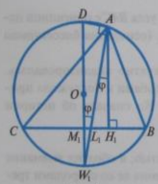

Рис. 2

Но $\frac{|B-C|}{2}$ — вершина угла между высотой AH_1 и биссектрисой AL_1. Середина дуги BC — точка W_1, W_1D — диаметр (рис. 2). Поскольку

$$\angle OW_1A = \angle W_1AH_1,$$

$$\text{то } 2R\cos\frac{B-C}{2} = AW_1$$

(из прямоугольного треугольника ADW_1). Итак, получена формула

$$S = \frac{1}{2}F_1F_2AW_1.$$

В дальнейшем формула принимает вид

$$S = \frac{1}{2}MN \cdot AW_1,$$

где M и N — проекции точки L_1 на стороны AC и AB.

Решил «обкатать» формулу на своих учениках. Они доказали ее с помощью теоремы Птолемея: применим эту теорему к четырехугольнику ABW_1C (рис. 3). Получим

$$b \cdot BW_1 + c \cdot CW_1 = a \cdot AW_1. \qquad (1^\circ)$$

Треугольники BW_1C и $F_2L_1F_1$ подобны (они равнобедренные и $\angle BW_1C = \angle F_2L_1F_1$):

$$\frac{BW_1}{F_1L_1} = \frac{a}{F_1F_2}, \text{ или } BW_1 = \frac{a \cdot F_1L_1}{F_1F_2}.$$

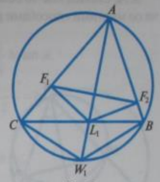

Рис. 3

Но $F_1L_1 = \frac{2S}{b+c}$ (докажите!), поэтому

$$CW_1 = BW_1 = \frac{a \cdot 2S}{(b+c)F_1F_2}. \qquad (2^\circ)$$

Подставим выражение (2°) в (1°). Имеем:

$$\frac{a \cdot 2S}{(b+c)F_1F_2} \cdot (b+c) = a \cdot AW_1,$$

откуда $S = \frac{1}{2}F_1F_2 \cdot AW_1$.

Созданная задача была послана в журнал «Квант», «зашифрованная» так:

Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает описанную окружность в точке W_1, а сторону BC — в точке L_1. Точки F_1, F_2 — проекции точки L_1 на стороны AC и AB, K_1 и K_2 — точки пересечения отрезков F_1W_1, F_2W_1 со стороной BC. Доказать, что

$$S_{F_1CK_1} + S_{F_2K_2B} = S_{K_1K_2W_1}.$$

Доказательство

Покажем, что ΔABC и четырехугольник $AF_1W_1F_2$ равновелики (рис. 4). Действительно,

$$S_{AF_2W_1F_1} = \frac{1}{2}F_1F_2 \cdot AW_1$$

$$\text{и } S = \frac{1}{2}F_1F_2 \cdot AW_1.$$

Рис. 4

Если учесть, что площадь пятиугольника $AF_1K_1K_2F_2$ — общая, то утверждение задачи доказано.

Приходится удивляться, как задача попала на Международную олимпиаду, как «Квант» решил ее послать, как жюри 42 стран выбрало именно ее, но истинная моя любовь к ней пришла значительно позже. Годы показали глубину и многообразие задачи как в виде формулы $S = \frac{1}{2}AW_1 \cdot MN$, так и в виде задачи о равновеликости.

3. А. Скопец как-то обмолвился, что красивая задача — это задача со многими способами решения. Покажем несколько из них.

Первый способ
(слева направо)

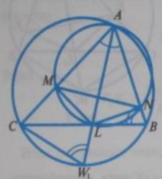

Рис. 5

Требуется доказать

$$S = \frac{1}{2}MN \cdot AW_1, \text{ или}$$

$$bc\sin A = MN \cdot AW_1. \qquad (1)$$

Опишем вокруг четырехугольника $AMLN$ окружность (рис. 5). Поскольку AL — диаметр, то

$$\sin A = \frac{MN}{AL}$$

и выражение (1) примет вид

$$bc \cdot \frac{MN}{AL} = MN \cdot AW_1, \text{ или } bc = AW_1 \cdot AL,$$

а это следует из подобия треугольников («Замечательное подобие») AW_1C и ABL.

Второй способ
(справа налево)

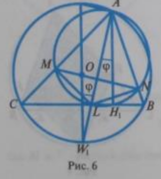

Рис. 6

Поскольку

$$MN = l_a \cdot \sin A \text{ и } \angle LAH_1 = \varphi \text{ (рис. 6),}$$

то

$$AW_1 \cdot MN = l_a \cdot \sin A \cdot AW_1 =$$
$$= l_a \sin A \cdot 2R\cos\varphi =$$
$$= \underbrace{l_a \cos\varphi}_{h_a} \cdot \underbrace{2R\sin A}_{a} =$$
$$= h_a \cdot a = 2S$$

Третий способ
(формулы «на марше»)

Имеем

$$MN = l_a \sin A,\ AW_1 = 2R\cos\frac{B-C}{2},$$

$$l_a = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}.$$

Требуется доказать, что

$$\frac{1}{2}l_a \sin A \cdot 2R\cos\frac{B-C}{2} = \frac{1}{2}bc\sin A,$$

$$\text{или } \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2} \cdot 2R\cos\frac{B-C}{2} = bc.$$

Итак, требуется доказать, что

$$4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2} = b+c,$$

а это очевидно, так как

$$b+c = 2R(\sin B + \sin C) = 4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}.$$

Четвертый способ

Требуется доказать:

$$bc\sin A = AW_1 \cdot l_a \sin A, \text{ или } AW_1 = \frac{bc}{l_a}.$$

Имеем

$$\frac{bc}{l_a} = \frac{bc(b+c)}{2bc \cdot \cos\frac{A}{2}} = \frac{b+c}{2\cos\frac{A}{2}}.$$

Итак, требуется доказать, что

$$AW_1 = \frac{b+c}{2\cos\frac{A}{2}},$$

или, что то же,

$$AT = \frac{b+c}{2} \qquad (1^\circ)$$

(T — проекция точки W_1 на AC (или AB)).

«Чисто геометрическое (!)» доказательство

Заметим, что в «Кванте» (1988. — № 4. — С. 30) было опубликовано решение задачи (см. «Первый способ»).

О существовании еще одного способа, причем без единой тригонометрической формулы сообщил журнал «Математика в школе» (1988. — № 1).

При обсуждении задач Международной олимпиады публиковалось иное решение задачи (может быть, из материалов жюри). Это «чисто геометрическое» решение, в основе которого с помощью вспомогательной окружности образуются две трапеции.

Итак, четырехугольник AMW_1N и треугольник ABC имеют общую часть — пятиугольник $AMEFN$ (рис. 7). Остается доказать, что

$$S_{FNB}+S_{MEC}=S_{EW_1F}.$$

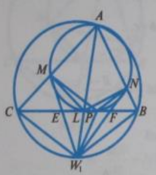

Рис. 7

Опишем вокруг четырехугольника $AMLN$ окружность. Она пересечет сторону BC и во второй точке (первая — точка L) — точке P. $\angle NPL$ опирается на дугу NL, а значит, $\angle NPL=180^\circ-\frac{A}{2}$, отсюда $\angle NPB=\frac{A}{2}$.

Рассмотрим угол CBW_1. Он опирается на дугу CW_1, а значит, тоже равен

$$\frac{1}{2}\cup CW=\frac{A}{2}.$$

Итак, $\angle NPB=\angle PBW_1$, следовательно, $PN\parallel W_1B$ и четырехугольник W_1PNB — трапеция. Аналогично доказывается, что четырехугольник MPW_1C — трапеция, а значит, $S_{PFW_1}=S_{BFN}$ и $S_{PW_1E}=S_{MEC}$, что доказывает утверждение задачи.

Ради куража! Еще один способ!

Рис. 8

Вспомним «Этюд о вписанном полукруге».

В треугольник ABC вписан полукруг так, что его диаметр принадлежит стороне BC, M и N — точки касания полуокружности со сторонами AC и AB треугольника (рис. 8). Доказать, что высота AH_1 принадлежит биссектрисе угла MH_1N.

Доказательство

Опишем окружность вокруг четырехугольника AML_1N. Ей будет принадлежать точка H_1 (так как $\angle AH_1L_1=90^\circ$). Поскольку $\cup AM=\cup AN$, то утверждение задачи доказано.

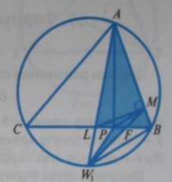

Рис. 9

Свяжем эту задачу с нашей: точка P является основанием высоты, опущенной из вершины A на сторону BC!

Значит, в треугольнике AL_1B отрезок MP (он же MH_1) антипараллелен стороне AL (рис. 9) и

$$\angle MPB=\angle BAL=\frac{A}{2}.$$

Итак, $\angle MPB=\angle PBW_1$, $MP\parallel BW_1$. Дальнейшие рассуждения аналогичны предыдущему способу.

Мы обошлись без вспомогательной окружности!

Применение формулы $S=\frac{1}{2}AW_1\cdot MN$

Задача 1. Дано: A, l_a, AW_1. Найти A_{ABC}.

Поскольку $MN=l_a\sin A$, то $S=\frac{1}{2}l_a\cdot\sin A\cdot AW_1$.

Задача 2. Построить четырехугольник, равновеликий данному треугольнику ABC.

Это четырехугольник ANW_1M.

Задача 3. Построить дельтоид, равновеликий треугольнику ABC.

Это четырехугольник ANW_1M.

Задача 4. Построить четырехугольник, равновеликий треугольнику ABC, чтобы в него можно было вписать круг.

Это четырехугольник ANW_1M.

Задача 5. Доказать, что $S\le R\cdot l_a$.

Доказательство

Имеем $S=\frac{1}{2}AW_1\cdot MN$. Поскольку

$$AW_1\le 2R,\ MN=l_a\sin A\le l_a,\ \text{то}\ S\le R\cdot l_a.$$

Можно показать, что $S\le R\cdot h_a$. Докажите!

59. Формула Леонарда Эйлера

Докажем различными способами формулу Леонарда Эйлера

$$OI^2=R^2-2Rr,$$

где O — центр описанной около треугольника ABC окружности, I — инцентр (центр вписанной в треугольник ABC окружности), R и r — радиусы этих окружностей.

Наверное, среди формул школьной геометрии «за страницами учебника» она занимает особое место: и по внешнему виду, и по применению, и по многим разнообразным, *содержательным* способам доказательства. Расположим их в некотором «хронологическом» порядке. Начнем со способа, близкого к доказательству самого Эйлера, «чисто геометрического».

Первый способ

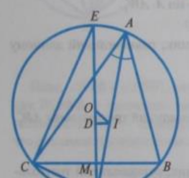

Рис. 1

Пусть W — середина дуги BC (рис. 1). WE — диаметр окружности, описанной вокруг треугольника ABC ($O\in WE$). Из инцентра I проведем перпендикуляр к диаметру WE ($D\in WE$).

Из треугольника WOI (по следствию из теоремы косинусов):

$$OI^2=OW^2+IW^2-2OW\cdot WD.$$

Но $WD=r+M_1W$ (M_1 — середина стороны BC). Поэтому:

$$OI^2=R^2+IW^2-2R\cdot\left(r+M_1W\right)=$$

$$=R^2-2R\cdot r+IW^2-2R\cdot M_1W.$$

Из прямоугольного треугольника WCE следует, что:

$$CW^2=2R\cdot M_1W.$$

Поскольку $CW=IW$ («теорема трилистника»), имеем:

$$OI^2=R^2-2Rr.$$

Второй способ

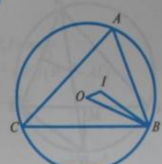

Рис. 2

Из треугольника OIB по теореме косинусов получим (рис. 2):

$$OI^2=OB^2+BI^2-2OB\cdot BI\cdot\cos\angle OBI.$$

Учитывая, что:

$$OB=R,\ BI=\frac{r}{\sin\frac{B}{2}},$$

$$\angle OBI=\frac{1}{2}B-\left(90^\circ-A\right),$$

имеем:

$$OI^2=R^2+\frac{r^2}{\sin^2\frac{B}{2}}-\frac{2Rr\cdot\sin\left(A+\frac{B}{2}\right)}{\sin\frac{B}{2}}=$$

$$=R^2-2Rr\left(\frac{\sin\left(A+\frac{B}{2}\right)}{\sin\frac{B}{2}}-\frac{4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{2R\sin^2\frac{B}{2}}\right)=$$

$$=R^2-2Rr\frac{\cos\frac{A-C}{2}-\cos\frac{A-C}{2}+\cos\frac{A+C}{2}}{\sin\frac{B}{2}}=$$

$$=R^2-2Rr\frac{\cos\frac{A+C}{2}}{\sin\frac{B}{2}}=R^2-2Rr.$$

Третий способ

Лемма. Справедливо равенство:

$$AI\cdot IW=2Rr.$$

Доказательство

Мы еще встретимся с этим равенством. Приведем один из способов его доказательства.

Из прямоугольного треугольника AKI (рис. 3):

$$AI=\frac{r}{\sin\frac{A}{2}},$$

Рис. 3

а из прямоугольного треугольника BM_1W (M_1 — середина стороны BC):

$$BW = \frac{BC}{2\cos\angle M_1BW} = \frac{2R\sin A}{2\cos\frac{A}{2}} = 2R\sin\frac{A}{2}.$$

И поскольку $BW = IW$, то

$$AI \cdot IW = \frac{r}{\sin\frac{A}{2}} \cdot 2R\sin\frac{A}{2} = 2Rr.$$

Перейдем к доказательству формулы Эйлера.

Через точки O и I проведем диаметр MN (рис. 4). Тогда

$$MI = R + OI,\ NI = R - OI.$$

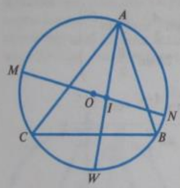

Рис. 4

По теореме о произведениях отрезков хорд:

$$MI \cdot IN = AI \cdot IW,$$

или $(R+OI)(R-OI) = AI \cdot IW$.

Вследствие леммы имеем:

$$R^2 - OI^2 = 2Rr,$$

следовательно, $OI^2 = R^2 - 2Rr$.

Четвертый способ

Рис. 5

Из ΔOAI (теорема косинусов):

$$OI^2 = R^2 + AI^2 - 2R \cdot AI\cos\varphi,$$

где φ — угол между высотой AH_1 и биссектрисой AL_1 (рис. 5).

Учитывая, что

$$2R\cos\varphi = AW_1,$$

имеем

$$OI^2 = R^2 + AI^2 - AI \cdot AW_1 = $$
$$= R^2 + AI^2 - AI(AI + IW_1) = $$
$$= R^2 + AI^2 - AI^2 - AI \cdot IW_1 = R^2 - 2Rr.$$

Пятый способ

Из ΔOW_1I:

$$OI^2 = R^2 + W_1I^2 - 2R \cdot W_1I\cos\varphi =$$
$$= R^2 + W_1I^2 - AW_1 \cdot W_1I = R^2 + W_1I^2 - W_1I(W_1I + AI) =$$
$$= R^2 - AI \cdot IW_1 = R^2 - 2Rr.$$

Шестой способ

Для произвольного треугольника ABC справедлива формула Гамильтона:

$$\overline{OH} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$$

(H — ортоцентр треугольника).

Рис. 6

Как известно, инцентр I треугольника ABC является ортоцентром треугольника $W_1W_2W_3$.

Запишем формулу Гамильтона для треугольника $W_1W_2W_3$:

$$\overline{OI} = \overline{OW_1} + \overline{OW_2} + \overline{OW_3}.$$

Тогда

$$\overline{OI}^2 = \left(\overline{OW_1} + \overline{OW_2} + \overline{OW_3}\right)^2$$

и учитывая, что точки W_i ($i = 1, 2, 3$) делят соответственные дуги пополам (рис. 6), имеем:

$$OI^2 = OW_1^2 + OW_2^2 + OW_3^2 + 2\overline{OW_1}\cdot\overline{OW_2} + 2\overline{OW_1}\cdot\overline{OW_3} + 2\overline{OW_2}\cdot\overline{OW_3} =$$
$$= 3R^2 + 2R^2\left(\cos(A+B) + \cos(B+C) + \cos(A+C)\right) =$$
$$= 3R^2 - 2R^2(\cos A + \cos B + \cos C) =$$
$$= 3R^2 - 2R^2\left(1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right) = 3R^2 - 2R(R+r) = R^2 - 2Rr.$$

Седьмой способ

Пусть K — точка касания вписанной в треугольник ABC окружности со стороной AC (рис. 7).

Имеем: $\overline{OI} = \overline{OA} + \overline{AK} + \overline{KI}$, откуда

$$\overline{OI}^2 = \left(\overline{OA} + \overline{AK} + \overline{KI}\right)^2 =$$
$$= OA^2 + AK^2 + KI^2 + 2\overline{OA}\cdot\overline{AK} + 2\overline{OA}\cdot\overline{KI} + 2\overline{AK}\cdot\overline{KI}.$$

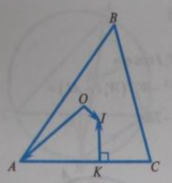

Рис. 7

Поскольку $\angle AKI = 90°$, то

$$\overline{AK} \cdot \overline{KI} = 0.$$

Из прямоугольного треугольника AKI:

$$AK = r\,\text{ctg}\,\frac{A}{2}.$$

Треугольник AOC равнобедренный, поэтому угол между векторами $\overline{OA}$ и $\overline{IK}$ вдвое меньше угла AOC, то есть равен углу B, а $\angle OAC = 90° - B$. Следовательно,

$$OI^2 = R^2 + r^2\text{ctg}^2\frac{A}{2} + r^2 - 2R\cdot r\,\text{ctg}\,\frac{A}{2}\cdot\sin B - 2Rr\cos B =$$
$$= R^2 - 2Rr + r^2 + 2Rr\left(1 - \text{ctg}\,\frac{A}{2}\sin B - \cos B\right) + r^2\text{ctg}^2\frac{A}{2}.$$

Поэтому для доказательства формулы Эйлера достаточно показать, что

$$2Rr\left(1 - \text{ctg}\,\frac{A}{2}\sin B - \cos B\right) + r^2\left(\text{ctg}^2\frac{A}{2} + 1\right) = 0,$$

то есть, что

$$2R\left(2\sin^2\frac{B}{2} - 2\text{ctg}\,\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\right) + \frac{r}{\sin^2\frac{A}{2}} = 0.$$

Имеем

$$2R\left(2\sin^2\frac{B}{2} - 2\text{ctg}\,\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\right) + \frac{r}{\sin^2\frac{A}{2}} =$$
$$= 4R\sin\frac{B}{2}\left(\sin\frac{B}{2} - \frac{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{A}{2}}\right) + \frac{r}{\sin^2\frac{A}{2}} =$$
$$= -4R\frac{\sin\frac{B}{2}}{\sin\frac{A}{2}}\cos\frac{A+B}{2} + \frac{r}{\sin^2\frac{A}{2}} = -4R\frac{\sin\frac{B}{2}}{\sin^2\frac{A}{2}}\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2} + \frac{r}{\sin^2\frac{A}{2}},$$

и осталось только воспользоваться формулой

$$r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

60. Замечательное равенство геометрии треугольника

Равенств в геометрии треугольника существует бесконечное множество. Звание «замечательного» надо заслужить. Речь пойдет о соотношении

$$AI \cdot IW_1 = 2Rr \qquad (*)$$

(I — инцентр, W_1 — точка пересечения биссектрисы внутреннего угла BAC треугольника ABC с описанной около этого треугольника окружностью, R, r — радиусы описанной около треугольника и вписанной в треугольник ABC окружностей).

Равенство для истинных любителей геометрии не в новинку, но почему-то ни в одной из знакомых мне книг оно не выделялось как необходимое и значительное. Постараюсь убедить читателя в важности этого равенства.

Способы доказательства

Первый способ

Из треугольника AIK (K — точка касания вписанной окружности со стороной AB) (рис. 1):

$$AI = \frac{r}{\sin\frac{A}{2}}.$$

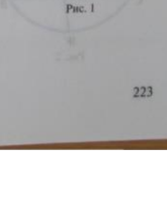

Рис. 1

Из треугольника AW_1C (применяя «трилистник»):

$$IW_1 = CW_1 = 2R\sin\frac{A}{2},$$

значит, $AI \cdot IW_1 = \dfrac{r \cdot 2R\sin\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}} = 2Rr$, что и требовалось.

Второй способ

Проведем диаметр W_1D.

$$AI = \frac{r}{\sin\frac{A}{2}};\ IW_1 = CW_1 = 2R\sin\frac{A}{2}\ (\text{из } \Delta CDW_1).$$

Тогда $AI \cdot IW_1 = 2Rr$.

Третий способ

Треугольник CDW_1 подобен треугольнику AIK:

$$\frac{DW_1}{AI} = \frac{CW_1}{IK},\ \text{или}\ \frac{2R}{AI} = \frac{IW_1}{r},$$

откуда $AI \cdot IW_1 = 2Rr$.

Четвертый способ

Из ΔAIC: $\dfrac{AI}{\sin\frac{C}{2}} = \dfrac{AC}{\sin\left(90°+\frac{B}{2}\right)}$, отсюда

$$AI = \frac{b\cdot\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{B}{2}} = \frac{2R\sin B\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{B}{2}},$$

значит,

$$AI = 4R\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\ \text{и}\ IW_1 = 2R\sin\frac{A}{2}.$$

$$AI\cdot IW_1 = 4R\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cdot 2R\sin\frac{A}{2}.$$

Учитывая, что $r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$, имеем $AI\cdot IW_1 = 2Rr$.

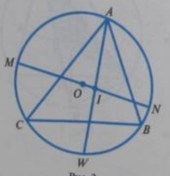

Рис. 2

Пятый способ

Через центры O и I (рис. 2) проведем хорду MN.

Имеем

$$AI\cdot IW_1 = MI\cdot NI = (R+OI)(R-OI) = R^2 - OI^2 = R^2 - \left(R^2 - 2Rr\right) = 2Rr.$$

Шестой способ

Учитывая формулу Эйлера, имеем (рис. 2)

$$2Rr = R^2 - OI^2 = (R-OI)(R+OI) = MN\cdot NI = AI\cdot IW.$$

Седьмой способ

В книге З. А. Скопеца и В. А. Жарова «Задачи и теоремы по геометрии (планиметрия)» (Москва, 1962) к доказательству дается указание: «Рассмотреть треугольник W_1OC и использовать теорему Стюарта, а затем воспользоваться теоремой Эйлера». Предлагаем этот способ читателям рассмотреть самостоятельно.

61. Формула Карно как зеркало геометрии треугольника

Лазарь Карно (1753—1823) видный деятель французской революции. Оставил ряд крупных работ по математике.

Формула Карно, о которой пойдет речь, имеет вид: в остроугольном треугольнике ABC

$$OM_1 + OM_2 + OM_3 = R + r \qquad (*)$$

(O — центр описанной окружности, M_1, M_2, M_3 — середины сторон BC, AC, AB, R, r — радиусы описанной и вписанной окружностей в ΔABC).

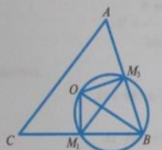

Рис. 1

Формула, широко известная в литературе, обычно доказывается с помощью теоремы Птолемея (рис. 1).

Имеем

$$OM_1\cdot\frac{c}{2} + OM_3\cdot\frac{a}{2} = R\cdot\frac{b}{2};$$

$$OM_1\cdot\frac{b}{2} + OM_2\cdot\frac{a}{2} = R\cdot\frac{c}{2};$$

$$OM_2\cdot\frac{c}{2} + OM_3\cdot\frac{b}{2} = R\cdot\frac{a}{2}.$$

Кроме этого,

$$S = r\cdot\frac{a+b+c}{2} = OM_1\cdot\frac{a}{2} + OM_2\cdot\frac{b}{2} + OM_3\cdot\frac{c}{2}.$$

Сложим все четыре равенства:

$$OM_1\left(\frac{a+b+c}{2}\right) + OM_2\left(\frac{a+b+c}{2}\right) + OM_3\left(\frac{a+b+c}{2}\right) = R\left(\frac{a+b+c}{2}\right) + r\left(\frac{a+b+c}{2}\right),$$

или $OM_1 + OM_2 + OM_3 = R + r$.

В книге «Трикутник і тетраедр в задачах» применена формула

$$r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

и доказательство становится достаточно коротким:

$$OM_1 + OM_2 + OM_3 = R\cos A + R\cos B + R\cos C = R(\cos A + \cos B + \cos C) = R\left(1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right) = R + 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = R + r.$$

Однако обращает на себя внимание малоизвестный «чисто геометрический» способ доказательства, видимо, именно тот, которым формулу доказывал сам Лазарь Карно. Приведем его, сделав несколько упрощений, в связи с некоторыми зависимостями, возведенными нами в ранг теорем.

Отойдем от обычно принятых обозначений. Пусть D и F — середины сторон AC и AB (рис. 2).

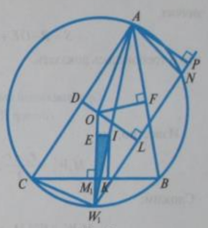

Рис. 2

Дополнительное построение: проведем через точку W_1 прямую, параллельную стороне AC. Она пересечет описанную около треугольника ABC окружность в точке N.

Проведем прямую OD, которая пересечет хорду W_1N в точке L. Из точки A опустим на прямую W_1N перпендикуляр AP. Из инцентра I опустим на прямые W_1O и BC перпендикуляры IE и IK.

Далее сумму $DO + OF$ заменим отрезком DL, доказав, что

$$OL = OF. \qquad (1)$$

Рассмотрим треугольники OW_1L и OAF. Они равны, так как

$$OW_1 = OA,\ \angle W_1OL = \angle ACB$$

(углы с взаимно перпендикулярными сторонами) и

$$\angle AOF = \angle ACB.$$

Тем самым равенство (1) доказано.

Заметим, что $DL = AP$. Докажем, что $AP = W_1E$. Для этого докажем равенство треугольников EIW_1 и PNA.

У них $W_1I = CW_1 = AN$ (теорема трилистника и вписанная трапеция ACW_1N), а $\angle EW_1I = \angle NAP$. Действительно,

$$\angle EW_1A = \frac{B-C}{2}$$

(известное соотношение: этот угол равен углу между высотой h_a и биссектрисой l_a);

$$\angle NAP = 180° - \angle ACW_1 - 90° = 90° - \angle ACW_1 = 90° - \left(C + \frac{A}{2}\right) = \frac{B-C}{2}.$$

Итак, $AP = W_1E$. Искомую сумму запишем как

$$S = OD + OF + OM_1 = \underbrace{OD+OL}_{DL} + OM_1 =$$

$$= DL + OM_1 = AP + OM_1 = W_1E + OM_1.$$

Итак, $S = W_1E + OM_1$. Но

$$W_1E = R - OE,\ OM_1 = r + OE,$$

значит,

$$S = R - OE + r + OE = R + r,$$

что и требовалось доказать.

Оригинальный вывод формулы Карно
(автор Ю. Билецкий)

Известно, что

$$M_1W_1 = \frac{r_a - r}{2},\ M_1W^A = \frac{r_b + r_c}{2}.$$

Сложим:

$$M_1W_1 + W^AM_1 = 2R = \frac{r_a + r_b + r_c - r}{2},$$

$$r + 4R = r_a + r_b + r_c. \qquad (*)$$

Докажем, что формула (*) есть аналог формулы Карно. Действительно,

$$R = OM_1 + M_1W_1 = OM_1 + \frac{r_a - r}{2}.$$

Аналогично,

$$R = OM_2 + \frac{r_b - r}{2},$$

$$R = OM_3 + \frac{r_c - r}{2}.$$

Сложим:

$$3R = OM_1 + OM_2 + OM_3 + \frac{r_a + r_b + r_c - 3r}{2}.$$

Учитывая формулу (*), получаем

$$R + r = OM_1 + OM_2 + OM_3.$$

62. Снова ортоцентрический треугольник

Докажем формулу площади треугольника: $S = R \cdot p_H$, где p_H — полупериметр треугольника $H_1H_2H_3$. О аналогии этой формулы с формулой $S = r \cdot p$ можно прочитать в главе «Штефан Банах и школьная геометрия» (И. Кушнир. «Возвращение утраченной геометрии». — Киев: Факт, 2004).

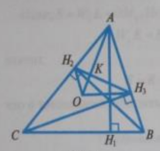

Рис. 1

Первый способ

Пусть в остроугольном треугольнике ABC точки H_1, H_2, H_3 — основания высот (рис. 1), O — центр описанной окружности, S_1 — площадь четырехугольника OH_2AH_3. Поскольку $OA \perp H_2H_3$, то площадь S_1 четырехугольника OH_2AH_3 равна:

$$S_1 = \frac{1}{2} OA \cdot H_2H_3.$$

Аналогично, площади S_2 и S_3 четырехугольников BH_3OH_1, CH_1OH_2 будут соответственно равны:

$$S_2 = \frac{1}{2} OB \cdot H_1H_3,\ S_3 = \frac{1}{2} OC \cdot H_1H_2.$$

Таким образом,

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = \frac{1}{2} R(H_2H_3 + H_1H_3 + H_1H_2) = R \cdot p_H.$$

Второй способ

Имеем

$$p_H = \frac{1}{2}(H_1H_2 + H_2H_3 + H_1H_3) =$$

$$= \frac{1}{2} R(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C) = \frac{1}{2} R \cdot 4 \sin A \sin B \sin C.$$

Поскольку $S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$, то $p_H = \dfrac{S}{R}$.

Третий способ

Лемма. Пусть M и N — проекции точки H_1 (основания высоты AH_1) на стороны AC и AB (рис. 2). Доказать, что $MN = \dfrac{S}{R}$.

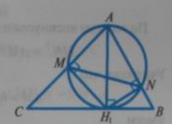

Рис. 2

Доказательство

Опишем окружность около четырехугольника ANH_1M. Тогда

$$MN = h_a \sin A = \frac{2S}{a} \sin A = \frac{2S \cdot \sin A}{2R \cdot \sin A} = \frac{S}{R}.$$

А теперь, собственно, третий способ. Произведем симметрию точки H_1 относительно сторон AB и AC. Получим точки L и K (рис. 3). Поскольку

$$\angle AH_2H_3 = \angle CH_2H_1 = \angle KH_2C,$$

то KL — прямая и $KL = 2p_H$,

$$\text{а } MN = \frac{1}{2} KL$$

(MN — средняя линия треугольника KH_1L), значит, $p_H = \dfrac{S}{R}$.

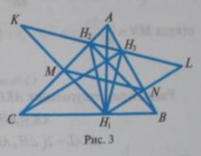

Рис. 3

Четвертый способ

Поскольку $\angle AMN = \angle B$ (рис. 4), то $\Delta AMN \sim \Delta ACB$, значит,

$$\frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB}, \text{ или}$$

$$MN = \frac{h_a \sin C}{c} \cdot a = \frac{a \cdot h_a}{\dfrac{c}{\sin C}} = \frac{ah_a}{2R} = \frac{S}{R}.$$

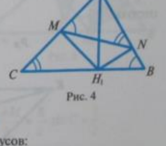

Рис. 4

Пятый способ

Из треугольника AMN по теореме синусов:

$$\frac{MN}{AM} = \frac{\sin A}{\sin C}, \text{ или}$$

$$MN = \frac{\sin A}{\sin C} \cdot AM = \frac{\sin A}{\sin C} \cdot h_a \cdot \sin C = h_a \sin A = \frac{2S \cdot \sin A}{a} = \frac{S}{R}.$$

Шестой способ

По теореме косинусов из ΔAMN:

$$MN^2 = AM^2 + AN^2 - 2AM \cdot AN \cdot \cos A.$$

Учитывая, что

$$AM = h_a \sin C, AN = h_a \sin B,$$

имеем

$$MN^2 = h_a^2 \sin^2 C + h_a^2 \sin^2 B - 2h_a^2 \sin C \sin B \cos A =$$

$$= \frac{h_a^2}{4R^2}\left(4R^2 \sin^2 C + 4R^2 \sin^2 B - 2 \cdot 2R \sin C \cdot 2R \sin B \cdot \cos A\right) =$$

$$= \frac{h_a^2}{4R^2}\left(c^2 + b^2 - 2c \cdot b \cdot \cos A\right) =$$

$$= \frac{h_a^2}{4R^2} \cdot a^2 = \frac{S^2}{R^2},$$

откуда $MN = \frac{S}{R}$.

Седьмой способ

Рассмотрим треугольник AKL (рис. 5). Имеем:

$$AK = AH_1 = AL = h_a,$$

$$\angle KAL = 2(\angle H_2AH_1 + \angle H_1AH_3) = 2A.$$

По теореме косинусов из ΔAKL

$$KL^2 = AK^2 + AL^2 - 2AK \cdot AL \cos 2A =$$

$$= 2h_a^2 - 2h_a^2 \cos 2A = 4h_a^2 \sin^2 A,$$

отсюда

$$p_H = \frac{1}{2} KL = h_a \sin A = \frac{S}{R}.$$

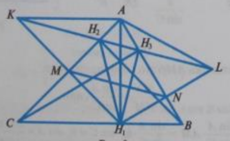

Рис. 5

Восьмой способ

Рассмотрим треугольник MNH_1 (рис. 5).

$$MN^2 = MH_1^2 + NH_1^2 - 2MH_1 \cdot NH_1 \cos \angle MH_1N.$$

Но

$$MH_1 = h_a \cos C, \ NH_1 = h_a \cos B, \ \angle MH_1N = 180° - A$$

(из четырехугольника ANH_1M). Имеем

$$MN^2 = h_a^2 \cos^2 C + h_a^2 \cos^2 B - 2h_a^2 \cos B \cos C \cos(180° - A) =$$

$$= h_a^2\left(\cos^2 C + \cos^2 B + 2\cos B \cos C \cdot \cos A\right).$$

Учитывая, что

$$2\cos A \cos B \cos C = \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C - 2,$$

имеем

$$MN^2 = h_a^2\left(\cos^2 C + \cos^2 B + \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C - 2\right) =$$

$$= h_a^2\left(1 + 1 + \sin^2 A - 2\right) = h_a^2 \sin^2 A = \frac{S^2}{R^2},$$

отсюда, $MN = \frac{S}{R}$.

Девятый способ

Докажем, что ломаная MON делит площадь остроугольного треугольника ABC пополам (рис. 6). Действительно,

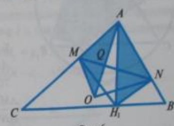

Рис. 6

$$S_{MAO} = \frac{1}{2} AM \cdot R \sin(90° - B),$$

$$S_{BAH_1} = \frac{1}{2} AB \cdot h_a \cdot \sin(90° - B).$$

Тогда

$$\frac{S_{MAO}}{S_{AH_1B}} = \frac{\frac{1}{2} AM \cdot R \cdot \sin(90° - B)}{\frac{1}{2} AB \cdot h_a \cdot \sin(90° - B)} = \frac{R}{c} \cdot \frac{AM}{h_a} = \frac{R}{c} \cdot \sin C = \frac{1}{2}.$$

Итак, $S_{AMO} = \frac{1}{2} S_{AH_1B}$. Аналогично, $S_{ANO} = \frac{1}{2} S_{AH_1C}$, откуда

$$S_{ANOM} = \frac{1}{2} S_{ABC}.$$

По доказанному $S = 2S_{ANOM}$. Но так как $AO \perp H_2H_3$, $MN \parallel H_2H_3$, следовательно, $AO \perp MN$, и $S_{ANOM} = \frac{1}{2} AO \cdot MN$. Тогда

$$S_{ABC} = AO \cdot MN = R \cdot p_H.$$

Десятый способ

Применим теорему Птолемея к четырехугольнику ANH_1M:

$$AH_1 \cdot MN = AN \cdot MH_1 + AM \cdot H_1N.$$

Учитывая, что

$$MH_1 = h_a \cos C, \ AM = h_a \sin C, \ NH_1 = h_a \cos B, \ AN = h_a \sin B,$$

имеем

$$MN = \frac{h_a^2 \cdot \sin B \cos C + h_a^2 \cos B \sin C}{h_a} = h_a \sin(B + C) = h_a \sin A = \frac{S}{R}.$$

Одиннадцатый способ

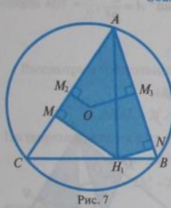

Рис. 7

Пусть O — центр окружности, описанной около треугольника ABC (рис. 7), M_2 и M_3 — середины сторон AC и AB. Опустим из точки O перпендикуляры на стороны OM_2 и OM_3. Получим четырехугольник AM_2OM_3.

Докажем гомотетичность четырехугольников AMH_1N и AM_3OM_2. Как и в случае с треугольником AH_2H_3, треугольник AMN подобен треугольнику ABC, причем

$$\frac{AM}{AN} = \frac{c}{b}. \qquad (1)$$

Ясно, что

$$\frac{AM_3}{AM_2} = \frac{c}{b}. \qquad (2)$$

Кроме того, $MH_1 \parallel M_2O$ и $OM_3 \parallel H_1N$, значит, рассматриваемые четырехугольники гомотетичны:

$$\frac{M_2M_3}{MN} = \frac{AO}{AH_1}, \text{ или}$$

$$MN = \frac{M_2M_3 \cdot AH_1}{R} = \frac{a \cdot AH_1}{2 \cdot R} = \frac{S}{R}.$$

63. Теоремы Чевы и Менелая

Эти теоремы применяются в первую очередь для доказательства пересечения прямых в одной точке и принадлежности трех точек одной прямой.

Теорема Чевы[1]

Пусть A_1, B_1, C_1 — три точки, лежащие соответственно на сторонах BC, CA, AB треугольника ABC или на их продолжениях. Для того, чтобы прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекались в одной точке или были между собой попарно параллельными, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{AC_1 \cdot BA_1 \cdot CB_1}{C_1B \cdot A_1C \cdot B_1A} = 1. \qquad (1)$$

Доказательство

Необходимость. Пусть отрезки AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке K (рис. 1). Проведем прямую l параллельно стороне BC и продлим отрезки BB_1 и CC_1 до пересечения с l в точках M и N. Обозначим

$$AC_1 = x_1, \ C_1B = x_2, \ BA_1 = y_1, \ A_1C = y_2,$$

$$CB_1 = z_1, \ B_1A = z_2, \ MA = a_1, \ AN = a_2.$$

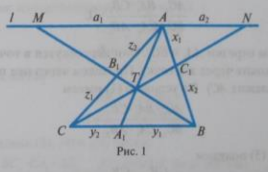

Рис. 1

[1] Джованни Чева (1648—1734) — итальянский геометр. В 1678 г. опубликовал работу «О прямых линиях», в которой доказал теорему, в дальнейшем получившую название «Теорема Чевы».

Треугольник MB_1A подобен треугольнику BB_1C. Поэтому

$$\frac{a_1}{y_1+y_2}=\frac{z_2}{z_1}, \text{ или}$$

$$\frac{a_1 z_1}{(y_1+y_2)z_2}=1. \qquad (2)$$

Треугольник NC_1A подобен треугольнику CC_1B:

$$\frac{a_2}{y_1+y_2}=\frac{x_1}{x_2}, \text{ или}$$

$$\frac{a_2 x_2}{(y_1+y_2)x_1}=1. \qquad (3)$$

Разделим выражение (2) на выражение (3), учитывая, что

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{y_1}{y_2}$$

(из подобия треугольников BKA_1 и MKA, CKA_1 и NKA). Получим

$$\frac{a_1 z_1 (y_1+y_2)x_1}{(y_1+y_2)a_2 x_2 z_2}=1, \text{ или}$$

$$\frac{y_1 x_1 z_1}{y_2 x_2 z_2}=1.$$

Случай, когда точки B_1 и C_1 лежат на продолжениях отрезков CA и BA, рассматриваются аналогично.

Достаточность. На сторонах ABC (рис. 1) даны точки A_1, B_1, C_1 так, что

$$\frac{AC_1\cdot BA_1\cdot CB_1}{BC_1\cdot CA_1\cdot AB_1}=1. \qquad (4)$$

Проведем отрезки AA_1 и CC_1. Они пересекутся в точке T. Пусть BB_1 не проходит через эту точку. Проведем через нее прямую BB_2 (B_2 принадлежит AC). По условию (1) имеем

$$\frac{AC_1\cdot BA_1\cdot CB_2}{BC_1\cdot CA_1\cdot AB_2}=1. \qquad (5)$$

Из (4) и (5) получим

$$\frac{CB_1}{AB_1}=\frac{CB_2}{AB_2}.$$

Итак, B_1 и B_2 совпадают, что и требовалось доказать.

Второй способ

Необходимость. Докажем, что если отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке T, то

$$\frac{AB_1\cdot CA_1\cdot BC_1}{B_1C\cdot A_1B\cdot C_1A}=1.$$

Обозначим (рис. 2)

$$\angle ATC_1=\angle A_1TC=\alpha,$$
$$\angle C_1TB=\angle CTB_1=\beta,$$
$$\angle A_1TB=\angle B_1TA=\gamma,$$
$$\angle AC_1T=\varphi.$$

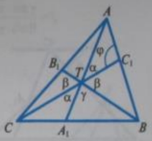

Рис. 2

Из ΔATC_1 по теореме синусов

$$\frac{AT}{\sin\varphi}=\frac{AC_1}{\sin\alpha},$$

откуда

$$AC_1\sin\varphi=AT\sin\alpha. \qquad (1)$$

Из ΔBTC_1 по теореме синусов:

$$\frac{BT}{\sin(180^\circ-\varphi)}=\frac{BC_1}{\sin\beta},$$

откуда

$$BC_1\sin\varphi=BT\sin\beta. \qquad (2)$$

Разделив равенство (2) на равенство (1), получим

$$\frac{BC_1}{AC_1}=\frac{BT\sin\beta}{AT\sin\alpha}. \qquad (3)$$

Аналогично: из треугольников BTA_1 и CTA_1:

$$\frac{CA_1}{A_1B}=\frac{CT\sin\alpha}{BT\sin\gamma}. \qquad (4)$$

Из ΔCTB_1 и ΔATB_1

$$\frac{AB_1}{B_1C}=\frac{AT\sin\gamma}{CT\sin\beta}. \qquad (5)$$

Перемножив (3), (4) и (5), имеем

$$\frac{BC_1\cdot CA_1\cdot AB_1}{AC_1\cdot A_1B\cdot B_1C}=\frac{BT\sin\beta\cdot CT\sin\alpha\cdot AT\sin\gamma}{AT\sin\alpha\cdot BT\sin\gamma\cdot CT\sin\beta}=1,$$

что и требовалось доказать.

Теорема Менелая

Пусть треугольник ABC пересечен прямой, не параллельной стороне AB и пересекающей две его стороны AC и BC соответственно в точках B_1 и A_1, а прямую AB в точке C_1. Тогда

$$\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=1. \qquad (1)$$

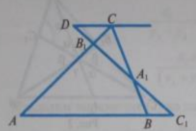

Рис. 3

Первый способ

Проведем прямую l, параллельную стороне AB и обозначим D точку пересечения B_1C_1 с прямой l (рис. 3). Треугольники B_1AC_1 и B_1CD подобны:

$$\frac{AC_1}{CD}=\frac{AB_1}{B_1C}.$$

Из подобия треугольников A_1BC_1 и A_1CD:

$$\frac{CD}{C_1B}=\frac{A_1C}{BA_1}.$$

Перемножая почленно эти два равенства, получим

$$\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{AB_1\cdot A_1C}{B_1C\cdot BA_1}, \text{ или } \frac{AC_1\cdot BA_1\cdot B_1C}{C_1B\cdot A_1C\cdot B_1A}=1.$$

Второй способ

Пусть прямая l пересекает сторону AB треугольника ABC в точке A_1 (рис. 4). Обозначим

$$\angle AC_1B_1=\angle A_1C_1B=\alpha,\ \angle CB_1A_1=\beta,\ \angle CA_1B_1=\gamma.$$

Из треугольника AC_1B_1 по теореме синусов

$$\frac{AC_1}{B_1A}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}. \qquad (1)$$

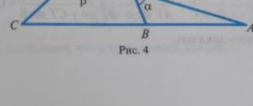

Рис. 4

Из треугольника CB_1A_1:

$$\frac{CB_1}{CA_1}=\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}. \qquad (2)$$

Перемножим равенства (1), (2) и аналогичное для треугольника BA_1C_1, получим:

$$\frac{AC_1\cdot BA_1\cdot CB_1}{B_1A\cdot C_1B\cdot CA_1}=\frac{\sin\beta\cdot\sin\alpha\cdot\sin\gamma}{\sin\alpha\cdot\sin\gamma\cdot\sin\beta}=1,$$

что и требовалось доказать.

И еще!

Докажем теорему Чевы с помощью теоремы Менелая:

По теореме Менелая для треугольника ABA_1 и прямой CC_1 (рис. 5):

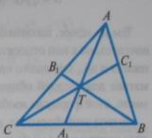

Рис. 5

$$\frac{AC_1\cdot BC\cdot A_1T}{C_1B\cdot CA_1\cdot TA}=1,$$

откуда

$$\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{CA_1\cdot TA}{BC\cdot A_1T}. \qquad (1)$$

По теореме Менелая для треугольника AA_1C и прямой BB_1:

$$\frac{CB_1\cdot AT\cdot A_1B}{B_1A\cdot TA_1\cdot BC}=1,$$

откуда

$$\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{TA_1\cdot BC}{AT\cdot A_1B}. \qquad (2)$$

Перемножив (1) и (2), получим

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{CA_1\cdot TA}{BC\cdot A_1T}\cdot\frac{TA_1\cdot BC}{AT\cdot A_1B},$$

откуда

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}\cdot\frac{A_1B}{CA_1}=1,$$

что и требовалось доказать.

64. Укрощение формулы Герона

Без формулы Герона «вход в геометрию воспрещен»:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},\ \ p=\frac{a+b+c}{2}.$$

Тем не менее, школьные учебники геометрии до сих пор не очень почтительно к ней относятся, а в учебнике «Геометрия 7—9» Л. С . Атанасяна и др., занявшего на Всесоюзном конкурсе учебников по математике для средней общеобразовательной школы в 1988 г. почетное место, этой формулы вообще нет.

Вывод этой формулы, как видно, десятилетия не входил в школьную программу, и учебник геометрии Киселева давал его в виде задачи с помощью теоремы о квадрате стороны, лежащей против острого угла. Тучи над формулой сгущались, и уже следующий учебник для школ «Элементарная геометрия» Н. А. Глаголева (Ч. I. — М., 1954) убрал эту формулу, заменив ее нахождением высот треугольника по трем сторонам. Формулу «возродил» учебник «Геометрия 6—8» под редакцией А. Н. Колмогорова, но, право, не знаю, что ждет ее после сокращения в школе часов математики. А ведь формула Герона — прекрасный полигон для алгебры и тригонометрии.

Рассмотрим в качестве упражнения: пусть S — площадь прямоугольного треугольника с катетами a и b. Тогда $S=\frac{1}{2}ab$.

Возникает вопрос: как из произведения двух буквенных сомножителей (a и b) получить привычную формулу Герона, состоящую из четырех сомножителей: $p(p-a)(p-b)(p-c)$?

Попробуем применить теорему Пифагора:

$$4S=a^2b^2=\left(c^2-a^2\right)\left(c^2-b^2\right)$$

(c — гипотенуза рассматриваемого прямоугольного треугольника).

Имеем

$$\left(c^2-a^2\right)\left(c^2-b^2\right)=(c-a)(c+a)(c-b)(c+b).$$

Очевидно, такое разложение на множители недостаточно быстро приведет к виду $p(p-a)(p-b)(p-c)$.

Применим «провоцирующий нуль»:

$$a^2+b^2-c^2=0.$$

Удачно! Получили упражнение по алгебре для седьмого класса: Выражение

$$4a^2b^2-\left(a^2+b^2-c^2\right)^2$$

разложить на линейные множители.

Решение

Имеем

$$4a^2b^2-\left(a^2+b^2-c^2\right)^2=$$

$$=\left(2ab-\left(a^2+b^2-c^2\right)\right)\cdot\left(2ab+\left(a^2+b^2-c^2\right)\right)=$$

$$=\left((a+b)^2-c^2\right)\left(c^2-(a-b)^2\right)=$$

$$=(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(a+c-b).$$

Формула Герона рядом!

Покажем, что любую (!) формулу площади треугольника можно представить в виде формулы Герона.

Первое представление (лемма)

Представим формулу

$$S=2R^2\sin A\sin B\sin C \qquad (1)$$

в виде формулы Герона. Имеем

$$p=\frac{a+b+c}{2}=\frac{2R}{2}\left(\sin A+\sin B+\sin C\right)=4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

Далее:

$$p-a=\frac{b+c-a}{2}=R(\sin B+\sin C-\sin A)=4R\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}.$$

Аналогично,

$$p-b=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2},\ p-c=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2},$$

значит,

$$p(p-a)(p-b)(p-c)=$$

$$=4^4R^4\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}=$$

$$=4R^4\sin^2 A\sin^2 B\sin^2 C,$$

цель достигнута.

Второе представление

Покажем, что формулу $S=R\cdot p_{H,}$ где R — радиус описанной окружности, p_H — полупериметр ортоцентрического треугольника $H_1H_2H_3$ можно представить в виде формулы Герона, или, что то же, в виде формулы (1), идентичность которой формуле Герона была доказана в первом представлении.

Имеем

$$p_H=\frac{1}{2}R(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)=2R^2\sin A\sin B\sin C\ —$$

получили формулу (1), а значит, и представление формулы Герона.

Третье представление

Покажем, что формулу $S=rp$, где r — радиус вписанной окружности, можно представить в виде формулы Герона.

Действительно,

$$r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2},$$

$$\text{а } p=R(\sin A+\sin B+\sin C)=4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2},$$

значит,

$$r\cdot p=2R\sin A\sin B\sin C\ —$$

по формуле (1) — получили представление формулы Герона.

Четвертое представление

Покажем, что формулу $S=\frac{abc}{4R}$ можно представить в виде формулы Герона.

Действительно,

$$\frac{abc}{4R}=\frac{8R^3\sin A\sin B\sin C}{4R}\ —$$

получили формулу (1).

Пятое представление

Покажем, что формулу

$$S=\frac{1}{2}AW_1\cdot M_1N_1,$$

где W_1 — точка пересечения биссектрисы угла BAC с описанной окружностью, M_1 и N_1 — проекции точки L_1 (точки пересечения биссектрисы AW_1 со стороной BC) на стороны AC и AB, можно представить в виде формулы Герона.

Применим формулу задачи Архимеда и формулу $M_1N_1=l_a\sin A$. Имеем

$$M_1W_1\cdot AW_1=\frac{b+c}{2}\cdot\frac{1}{\cos\frac{A}{2}}\cdot l_a\sin A.$$

А также $l_a=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$. Значит,

$$S=\frac{1}{2}\cdot\frac{b+c}{2}\cdot\frac{1}{\cos\frac{A}{2}}\cdot\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}\cdot\sin A=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 4R^2\sin B\sin C\sin A=2R^2\sin A\sin B\sin C.$$

Шестое представление

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C.$$

Действительно,

$$\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\cdot 4R^2\sin A\sin B\sin C=2R^2\sin A\sin B\sin C.$$

Седьмое представление

$$S=r_a(p-a).$$

Учитывая, что

$$r_a=p\operatorname{tg}\frac{A}{2},\ \text{а } \operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{r}{p-a},$$

то заданную формулу сводим к третьему представлению.

Восьмое представление

$$S=2\sqrt{S_W\cdot S_K}$$

(здесь S_W — площадь треугольника $W_1W_2W_3$, S_K — площадь треугольника $K_1K_2K_3$, где K_i — точки касания вписанной в треугольник ABC окружности).

Действительно, поскольку

$$S_W=R\cdot\frac{p}{2},\ \text{а } S_K=\frac{pr^2}{2R},$$

то задача сводится к третьему представлению.

Девятое представление

$$S=p^2\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}.$$

Поскольку

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{r}{p-a},\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{r}{p-b},\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{r}{p-c},$$

то

$$S=p^2\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=$$

$$=p^2\cdot\frac{r^3}{(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{p\cdot S^2\cdot r}{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{S^3}{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Итак,

$$S=\frac{S^3}{p(p-a)(p-b)(p-c)},\text{ или } S^2=p(p-a)(p-b)(p-c).$$

Десятое представление

$$S=r^2\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}.$$

Поскольку

$$\operatorname{ctg}\frac{A}{2}=\frac{p-a}{r},\ \operatorname{ctg}\frac{B}{2}=\frac{p-b}{r},\ \operatorname{ctg}\frac{C}{2}=\frac{p-c}{r},$$

то и это представление сводится к третьему представлению, а значит, и выражается формулой Герона.

Одиннадцатое представление

$$S=\frac{1}{4}\left(a^2-(b-c)^2\right)\operatorname{ctg}\frac{A}{2}.$$

Действительно,

$$a^2-(b-c)^2=(a-b+c)(a+b-c)=2(p-b)\cdot 2(p-c).$$

Учитывая, что

$$\operatorname{ctg}\frac{A}{2}=\frac{p-a}{r},$$

доказываемую формулу запишем в виде:

$$S=\frac{1}{4}\cdot 4(p-b)(p-c)(p-a)\cdot\frac{p}{S},\text{ или}$$

$$S^2=p(p-a)(p-b)(p-c).$$

Двенадцатое представление

$$S^2=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A}.$$

Легко сводится к четвертому представлению. И эта формула — тоже формула Герона.

Тринадцатое представление

$$\frac{d_1^2}{bc}+\frac{d_2^2}{ca}+\frac{d_3^2}{ab}=1,$$

где d_1, d_2, d_3 — расстояния инцентра I до вершин A, B и C треугольника ABC.

Каждую из дробей формулы домножим (и разделим) на $\frac{1}{2}\sin A$, $\frac{1}{2}\sin B$, $\frac{1}{2}\sin C$. Получим

$$AI^2\sin A+BI^2\sin B+CI^2\sin C=S$$

(S — площадь треугольника ABC).

Поскольку

$$AI=\frac{r}{\sin\frac{A}{2}},BI=\frac{r}{\sin\frac{B}{2}},CI=\frac{r}{\sin\frac{C}{2}},$$

имеем

$$r^2\left(\frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{\sin^2\frac{A}{2}}+\frac{2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}}{\sin^2\frac{B}{2}}+\frac{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{\sin^2\frac{C}{2}}\right)=2S,$$

$$\text{или } r^2\left(\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\right)=S.$$

Поскольку

$$\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2},$$

$$\operatorname{ctg}\frac{A}{2}=\frac{p-a}{r},\ \operatorname{ctg}\frac{B}{2}=\frac{p-b}{r},\ \operatorname{ctg}\frac{C}{2}=\frac{p-c}{r},$$

$$\text{то }\frac{r^2p(p-a)(p-b)(p-c)}{r^3\cdot p}=S,\text{ или } S^2=p(p-a)(p-b)(p-c).$$

Найдите еще одну формулу площади треугольника и докажите, что ее можно записать в виде формулы Герона. Самостоятельно.

65. Формула Архимеда

Имеется в виду формула $AK=\frac{b+c}{2}$, где K — проекция точки W_1 на сторону AC треугольника ABC (W_1 — точка пересечения биссектрисы угла BAC с описанной окружностью).

Формула, имеющая самостоятельный характер, пришла в геометрию в связи с теоремой Архимеда:

Треугольник ABC вписан в окружность. Точка D — середина дуги CAB, K — проекция точки D на сторону AC. Тогда $CK = AK + AB$.

Докажем формулу Архимеда.

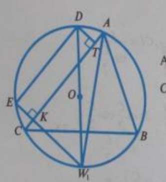

Рис. 1

Первый способ

Поскольку $CK = AT$, то по теореме Архимеда (рис. 1)

$$CT=AT+AB=\frac{b+c}{2}\text{ и } AK=CT=\frac{b+c}{2}.$$

Второй способ

Из треугольника AWK (рис. 2):

$$AK=AW\cdot\cos\frac{A}{2}.$$

Из треугольника ACW:

$$AW=2R\sin\left(C+\frac{A}{2}\right).$$

Значит,

$$AK=2R\sin\left(C+\frac{A}{2}\right)\cos\frac{A}{2}=$$

$$=R(\sin(C+A)+\sin C)=$$

$$=R\sin B+R\sin C=\frac{b+c}{2}.$$

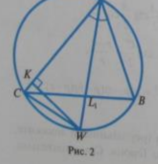

Рис. 2

Третий способ

Опустим из точки W перпендикуляр WT на прямую AB (рис. 3). Поскольку AW — биссектриса угла BAC, то $WT=WK$. Прямоугольные треугольники CWK и BTW равны, значит, $CK=BT$. Обозначим $CK=BT=t$. Заметим, что $AK=AT$. Значит, $b-t=c+t$, отсюда

$$t=\frac{b-c}{2}\text{ и } AK=b-t=\frac{b+c}{2}.$$

Рис. 3

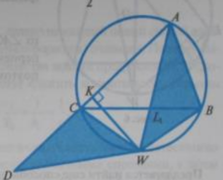

Рис. 4

Четвертый способ

На прямой AC (рис. 4) отложим отрезок CD, равный c. Тогда $AD=b+c$. Докажем, что $DW=WA$.

Действительно, $\Delta DWC=\Delta AWB$ ($CW=WB$; $AB=DC=c$ и $\angle DCW=180°-\angle ACW=\angle ABW$), значит, $DW=WA$, следовательно, отрезок WK будет медианой в треугольнике AWD и $AK=\frac{1}{2}AD=\frac{b+c}{2}$.

Пятый способ

Обозначим $AK=x, CW_1=W_1B=y$ (рис. 5). По теореме Птолемея для четырехугольника ABW_1C:

$$yb+yc=a\cdot AW_1,$$

отсюда $y=\frac{a\cdot AW_1}{b+c}$.

Поскольку треугольник AKW_1 подобен треугольнику CW_1M_1, то

$$\frac{y}{AW_1}=\frac{a}{2x};$$

$$x=\frac{a\cdot AW_1}{2y}=\frac{1}{2}\cdot\frac{a\cdot AW_1\cdot(b+c)}{a\cdot AW_1}=\frac{b+c}{2}.$$

Рис. 5

Шестой способ

Продолжим WK до пересечения с окружностью в точке E (рис. 6). Проведем $ED \parallel AC$. Трапеция $CEDA$ — равнобедренная ($\cup EC = \cup AD$), отрезок KA равен средней линии этой трапеции. Поскольку

$$EW \perp AC, \text{ а } DW \perp AB,$$

то $\angle ACB = \angle EWD$ (углы с взаимно перпендикулярными сторонами), поэтому

$$\angle EWD = C \text{ и } ED = AB,$$

$$\text{а } KA = \frac{ED + AC}{2} = \frac{c+b}{2}.$$

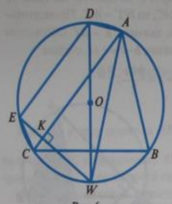

Рис. 6

Предлагается найти еще способы доказательства.

66. Попытка «управлять» импровизацией

Как можно было убедиться, далеко не каждый новый способ доказательства формулы (да и не только формулы) очевиден. Поэтому вызывают особый интерес доказательства заранее предрекаемые. Иллюстрацией подобного случая могут служить доказательства формулы

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}.$$

Смысл «управления» состоит в следующем. Вначале естественно выразить непосредственно высоту различными способами, а затем компоненты, входящие в соотношение $\frac{2S}{a}$ (или $\frac{2S}{b}$, или $\frac{2S}{c}$).

Первый способ

Поскольку

$$\frac{1}{h_a} = \frac{a}{2S}, \frac{1}{h_b} = \frac{b}{2S}, \frac{1}{h_c} = \frac{c}{2S},$$

$$\text{то } \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{a+b+c}{2S} = \frac{2p}{2S} = \frac{1}{r}.$$

Второй способ

Поскольку

$$h_a = b\sin C; h_b = a\sin C; h_c = b\sin A,$$

то

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{b\sin C} + \frac{1}{a\sin C} + \frac{1}{b\sin A} =$$

$$= \frac{1}{2R\sin B\sin C} + \frac{1}{2R\sin A\sin C} + \frac{1}{2R\sin B\sin A} =$$

$$= \frac{\sin A + \sin B + \sin C}{2R\sin A\sin B\sin C} = \frac{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{16R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} = \frac{1}{r}.$$

Третий способ

Поскольку $a = 2R\sin A, b = 2R\sin B, c = 2R\sin C$, то

$$\frac{1}{h_a} = \frac{a}{2S} = \frac{2R\sin A}{2S}, \frac{1}{h_b} = \frac{2R\sin B}{2S}, \frac{1}{h_c} = \frac{2R\sin C}{2S}$$

$$\text{и } \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{2R(\sin A + \sin B + \sin C)}{2S} = \frac{1}{r}$$

(см. второй способ).

Четвертый способ

Имеем $h_a = \frac{S}{R\sin A}$.

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{S} =$$

$$= \frac{4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{S\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}} = \frac{r}{S\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}} =$$

$$= \frac{r(p-a)(p-b)(p-c)}{Sr^3} = \frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{Spr^2} = \frac{S}{pr^2} = \frac{1}{r}.$$

Пятый способ

Поскольку $S = \frac{abc}{4R}, h_a = \frac{bc}{2R}$, значит,

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = 2R\left(\frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{ab}\right) =$$

$$= \frac{2R(a+b+c)}{abc} = \frac{2R(\sin A + \sin B + \sin C)}{2S} = \frac{1}{r}$$

(см. второй способ).

Шестой способ

Воспользуемся формулами

$$S = \frac{1}{2}AW_1 \cdot MN, \; MN = l_a \sin A,$$

$$AW_1 = \frac{b+c}{2\cos\frac{A}{2}}.$$

Имеем:

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{a}{AW_1 \cdot M_1N_1} + \frac{b}{BW_2 \cdot M_2N_2} + \frac{c}{CW_3 \cdot M_3N_3} =$$

$$= \frac{a}{\frac{b+c}{2\cos\frac{A}{2}} \cdot \frac{2bc}{b+c} \cdot \cos\frac{A}{2} \cdot \sin A} + \frac{b}{bc\sin B} + \frac{c}{ab\sin C} =$$

$$= \frac{2R}{bc} + \frac{2R}{ac} + \frac{2R}{ab} = \frac{2R(a+b+c)}{abc} = \frac{1}{r}.$$

Седьмой способ

Учтем, что $S = R \cdot p_H$ (p_H — полупериметр ортоцентрического треугольника $H_1H_2H_3$).

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{a}{2Rp_H} + \frac{b}{2Rp_H} + \frac{c}{2Rp_H} =$$

$$= \frac{p}{R(H_1H_2 + H_2H_3 + H_1H_3)} = \frac{2p}{R(a\cos A + b\cos B + c\cos C)}.$$

Учитывая, что $OM_1 = R\cos A, OM_2 = R\cos B, OM_3 = R\cos C$, имеем

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{2p}{aOM_1 + bOM_2 + cOM_3} = \frac{p}{S} = \frac{1}{r}.$$

67. Осторожно! Третий способ!

Речь пойдет о популярной формуле

$$S_{чет} = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \sin\varphi,$$

которая читается так: площадь четырехугольника равна полупроизведению диагоналей на синус угла между ними.

Первый способ

Доказательство первым способом общеизвестно: обозначим отрезки диагоналей (рис. 1)

$$AO = m; OC = n; OB = l; OD = t.$$

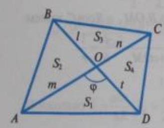

Рис. 1

Учитывая, что

$$\sin(180° - \varphi) = \sin\varphi,$$

имеем

$$S_1 = \frac{1}{2} mt \sin\varphi; S_2 = \frac{1}{2} ml \sin\varphi;$$

$$S_3 = \frac{1}{2} nl \sin\varphi; S_4 = \frac{1}{2} nt \sin\varphi.$$

Поскольку

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4,$$

то

$$S = \frac{1}{2}\sin\varphi(mt + ml + nl + nt) = \frac{1}{2}\sin\varphi\big(m(t+l) + n(t+l)\big) =$$

$$= \frac{1}{2}\sin\varphi(t+l)(m+n) = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \sin\varphi.$$

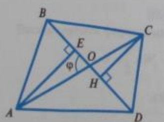

Рис. 2

Второй способ

Очевидно, что (рис. 2)

$$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD}.$$

Пусть AE и CH высоты треугольников ABD и BCD.

$$S = \frac{1}{2} BD \cdot AE + \frac{1}{2} BD \cdot CH = \frac{1}{2} BD(AO\sin\varphi + OC\sin\varphi) =$$

$$= \frac{1}{2} BD\sin\varphi(AO + OC) = \frac{1}{2} BD \cdot AC \cdot \sin\varphi.$$

Третий способ

Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник (рис. 3). Вокруг этого четырехугольника опишем параллелограмм $KLET$. Его площадь вдвое больше четырехугольника $ABCD$, а значит,

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} S_{KLET} =$$

$$= \frac{1}{2} LK \cdot KT \cdot \sin\varphi =$$

$$= \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin\varphi.$$

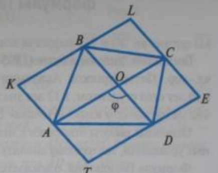

Рис. 3

Однако! Такое доказательство верно только *для выпуклого четырехугольника*.

Докажем, что формула верна и для невыпуклого четырехугольника.

Четвертый способ

Пусть $ABCD$ — данный невыпуклый четырехугольник с диагоналями BD и AC (рис. 4). Имеем

$$S_{BDC} = \frac{1}{2} CH \cdot BD,\ S_{ABD} = \frac{1}{2} AE \cdot BD,$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} BD(CH + AE) =$$

$$= \frac{1}{2} BD(CO\sin\varphi + AO\sin\varphi) =$$

$$= \frac{1}{2} BD\sin\varphi(CO + AO) =$$

$$= \frac{1}{2} AC \cdot BD\sin\varphi,$$

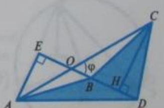

Рис. 4

что и требовалось доказать.

68. Пять способов доказательства формулы Гамильтона

Гамильтон Уильям Роуан (1805—1865) ирландский математик, чл.-кор. Петербургской Академии наук, в три года умел читать, в 10 лет стал студентом, в 12 лет знал 12 языков. В этом возрасте изучил на латинском языке «Начала» Евклида.

Основные работы относятся к механике и теории дифференциальных уравнений, векторному анализу. Гамильтон ввел термин «вектор».

Формула Гамильтона, о доказательстве которой пойдет речь, широко известна тем, кто увлекается векторами.

Более подробно о ней читатель может ознакомиться в книге автора «Координатный и векторный методы решения задач» (Киев: Астарта, 1996).

Пять способов доказательства знаменитой формулы публикуются впервые.

Формула Гамильтона имеет вид

$$\overline{OH} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}, \tag{1}$$

где O — центр окружности, описанной около треугольника ABC, H — точка пересечения высот треугольника (ортоцентр).

Докажем формулу разными способами.

Первый способ

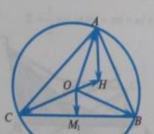

Рис. 1

Имеем (рис. 1):

$$\overline{OH} = \overline{OA} + \overline{AH}$$

Поскольку

$$\overline{AH} = 2\overline{OM_1}$$

(докажите!), а

$$2\overline{OM_1} = \overline{OB} + \overline{OC},$$

то

$$\overline{OH} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}.$$

Второй способ

$$\overline{OH} = \overline{OA} + \overline{AH}.$$

Докажем, что

$$\overline{AH} = \overline{OB} + \overline{OC}.$$

Для этого разложим вектор $\overline{AH}$ по векторам $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$.

$$\overline{AH} = \alpha\overline{OB} + \beta\overline{OC}. \quad (1)$$

Рис. 2

Сделаем параллельный перенос векторов $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$ на вектор $\overline{OA}$ (рис. 2). Проведя $HE \| OC$ и $HD \| OB$, получим ромб $AEHD$:

$$\overline{AH} = \overline{AE} + \overline{AD}.$$

Покажем, что $\overline{AE} = \overline{OB}$. Пусть диагонали ромба пересекаются в точке N. Поскольку $\angle ANE = 90°$ и $\angle NAE = \angle M_1OB$ и $OM_1 = AN$ (M_1 — середина стороны BC), то треугольники ANE и OM_1B равны, значит, $\overline{AE} = \overline{OB}$. Аналогично доказывается, что $\overline{AD} = \overline{OC}$. Итак,

$$\overline{AH} = \overline{OB} + \overline{OC}, \text{ окончательно } \overline{OH} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}.$$

Третий способ

$$\left|\overline{OB} + \overline{OC}\right| = \sqrt{\left(\overline{OB} + \overline{OC}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{R^2 + R^2 + 2R^2\cos 2A} = \sqrt{2R^2(1 + \cos 2A)} = 2R|\cos A| = \left|\overline{AH}\right|$$

(воспользовались формулой $\left|\overline{AH}\right| = 2R|\cos A|$).

Итак, $\left|\overline{OB} + \overline{OC}\right| = \left|\overline{AH}\right|$. Но сумма $\overline{OB} + \overline{OC}$ есть вектор $2\overline{OM_1}$, коллинеарный и сонаправленный с $\overline{AH}$, поэтому $\overline{OB} + \overline{OC} = \overline{AH}$. Поскольку

$$\overline{AH} = \overline{OH} - \overline{OA}, \text{ то } \overline{OB} + \overline{OC} = \overline{OH} - \overline{OA},$$

значит, $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \overline{OH}$.

Четвертый способ

Из условия следует, что $\overline{AH} \cdot \overline{BC} = 0$, или

$$\left(\overline{OH} - \overline{OA}\right)\left(\overline{OC} - \overline{OB}\right) = 0. \tag{1}$$

Поскольку

$$\overline{OB}^2 = \overline{OC}^2, \text{ то } \overline{OB}^2 - \overline{OC}^2 = 0 \text{ или}$$

$$\left(\overline{OC} + \overline{OB}\right)\left(\overline{OC} - \overline{OB}\right) = 0. \tag{2}$$

Вычтем равенства (1) и (2) почленно:

$$\left(\overline{OC}-\overline{OB}\right)\left(\overline{OH}-\overline{OA}-\overline{OB}-\overline{OC}\right)=0. \qquad (3)$$

Аналогично, из условий $\overline{BH}\cdot\overline{CA}=0, \overline{OC}^2=\overline{OA}^2$ следует равенство

$$\left(\overline{OA}-\overline{OC}\right)\left(\overline{OH}-\overline{OA}-\overline{OB}-\overline{OC}\right)=0. \qquad (4)$$

Векторные равенства (3) и (4) запишем так:

$$\overline{BC}\left(\overline{OH}-\overline{OA}-\overline{OB}-\overline{OC}\right)=0,$$

$$\overline{CA}\left(\overline{OH}-\overline{OA}-\overline{OB}-\overline{OC}\right)=0,$$

причем $\overline{BC}\neq\overline{0}, \overline{CA}\neq\overline{0}$.

Если допустить, что $\overline{OH}-\overline{OA}-\overline{OB}-\overline{OC}\neq\overline{0}$, то из полученных соотношений следует, что этот вектор перпендикулярен каждому из векторов $\overline{BC}$ и $\overline{CA}$, что невозможно. Поэтому $\overline{OH}=\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}$.

Пятый способ

Воспользуемся свойством точки D, симметричной точке H относительно середины BC (рис. 3). Предлагаем доказать самостоятельно, что эта точка диаметрально противоположна точке A.

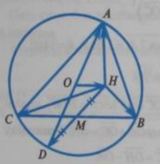

Рис. 3

Итак,

$$\overline{HD}=\overline{HC}+\overline{HB},\ \overline{HA}=\overline{HO}+\overline{OA}.$$

Поскольку $AO=OD$, то

$$\overline{HO}=\frac{1}{2}\left(\overline{HA}+\overline{HD}\right),$$

$$\overline{HO}=\frac{1}{2}\left(3\overline{HO}+\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}\right),$$

откуда $\overline{OH}=\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}$.

69. Формулы для двух перпендикулярных медиан

Давным-давно пара перпендикулярных медиан (m_a и m_b) была задействована в задаче:

Если две медианы перпендикулярны ($m_a \perp m_b$), то

$$a^2+b^2=5c^2$$

(a, b, c — стороны треугольника ABC).

Она, эта задача, обошла много задачников и даже попала в задачник под редакцией М. И. Сканави. Как вдруг оказалось, что у нее есть... дети: если медиана m_a перпендикулярна медиане m_b, то

$$2(\operatorname{ctg} A+\operatorname{ctg} B)=\operatorname{ctg} C.$$

Доказать. Да не одним способом! И доказали!

Первый способ

Равенство $a^2+b^2=5c^2$, запишем, применив теорему косинусов:

$$b^2+c^2-2bc\cos A+a^2+c^2-2ac\cos B=a^2+b^2-2ab\cos C+4c^2,$$

$$\text{или } -2bc\cos A-2ac\cos B=-2ab\cos C+2c^2,$$

$$\text{или } bc\cos A+ac\cos B=ab\cos C-c^2.$$

Разделим на $2S$ (S — площадь треугольника ABC). Имеем

$$\frac{bc\cos A}{bc\sin A}+\frac{ac\cos B}{ac\sin B}=\frac{ab\cos C}{ab\sin C}-\frac{c^2}{2S}.$$

Получим

$$\operatorname{ctg} A+\operatorname{ctg} B=\operatorname{ctg} C-\frac{c^2}{c\cdot h_c}.$$

Но $c=h_c(\operatorname{ctg} B+\operatorname{ctg} A)$. Имеем

$$\operatorname{ctg} A+\operatorname{ctg} B=\operatorname{ctg} C-\frac{h_c(\operatorname{ctg} B+\operatorname{ctg} A)}{h_c},$$

отсюда $2(\operatorname{ctg} A+\operatorname{ctg} B)=\operatorname{ctg} C$.

17 - 6-1744

Второй способ

Имеем

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C,$$

отсюда $2ab\cos C=a^2+b^2-c^2$. По условию

$$4c^2=a^2+b^2-c^2, \text{ или } 2c^2=ab\cos C.$$

Значит,

$$4R^2\cdot 2\sin^2 C=4R^2\cdot\sin A\sin B\cos C, \text{ или}$$

$$\frac{\cos C}{\sin C}=\frac{2\sin C}{\sin A\sin B}=\frac{2\sin(A+B)}{\sin A\sin B}=$$

$$=\frac{2(\sin A\cos B+\cos A\sin B)}{\sin A\sin B}=2\left(\frac{\cos B}{\sin B}+\frac{\cos A}{\sin A}\right),$$

или $\operatorname{ctg} C=2(\operatorname{ctg} A+\operatorname{ctg} B)$.

Третий способ

Имеем

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A, \text{ или } a^2=b^2+c^2-4S\operatorname{ctg} A.$$

Отсюда

$$\operatorname{ctg} A=\frac{b^2+c^2-a^2}{4S}.$$

Аналогично,

$$\operatorname{ctg} B=\frac{a^2+c^2-b^2}{4S}, \operatorname{ctg} C=\frac{a^2+b^2-c^2}{4S}.$$

Тогда

$$2(\operatorname{ctg} B+\operatorname{ctg} C)=2\left(\frac{a^2+c^2-b^2+a^2+b^2-c^2}{4S}\right)=\frac{2\cdot 2a^2}{4S}=\frac{4a^2}{4S}.$$

Но

$$\operatorname{ctg} A=\frac{b^2+c^2-a^2}{4S}=\frac{4a^2}{4S}=2(\operatorname{ctg} B+\operatorname{ctg} C).$$

Глава VII. Геометрические неравенства

70. Самое знаменитое неравенство

Речь идет о неравенстве

$$R\geq 2r$$

(R и r — соответственно радиус описанной и вписанной окружности в треугольник ABC).

Думаю, что в школьную «олимпиадную» геометрию это неравенство пришло после выхода книги Д. О. Шклярского, Н. Н. Ченцова, И. М. Яглома «Избранные задачи и теоремы элементарной математики» (Москва: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1952).

Поэтому ***первым способом*** доказательства будем считать способ, приведенный в книге.

Итак, пусть γ_1 и γ_2 — соответственно вписанная и описанная окружности треугольника ABC (рис. 1).

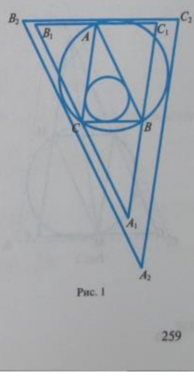

Рис. 1

Далее построим «удвоенный» треугольник $A_1B_1C_1$. Его стороны параллельны сторонам треугольника ABC и проходят через вершины треугольника ABC.

Проведем касательные к окружности γ_2, параллельные сторонам треугольника $A_1B_1C_1$. Эти касательные определят новый треугольник $A_2B_2C_2$.

Треугольники $A_1B_1C_1$ и ABC подобны, $k=2$ — коэффициент подобия.

17*

Поскольку треугольник $A_1B_1C_1$ лежит внутри треугольника $A_2B_2C_2$, то радиус R' окружности, вписанной в треугольник $A_1B_1C_1$, не больше радиуса R окружности γ_2, вписанной в треугольник $A_2B_2C_2$, т. е. $R' \le R$.

Поскольку

$$k = 2, \text{ то } R' = 2r.$$

Значит, $2r \le R$.

Равенство достигается только в том случае, когда треугольник ABC правильный.

Второй способ

Второй способ предлагает В. В. Прасолов во второй части книги «Задачи по планиметрии»: он аналогичен первому способу (В. В. Прасолов. «Задачи по планиметрии». — Ч. 2. — Москва: Наука, 1991).

Пусть M_1, M_2, M_3 — середины сторон треугольника ABC (рис. 2). При гомотетии с центром в точке пересечения медиан треугольника ABC и коэффициентом гомотетии $\frac{1}{2}$ описанная окружность γ треугольника ABC переходит в описанную окружность γ_1 треугольника $M_1M_2M_3$.

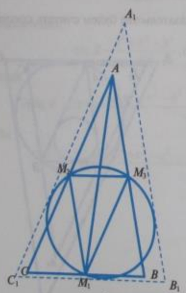

Рис. 2

Так как окружность γ_1 пересекает все стороны треугольника ABC, то можно построить треугольник $A_1B_1C_1$ со сторонами, параллельными сторонам треугольника ABC, для которого окружность γ_1 будет вписанной окружностью.

Пусть r и r_1 — радиусы окружностей, вписанных в треугольники ABC и $A_1B_1C_1$; R и R_M — радиусы окружностей γ и γ_1. Ясно, что

$$r \le r_1 = R_M = \frac{1}{2}R.$$

Значит,

$$R \ge 2r.$$

Третий способ

В треугольнике ABC построим окружность девяти точек. Как известно, ее радиус равен $\frac{R}{2}$. Проведя касательные к ней, параллельные сторонам треугольника ABC, получим треугольник, подобный треугольнику ABC, для которого эта окружность будет вписанной. Следовательно, $\frac{R}{2} \ge r$.

Четвертый способ

Этот способ дается без комментариев — они излишни.

По формуле Эйлера

$$OI^2 = R^2 - 2Rr.$$

Значит, $R^2 - 2Rr \ge 0$, или $R \ge 2Rr$.

Пятый способ

Поскольку

$$r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}, \text{ а } \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \le \frac{1}{8},$$

то $R \ge 2r$.

Шестой способ

Докажем неравенство

$$9r \le h_a + h_b + h_c \le \frac{9}{2}R.$$

Действительно,

$$(h_a + h_b + h_c)\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right) \ge 9$$

(доказывается с помощью неравенства Коши для трех положительных чисел). Но

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{a}{2S} + \frac{b}{2S} + \frac{c}{2S} = \frac{2p}{2S} = \frac{1}{r}.$$

Таким образом,

$$h_a + h_b + h_c \ge 9r.$$

Докажем, что

$$m_a + m_b + m_c \le \frac{9}{2}R.$$

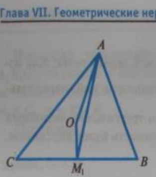

Рис. 3

Пусть M_1 — середина стороны BC остроугольного треугольника ABC (рис. 3). Тогда

$$m_a \le OM_1 + R.$$

Но $OM_1 = \frac{1}{2}AH$ (H — ортоцентр треугольника ABC) и

$$AH = 2R\cos A.$$

Значит,

$$m_a + m_b + m_c \le R(\cos A + \cos B + \cos C) + 3R.$$

Поскольку

$$\cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2} \text{ (докажите!)},$$

$$\text{то } m_a + m_b + m_c \le R\cdot\frac{3}{2} + 3R = \frac{9}{2}R.$$

Но $h_a + h_b + h_c \le m_a + m_b + m_c$. Значит,

$$9r \le h_a + h_b + h_c \le \frac{9}{2}R, \text{ или } R \ge 2r.$$

Седьмой способ

(автор способа — В. А. Ясинский)

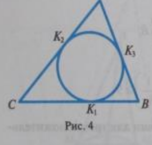

Рис. 4

Пусть окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон треугольника в точках K_1, K_2, K_3 (рис. 4).

Обозначим $AK_3 = x, BK_1 = y, CK_2 = z$. Ясно, что

$$x = \frac{-a+b+c}{2};\ y = \frac{a-b+c}{2};\ z = \frac{a+b-c}{2}$$

(a, b, c — стороны BC, AC, AB). Отсюда следует, что $a = y + z$; $b = z + x$; $c = x + y$. Полупериметр $p = x + y + z$, площадь треугольника

$$S = \sqrt{xyz(x+y+z)};$$

радиус описанной окружности $R = \frac{1}{4}\cdot\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{\sqrt{xyz(x+y+z)}}$; радиус вписанной окружности $r = \frac{\sqrt{xyz}}{\sqrt{x+y+z}}$.

Неравенство $R \ge 2r$ эквивалентно неравенству

$$R = \frac{1}{4}\cdot\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{\sqrt{xyz(x+y+z)}} \ge 2\cdot\frac{\sqrt{xyz}}{\sqrt{x+y+z}},$$

которое в свою очередь эквивалентно неравенству

$$(x+y)(y+z)(z+x) \ge 8xyz,$$

где x, y, z — положительные числа. Неравенство доказывается с помощью неравенства Коши: $x + y \ge 2\sqrt{xy}$.

Восьмой способ

Неравенство $R \ge 2r$ запишем в виде:

$$\frac{S}{p_H} \ge \frac{2S}{p}, \qquad \frac{p}{2} \ge p_H \tag{1}$$

(p_H — полупериметр ортоцентрического треугольника).

Последнее неравенство очевидно, так как $\frac{p}{2}$ — это полупериметр треугольника $M_1M_2M_3$. Поскольку из всех треугольников, вписанных в данный остроугольный треугольник, ортоцентрический треугольник имеет наименьший периметр, то неравенство (1) доказано, а вместе с ним и $R \ge 2r$.

Вместо девятого способа

В 1960 году вышла книга киевских учителей Я. И. Айзенштата и Б. Н. Белоцерковской «Решение задач по тригонометрии». Многие учителя хорошо знают (или знали) это истинное пособие для овладения методикой тригонометрии. С особым удовольствием цитирую:

«*Пример 19.* Доказать, что в любом треугольнике отношение радиуса вписанной окружности к радиусу описанной окружности не превосходит $\frac{1}{2}$.

Решение. В книге „Задачи по математике и физике, дававшиеся на приемных испытаниях в 1957 году“, изданной Московским физико-техническим институтом (Москва, 1959) помешены геометрические решения этой задачи (с. 47—51). Эти решения интересны, но довольно искусственны, а первое из них занимает более трех страниц и содержит 4 чертежа. Между тем...»

...и далее смотри пятый способ!

71. Благодаря Карно

Рассмотрим неравенство, которое «имеет право» быть коллекционным, благодаря применению формулы Карно:

$$OM_1+OM_2+OM_3=R+r.$$

Итак, пусть требуется доказать неравенство:

$$m_a+m_b+m_c\le\frac{9}{2}R$$

(m_a, m_b, m_c — медианы треугольника ABC, R — радиус описанной окружности).

Неравенство в книге В. В. Прасолова «Задачи по планиметрии» (Москва: МЦНМО, 2001), отмечено почетным значком «*» и доказывается так: в номере 10.5 вначале доказывается с помощью векторов неравенство

$$m_a^2+m_b^2+m_c^2\le\frac{27R^2}{4}$$

(№ 10.5, а). Затем (№ 10.5, б) рассматриваемое неравенство доказывается так: «Достаточно доказать, что

$$\left(m_a+m_b+m_c\right)^2\le3\left(m_a^2+m_b^2+m_c^2\right)$$

(см. приложение к гл. 9)».

Предлагается второй способ

Пусть M_1 — середина стороны BC треугольника ABC. Из ΔOM_1A (рис. 1): $AM\le OM_1+OA$, или $m_a\le OM_1+R$. Аналогично,

$$m_b\le OM_2+R,\ m_c\le OM_3+R.$$

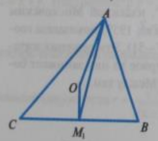

Рис. 1

Значит,

$$m_a+m_b+m_c\le R+r+3R=4R+r.$$

Но $r\le\frac{R}{2}$, значит,

$$m_a+m_b+m_c\le4R+\frac{R}{2}=\frac{9}{2}R,$$

что и требовалось доказать.

72. Хоровод неравенств

> Хороводъ — танóк... собранье молодежи обоего пола на вольном воздухе для пляски с песнями.
>
> *Владимир Даль «Толковый словарь»*

«Запевалой» такого хоровода является, наверное, самое популярное неравенство для углов треугольника ABC:

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le\frac{1}{8}$$

(A, B, C — углы треугольника).

Думаю, что учителя математики впервые познакомились с ним, когда вышел в свет фундаментальный «Сборник задач по специальному курсу элементарной математики» П. С. Моденова (второе издание вышло в 1960 году). Но доказательства в сборнике не было, поэтому особую популярность неравенство получило после выхода книги киевских учителей Я. И. Айзенштата и Б. Г. Белоцерковской «Решение задач по тригонометрии» (Москва: Учпедгиз, 1960):

«...мы хотим обратить внимание на одно неравенство, связывающее элементы треугольника, которое интересно само по себе, с большой пользой может быть применено при доказательстве других неравенств. Речь идет о неравенствах:

$$\sin\frac{A}{2}\le\frac{a}{2\sqrt{bc}};\quad \sin\frac{B}{2}\le\frac{b}{2\sqrt{ac}};\quad \sin\frac{C}{2}\le\frac{c}{2\sqrt{ab}}.$$

Докажем, например, первое из этих неравенств. Для доказательства удобно воспользоваться теоремой косинусов, ибо она содержит только один угол треугольника. Имеем

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,\ \text{откуда}\ \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\ \text{и}$$

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)}=\sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}}\le\sqrt{\frac{a^2}{4bc}}=\frac{a}{2\sqrt{bc}}$$

».

Доказав эти неравенства авторы предлагают их перемножить, получим

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le\frac{abc}{8abc},\ \text{или}\ \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le\frac{1}{8}.$$

Второй способ

Второй способ был опубликован впервые в книге «Триумф школьной геометрии»:

Докажем вначале, что

$$\sin A\cdot\sin B\le\cos^2\frac{C}{2}. \qquad (1)$$

Действительно, неравенство (1) запишем в виде:

$$2\sin A\cdot\sin B\le1+\cos C,$$

$$\cos(A-B)-\cos(A+B)\le1+\cos C,\quad \cos(A-B)\le1.$$

Аналогично доказываются неравенства

$$\sin B\sin C\le\cos^2\frac{A}{2}, \qquad (2)$$

$$\sin A\sin C\le\cos^2\frac{B}{2}. \qquad (3)$$

Перемножим неравенства (1), (2) и (3). Получим

$$\sin^2A\sin^2B\sin^2C\le\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2},$$

$$8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\le\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2},$$

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le\frac{1}{8}.$$

Третий способ

Если применить формулы $R\ge2r$ и $r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$, то доказываемое неравенство очевидно.

Четвертый способ

Докажем, что

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$$

(a, b, c — стороны треугольника, p — полупериметр).

Действительно,

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}.$$

Поскольку

$$\cos A=\frac{a^2-\left(b^2+c^2\right)}{2bc},\ \text{имеем}$$

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{2bc-\left(b^2+c^2-a^2\right)}{4bc}}=\sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}.$$

Аналогично,

$$\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}},\ \sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}.$$

Значит,

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}.$$

Далее имеем

$$\sqrt{(p-a)(p-b)}\le\frac{1}{2}\left((p-a)+(p-b)\right),\ \text{или}\ \sqrt{(p-a)(p-b)}\le\frac{1}{2}(2p-a-b),$$

$$\sqrt{(p-a)(p-b)}\le\frac{c}{2},\ \text{или}\ \frac{\sqrt{(p-a)(p-b)}}{c}\le\frac{1}{2}.$$

Аналогично,

$$\frac{\sqrt{(p-b)(p-c)}}{a}\le\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{(p-c)(p-a)}}{b}\le\frac{1}{2}.$$

Перемножая почленно, получим

$$\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}\le\frac{1}{8},$$

что и требовалось доказать.

Пятый способ

С помощью неравенства Коши ($n=2$) нетрудно доказать неравенство

$$8abc\le(a+b)(b+c)(a+c).$$

Поскольку $a=2R\sin A, b=2R\sin B, c=2R\sin C$, имеем

$$64\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\le$$

$$\le8\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}.$$

Так как

$$\sin\frac{A+B}{2}=\cos\frac{C}{2},\ \sin\frac{B+C}{2}=\cos\frac{A}{2},\ \sin\frac{A+C}{2}=\cos\frac{B}{2},$$

$$\text{то } 8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{A-C}{2}.$$

Но $\cos\frac{A-B}{2}\le 1, \cos\frac{B-C}{2}\le 1, \cos\frac{A-C}{2}\le 1$, поэтому

$$8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le 1,\ \text{или}\ \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le\frac{1}{8}.$$

Шестой способ

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A+B}{2}\right)=$$

$$=\frac{\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}}{2}\cdot\cos\frac{A+B}{2}=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\cos^2\frac{A+B}{2}-\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\cos^2\frac{A+B}{2}-\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}+\frac{\cos^2\frac{A-B}{2}}{4}-\frac{\cos^2\frac{A-B}{2}}{4}\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\left(\cos\frac{A+B}{2}-\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{2}\right)^2-\frac{\cos^2\frac{A-B}{2}}{4}\right)=$$

$$=\frac{1}{8}\cos^2\frac{A-B}{2}-\frac{1}{2}\left(\cos\frac{A+B}{2}-\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{2}\right)^2\le$$

$$\le\frac{1}{8}\cos^2\frac{A-B}{2}\le\frac{1}{8}\cdot 1=\frac{1}{8}.$$

Неравенство $\cos A+\cos B+\cos C\le\frac{3}{2}$

Первый естественный способ доказательства этого неравенства основан на том, что

$$\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le 1+4\cdot\frac{1}{8}=\frac{3}{2}.$$

Рассмотрим второй способ, представленный Э. Г. Готманом и З. А. Скопецом в книге «Задача одна — решения разные»: пусть окружность, вписанная в треугольник ABC касается сторон BC, CA, AB соответственно в точках A_1, B_1, C_1. Тогда $\angle A_1IB_1=180°-C$, где I — инцентр.

Воспользуемся соотношением

$$\left(\overline{IA_1}+\overline{IB_1}+\overline{IC_1}\right)^2\ge 0.$$

Положим $IA_1=IB_1=IC_1=1$. Так как

$$\overline{IA_1}\cdot\overline{IB_1}=-\cos C,\quad \overline{IA_1}\cdot\overline{IC_1}=-\cos B,\quad \overline{IB_1}\cdot\overline{IC_1}=-\cos A,$$

то после возведения левой части неравенства в квадрат, получим

$$\cos A+\cos B+\cos C\le\frac{3}{2}.$$

Этим же способом авторы в книге «Решение геометрических задач аналитическим методом» (Москва: Просвещение, 1979) доказывают следующую задачу:

Доказать, что для всякого тетраэдра

$$\sum_{i=1}^{6}\cos\alpha_i\le 2,$$

где $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_6$ — величины двугранных углов тетраэдра $ABCD$.

Доказательство

Пусть сфера, вписанная в тетраэдр $ABCD$, касается его граней соответственно в точках A_1, B_1, C_1, D_1 (рис. 1). Обозначим O — центр сферы, радиус ее будем считать равным 1.

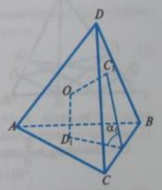

Рис. 1

Из соотношения

$$\left(\overline{OA_1}+\overline{OB_1}+\overline{OC_1}+\overline{OD_1}\right)^2\ge 0,$$

вычислив скалярный квадрат, получим

$$\sum_{i=1}^{6}\cos\alpha_i\le 2.$$

Предлагаем найти еще способы доказательства.

73. О самом замечательном свойстве ортоцентрического треугольника

Из всех треугольников, вписанных в данный остроугольный треугольник, наименьшим периметром обладает тот, вершины которого совпадают с основаниями высот данного треугольника.

Наверное, именно так впервые формулировалась проблема ортоцентрического треугольника немецким математиком Германом Шварцем (1843—1921). Из многих известных способов выберем два (первый принадлежит автору этой книги, второй — профессору Н. А. Извольскому, помещенный в «Математическом просвещении» № 10 за 1937 г.).

Первый способ

Лемма 1. Если из вершины ортоцентрического треугольника провести перпендикуляры к сторонам треугольника ABC, то отрезок, соединяющий основания перпендикуляров, равен полупериметру p_H ортоцентрического треугольника.

Доказательство

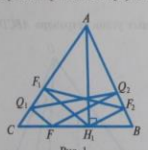

Рис. 1

Пусть отрезок H_1F_1 перпендикулярен отрезку AC, отрезок H_1F_2 перпендикулярен отрезку AB (рис. 1). Вокруг четырехугольника $H_1F_1AF_2$ можно описать окружность, диаметр которой равен отрезку AH_1. Тогда

$$F_1F_2=AH_1\sin A=\frac{S}{R}.$$

Поскольку $p_H=\frac{S}{R}$, то

$$F_1F_2=p_H. \tag{1}$$

Лемма 2. Если через произвольную точку стороны треугольника ABC провести перпендикуляры к двум другим сторонам, то длина

отрезка, соединяющего основания перпендикуляров, будет не меньшей полупериметра p_H ортоцентрического треугольника.

Доказательство

Возьмем, например, на стороне BC точку F (рис. 1) и проведем перпендикуляры FQ_1 и FQ_2 к сторонам AC и AB. Тогда

$$Q_1Q_2=AF\sin A;$$

$\sin A$ — постоянная величина, а длина отрезка AF будет наименьшей, если отрезок AF перпендикулярен отрезку BC. Отсюда $Q_1Q_2\ge F_1F_2$, или

$$Q_1Q_2\ge p_H. \tag{2}$$

Переходим непосредственно к доказательству теоремы:

из всех треугольников, вписанных в данный остроугольный треугольник, ортоцентрический имеет наименьший периметр.

Доказательство

Рассмотрим произвольный треугольник MFN, вписанный в остроугольный треугольник ABC (рис. 2). Построим точки L и E, симметричные точке F относительно соответственно AC и AB. Длина ломаной $LMNE$ равна периметру $2p$ треугольника MFN. Q_1Q_2 — средняя линия треугольника LFE, поэтому $Q_1Q_2=\frac{1}{2}LE$. Но длина LE не больше длины ломаной $LMNE$. Следовательно, длина отрезка Q_1Q_2 не больше полупериметра p треугольника MFN, то есть

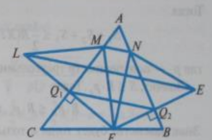

Рис. 2

$$Q_1Q_2\le p. \tag{3}$$

Сравним выражения (2) и (3), получаем

$$p_H\le Q_1Q_2\le p,\ \text{или}\ p_H\le p.$$

Знак равенства будет тогда и только тогда, когда треугольник MFN будет ортоцентрическим. Действительно, в этом случае (рис. 2) $\angle FNB=C$ (докажите!), $\angle MNF=180°-2C$, следовательно,

$$\angle MNE=180°-2C+2C=180°,$$

то есть MNE — прямая линия. Аналогично доказывается, что $\angle LMN=180°$, а это означает, что ломаная $LMNE$ совпадает с отрезком LE.

Второй способ

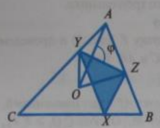

Рис. 3

Пусть XYZ — произвольный треугольник, вписанный в остроугольный треугольник ABC (рис. 3), точка O — центр описанной окружности, R — радиус этой окружности. Обозначим S_1, S_2, S_3 — площади четырехугольников $AYOZ$, $BZOX$, $CXOY$ соответственно. Обозначим угол между отрезками OA и YZ как φ. Тогда

$$S_1 = \frac{1}{2} R \cdot YZ \sin\varphi \le \frac{1}{2} R \cdot YZ.$$

Аналогично,

$$S_2 \le \frac{1}{2} \cdot XZ, \quad S_3 \le \frac{1}{2} R \cdot XY.$$

Тогда

$$S_1 + S_2 + S_3 \le \frac{1}{2} R(XY + XZ + YZ) = R \cdot p_x,$$

где p_x — полупериметр треугольника XYZ.

Значит, $S \le R \cdot p_x$. Тогда

$$R \cdot p_H \le R \cdot p_x, \text{ или } p_H \le p_x.$$

Знак равенства будет тогда и только тогда, когда треугольник XYZ будет ортоцентрическим.

74. Не всякий треугольник может быть разностным

Как известно, разностным треугольником называют треугольник, стороны которого составляют арифметическую прогрессию: для определенности $b \ge a \ge c$.

Докажем, что не всякий треугольник ABC может быть разностным, а только тот, у которого $\angle A \le 60°$.

Первый способ

Имеем

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{r}{p-a} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}.$$

Но $\sqrt{(p-b)(p-c)} \le \frac{1}{2}(p-b+p-c) = \frac{1}{2}a, p = \frac{3}{2}a; p-a = \frac{1}{2}a$. Значит,

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} \le \sqrt{\frac{1}{3}}, \text{ откуда } \angle A \le 60°.$$

Второй способ

Пусть стороны разностного треугольника будут $a, a+d, a+2d$. Тогда по теореме косинусов

$$(a+d)^2 = a^2 + (a+2d)^2 - 2a(a+2d)\cos A, \text{ откуда}$$

$$2a(a+2d)\cos A = a^2 + a^2 + 4ad + 4d^2 - a^2 - 2ad - d^2, \text{ откуда}$$

$$\cos A = \frac{a^2+2ad+3d^2}{2\left(a^2+2ad\right)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2+2ad+3d^2}{a^2+2ad}.$$

Очевидно, что

$$\frac{a^2+2ad+3d^2}{a^2+2ad} \ge 1,$$

поэтому $\cos A \ge \frac{1}{2}$, следовательно, $\angle A \le 60°$, что и требовалось доказать.

Глава VIII. Стереометрия. Коллекционные задачи

75. Они были первыми

Вопрос о решении задач многими способами в стереометрии не менее важен, чем в планиметрии. Однако эта достаточно простая мысль, к сожалению, не нашла систематического подтверждения в учебно-методической литературе, хотя полвека назад выдающиеся киевские педагоги Я. О. Айзенштат и Б. Г. Белоцерковская в своей книге «Розв'язання задач з математики в середній школі» (Киев: Радянська школа, 1957) первыми продемонстрировали методику поисков альтернативных решений в стереометрии.

Рассмотрим одну из таких задач.

Задача. Построить угол наклона высоты правильной треугольной пирамиды к боковой грани.

Заметим, что каждый из способов решения может показаться многословным и дублирующим один другой. Чтобы избежать этого обманчивого впечатления, в каждом из способов будет выделена главная мысль решения.

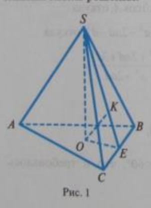

Рис. 1

Первый способ
(перпендикулярность двух плоскостей SOE и SBC)

Угол между наклонной и плоскостью есть острый угол между наклонной и проекцией ее на эту плоскость. Пусть $SABC$ — данная правильная треугольная пирамида, O — центр основания, OK — перпендикуляр на грань SBC (рис. 1).

Докажем перпендикулярность плоскостей SOE и SBC (E — середина отрезка BC).

Действительно, $BC \perp SO$ и $BC \perp SE$, значит, BC перпендикуляр к плоскости SOE. Плоскости SBC принадлежит прямая BC, поэтому по признаку перпендикулярности двух плоскостей, плоскость SCB перпендикулярна к плоскости SOE, значит, перпендикуляр OK к одной из двух взаимно перпендикулярных плоскостей, имеющих общую точку O с другой плоскостью, целиком лежит в другой плоскости и пересекает прямую SE пересечения этих плоскостей. Значит, SE — проекция SO на грань SBC и угол OSE — искомый.

Второй способ
(из точки O опускаем перпендикуляр OK и доказываем, что SK принадлежит апофеме SE)

Из центра основания, точки O, опустим перпендикуляр OK на грань SBC (рис. 1). Через точки S и K проведем прямую SE (E принадлежит ребру BC).

Докажем, что SE — высота грани SBC.

Действительно, $BC \perp SO$ и $BC \perp OK$, значит, BC перпендикулярно к плоскости SOE, следовательно, $BC \perp SE$.

Третий способ
(условно назовем его «планиметрическим»)

В плоскости треугольника SOE проведем $OK \perp SE$. Докажем, что перпендикуляр OK будет перпендикуляром к плоскости SBC.

Действительно, $BC \perp SE$ и $BC \perp SO$, значит,

$$BC \perp \text{пл. } SOE \text{ и } OK \perp BC,$$

а значит, и плоскости SBC.

Четвертый способ
(соединим точки S и K)

Опустим перпендикуляр OK на плоскость SBC и соединим точки S и K. Докажем, что прямая $SK \perp BC$. Действительно, поскольку OK — перпендикуляр к плоскости SBC, то по обобщенной теореме о трех перпендикулярах...

Пятый способ
(равенство углов OSB и OSC)

Поскольку $\angle OSB = \angle OSC$, то точка O проектируется на биссектрису угла BSC.

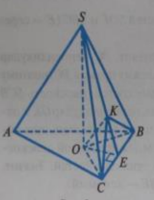

Рис. 2

Шестой способ
(отрезок KE)

Из точки O опустим перпендикуляр OK на плоскость SBC (рис. 2). Соединим точки K, B и C, опустим перпендикуляр OE:

$$CE = BE.$$

По теореме о трех перпендикулярах $EK \perp BC$. Значит, EK принадлежит высоте SE равнобедренного треугольника SBC.

Седьмой способ
(высота OK прямоугольного тетраэдра SOBC)

Известно, что вершина прямоугольного тетраэдра проектируется в ортоцентр основания SBC, значит, точка K принадлежит высоте SE треугольника SBC.

76. Прыжок выше головы

Применять формулу объема пирамиды

$$V = \frac{1}{6}a_1a_2d\sin\varphi$$

для школьника — прыжок, потому что она, эта формула «не по программе». А доказать эту формулу способом, новым, ничего общего с известным не имеющим, нигде не опубликованным, это прыжок еще «круче», чем первый, прыжок, которым можно гордиться.

Итак,

способ первый
(традиционный):

a_1, a_2 — длины скрещивающихся ребер тетраэдра, d — расстояние между ними, φ — угол между ними. Пусть B_1ABD — данный тетраэдр и

$$BB_1 = a_1,\ AD = a_2.$$

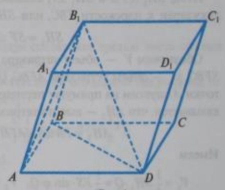

Рис. 1

Дополним его до параллелепипеда (рис. 1). Обозначим $V_т$ и $V_п$ соответственно объемы тетраэдра B_1ABD и параллелепипеда. Тогда $V_т = \frac{1}{6}V_п$,

так как

$$V_т = \frac{1}{3}H\cdot S_{ABD} = \frac{1}{3}H\cdot\frac{1}{2}S_{ABCD} = \frac{1}{6}HS_{ABCD} = \frac{1}{6}V_п.$$

Поскольку расстояние d равно расстоянию между гранями AA_1D_1D и BB_1C_1C, то $V_п = d\cdot S_{BB_1C_1C}$. Но $S_{BB_1C_1C} = BB_1\cdot BC\sin\angle B_1BC$.

Поскольку $BC = AD$, $\angle B_1BC = \varphi$, то

$$S_{BB_1C_1C} = BB_1\cdot AD\sin\varphi,$$

формула $V = \frac{1}{6}a_1a_2d\sin\varphi$ доказана.

А теперь...

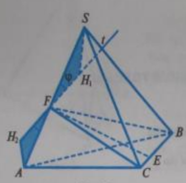

Рис. 2

Способ второй (!)
Доказательство по-новому!

Рассмотрим тетраэдр $SABC$ (рис. 2). Проведем сечение FBC через ребро BC и отрезок FE, перпендикулярный ребрам AS и BC. Ясно, что $FE = d$.

Рассмотрим тетраэдр $SFCB$. Проведем через точку F прямую t, параллельную BC и опустим перпендикуляр SH_1 на нее. Докажем, что SH_1 — высота этого тетраэдра. Для этого докажем, что отрезок FE перпендикулярен плоскости SFt. Действительно, поскольку прямая t параллельна BC, FE перпендикулярна t и прямая FE перпендикулярна SF, то отрезок FE перпендикулярен плоскости FSH_1, следовательно, SH_1 перпендикулярен FE.

Итак, $SH_1 \perp FE$ и $SH_1 \perp t$, следовательно, отрезок SH_1 перпендикулярен к плоскости FBC, или SH_1 — высота пирамиды $SFBC$:

$$SH_1 = SF\sin\varphi$$

Обозначим V — объем тетраэдра $SABC$, V_1 — объем тетраэдра $SFBC$, V_2 — объем тетраэдра $AFBC$, Q — площадь сечения FBC. Из точки A опустим на прямую t перпендикуляр AH_2. Аналогично доказывается, что AH_2 — высота тетраэдра $AFBC$.

$$AH_2 = FA\sin\angle AFH_2 = AF\sin\varphi.$$

Имеем

$$V_1 = \frac{1}{3}SH_1\cdot Q = \frac{1}{3}FS\cdot\sin\varphi\cdot Q,\quad V_2 = \frac{1}{3}AH_2\cdot Q = \frac{1}{3}FA\cdot\sin\varphi\cdot Q.$$

Поскольку $V = V_1 + V_2$, то

$$V = \frac{1}{3}\sin\varphi\cdot Q(FS + FA) = \frac{1}{6}BC\cdot FE\cdot SA\sin\varphi = \frac{1}{6}a_1a_2d\sin\varphi.$$

Прыжок состоялся!

Третий способ

Проведем через каждую пару скрещивающихся ребер тетраэдра $ABCD$ соответственно параллельные плоскости (рис. 3). Получим параллелепипед $AFBHEDGC$, для которого ребра исходного тетраэдра будут диагоналями граней.

Докажем, что объем полученного параллелепипеда ($V_п$)

$$V_п = \frac{1}{2}AB\cdot CD\cdot d\sin\varphi, \tag{1}$$

где d — расстояние между прямыми AB и CD, φ — угол между AB и CD.

Действительно, поскольку $AB \parallel EG$ и $AB = EG$, то

$$S_{DGCE} = \frac{1}{2}EG\cdot DC\cdot\sin\angle(DC, EG) = \frac{1}{2}AB\cdot CD\cdot\sin\varphi.$$

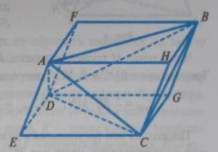

Рис. 3

Кроме того, d — расстояние между AB и CD, а значит, d — расстояние между плоскостями граней $AFBH$ и $EDGC$, т. е. d равно высоте h параллелепипеда, опущенной на грань $EDGC$. Поэтому

$$V_п = S_{DGCE}\cdot h = \frac{1}{2}AB\cdot CD\sin\varphi\cdot d.$$

Формула (1) доказана.

Докажем, что объем тетраэдра составляет третью часть объема параллелепипеда $AFBHEDGC$ (рис. 3).

Рассмотрим тетраэдр $ADEC$. Пусть AT его высота (на рисунке не изображается). Тогда его объем V_1:

$$V_1 = \frac{1}{3}S_{ECD}\cdot AT = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot S_{EDGC}\cdot AT = \frac{1}{6}V_п$$

($V_п$ — объем параллелепипеда).

Аналогично,

$$V_2 = V_{BDGC} = \frac{1}{6}V_п,\quad V_3 = V_{FABD} = \frac{1}{6}V_п,\quad V_4 = V_{ABHC} = \frac{1}{6}V_п.$$

Тогда

$$V_{ABCD} = V_п - (V_1 + V_2 + V_3 + V_4) = V_п - \frac{4}{6}V_п = \frac{1}{3}V_п.$$

Учитывая формулы (1) и (2)

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3}V_п = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}AB\cdot CD\cdot d\sin\varphi = \frac{1}{6}AB\cdot CD\cdot d\sin\varphi,$$

что и требовалось доказать.

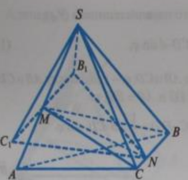

Рис. 4

Четвертый способ

Этот способ предложили учащиеся. Приходится только восхищаться умению детей фантазировать.

Пусть $SABC$ — данный тетраэдр (рис. 4), $AS = a_1$, $BC = a_2$, MN — общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых SA и BC ($MN = d$), φ — угол между прямыми SA и BC.

Через точку M проведем отрезок B_1C_1 параллельный и равный BC. Треугольники BMC и B_1NC_1 равновелики. Действительно,

$$S_{BMC} = \frac{1}{2} BC \cdot MN, \quad S_{B_1NC_1} = \frac{1}{2} B_1C_1 \cdot MN = \frac{1}{2} BC \cdot MN.$$

Поскольку эти треугольники лежат в одной плоскости, задаваемой параллельными прямыми BC и B_1C_1, то перпендикуляр, опущенный из точки S на плоскость BMC совпадает с перпендикуляром, опущенным из точки S на плоскость B_1NC_1. Значит, объемы тетраэдров $SBMC$ и SB_1NC_1 равны:

$$V_{SBMC} = V_{SB_1NC_1}. \tag{1}$$

Аналогично можно показать, что

$$V_{ABCM} = V_{AC_1B_1N}. \tag{2}$$

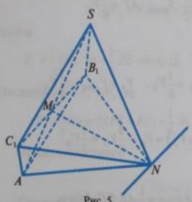

Рис. 5

Прибавив левые и правые части равенств (1) и (2), получим:

$$V_{SBMC} + V_{ABMC} = V_{SB_1NC_1} + V_{AC_1B_1N},$$

или $V_{SABC} = V_{SB_1NC_1A}$.

Далее. Заметим, что многогранник SB_1NC_1A есть четырехугольная пирамида с вершиной N и основанием SB_1AC_1 (рис. 5), причем d — ее высота, поскольку $MN \perp AS$, $MN \perp BC$, а $B_1C_1 \parallel BC$, следовательно, $MN \perp B_1C_1$.

Тогда

$$V_{NSC_1AB_1} = \frac{1}{3} NM \cdot S_{AB_1SC_1} = \frac{1}{3} d \cdot \frac{1}{2} AS \cdot BC \cdot \sin \angle SMB_1 = \frac{1}{6} da_1a_2 \cdot \sin\varphi -$$

воистину прыжок выше головы!

77. Обаятельная скромность стереометрических жемчужин

Даже опытный «боец» может не обратить внимания на задачу с заведомо скучным и «занудным» условием:

Полная поверхность конуса в два раза больше поверхности вписанного в него шара. Определить отношение объема конуса к объему шара.

Проведем естественное доказательство методом вспомогательного элемента. Пусть I — центр шара, K — точка касания шара основания конуса (рис. 1). Обозначим l — образующая конуса, R — радиус основания, r — радиус шара, $S_п$ — полная поверхность конуса.

$$S_п = \pi R(R + l). \tag{1}$$

Обозначим α — угол IBK. Тогда:

$$R = r \operatorname{ctg}\alpha, l = \frac{R}{\cos 2\alpha} = \frac{r \operatorname{ctg}\alpha}{\cos 2\alpha}.$$

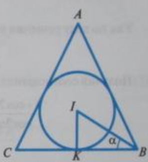

Рис. 1

Подставим эти выражения в (1):

$$S_п = \pi r \operatorname{ctg}\alpha \left(r \operatorname{ctg}\alpha + \frac{r \operatorname{ctg}\alpha}{\cos 2\alpha} \right) =$$

$$= \pi r^2 \operatorname{ctg}^2\alpha \left(1 + \frac{1}{\cos 2\alpha} \right).$$

Пусть $S_ш$ — поверхность шара.

$$S_ш = 4\pi r^2.$$

По условию $S_п = 2S_ш$, значит,

$$\pi r^2 \operatorname{ctg}^2\alpha \left(1 + \frac{1}{\cos 2\alpha} \right) = 2 \cdot 4\pi r^2, \text{ или}$$

$$\frac{1 + \cos 2\alpha}{\cos 2\alpha} = 8 \operatorname{tg}^2\alpha. \tag{2}$$

Пусть $V_к$, $V_ш$ — соответственно объемы конуса и шара. Имеем $V_к = \frac{1}{3}\pi R^2 H$ (H — высота конуса).

Поскольку $H = R \cdot \operatorname{tg} 2\alpha$, а $V_ш = \frac{4}{3}\pi r^3$, то

$$\frac{V_к}{V_ш} = \frac{\pi R^2 R \operatorname{tg} 2\alpha}{3 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{4 \operatorname{tg}^3\alpha} =$$

$$= \frac{2 \operatorname{tg}\alpha}{4(1 - \operatorname{tg}^2\alpha)\operatorname{tg}^3\alpha} = \frac{1}{2 \operatorname{tg}^2\alpha (1 - \operatorname{tg}^2\alpha)}. \tag{3}$$

Далее воспользуемся формулой (2):

$$8 \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{\cos 2\alpha} = 1 + \frac{1}{\cos 2\alpha} = 1 + \frac{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} =$$

$$= \frac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha + 1 + \operatorname{tg}^2\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Подставим в формулу (3):

$$\frac{V_к}{V_ш} = \frac{4}{8 \operatorname{tg}^2\alpha (1 - \operatorname{tg}^2\alpha)} = \frac{4(1 - \operatorname{tg}^2\alpha)}{2(1 - \operatorname{tg}^2\alpha)} = 2,$$

значит, отношение объема конуса к объему шара равно 2.

Уже по ходу решения возможны *вариации*.

Первая вариация

Получив соотношение (2), выразим $\operatorname{tg}^2\alpha$ через $\cos 2\alpha$. Имеем

$$\frac{1 + \cos 2\alpha}{\cos 2\alpha} = 8 \cdot \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}, \text{ откуда}$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1}{3}. \tag{1°}$$

Найдем теперь соотношение объемов. Имеем

$$V_к = \frac{\pi r^3}{3} \operatorname{ctg}^3\alpha \operatorname{tg} 2\alpha, \; V_ш = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Преобразуем выражение $\operatorname{ctg}^3\alpha \operatorname{tg} 2\alpha$, учитывая, что $\cos 2\alpha = \frac{1}{3}$:

$$\operatorname{ctg}^3\alpha \cdot \operatorname{tg} 2\alpha = \operatorname{ctg}^2\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} =$$

$$= \frac{1 + \cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha} \cdot \frac{\cos\alpha \cdot 2 \sin\alpha \cos\alpha}{\frac{1}{3}\sin\alpha} = 8.$$

Вторая вариация
(интуиция и аналогия!)

Поскольку в условии задачи речь идет о соотношении между поверхностями и объемами, в первую очередь обращает внимание формула объема шара $V_ш = \frac{4}{3}\pi r^3$, или $V_ш = \frac{r}{3} S_ш$, т. е. формулу объема можно выразить с помощью формулы поверхности ($S_ш$). Нельзя ли объем конуса выразить с помощью его полной поверхности? По аналогии с формулой площади треугольника $S = rp$ можно предположить, что $V_к = r \cdot x$. Найдем x. Поскольку

$$V_к = \frac{1}{3}\pi R^2 H, \text{ то } \frac{1}{3}\pi R^2 H = rx, \text{ откуда}$$

$$x = \frac{\pi R^2 H}{3r} = \frac{\pi R^2 \sqrt{l^2 - R^2}}{3r}, \tag{4}$$

(поскольку $H = \sqrt{l^2 - R^2}$).

Выразим r через l и R. По теореме о биссектрисе: $\frac{IK}{AI} = \frac{KB}{AB}$, или

$$\frac{r}{\sqrt{l^2 - R^2} - r} = \frac{R}{l}, \quad rl = R\sqrt{l^2 - R^2} - Rr,$$

отсюда

$$r \cdot (l + R) = R\sqrt{l^2 - R^2},$$

$$r = R \cdot \sqrt{\frac{l - R}{l + R}}. \tag{5}$$

Подставим (5) в (4):

$$x = \frac{\pi R^2 \sqrt{l^2 - R^2} \cdot \sqrt{l + R}}{3 \cdot \sqrt{l - R} \cdot R},$$

откуда

$$x = \frac{\pi}{3} \cdot R(l + R) = \frac{1}{3} S_{п.к.}.$$

Значит,

$$V_к : V_ш = \frac{r}{3} \cdot S_{п.к.} : \frac{r}{3} S_ш = 2 \tag{6}$$

(по условию)

Итак, найдена формула

$$V_к = \frac{r}{3} \cdot S_{п.к.}.$$

Тогда предложенная задача решается в одну строку.

Третья вариация
(«Ретро»)

Стремление выразить объем конуса через радиус вписанного шара и полную поверхность заставило вспомнить лемму об объеме тел вращения, рассмотренную в учебнике А. П. Киселева, изучаемую в школе десятилетиями для вывода формул объема шара и его частей:

Если треугольник ABC вращается вокруг оси, которая лежит в плоскости треугольника, проходит через его вершину A, но не пересекает стороны BC, то объем тела, полученного при этом вращении, равен произведению поверхности, образуемой противоположной стороной BC на одну треть высоты h, опущенной на эту сторону (А. П. Киселев. «Геометрия». — Ч. II. — Москва: Просвещение, 1964. — С. 83).

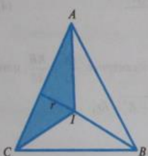

Рис. 2

Представим объем конуса ABC (рис. 2) как сумму двух объемов: объем тела, получаемого вращением треугольника AIC (I — центр вписанного в конус шара) и объема конуса CIB.

$$V_к = V_1 + V_2.$$

Объем V_2 конуса равен

$$V_2 = \frac{1}{3} r \cdot S_о$$

($S_о$ — площадь основания). А объем тела вращения V_1 найден по лемме: $V_1 = \frac{1}{3} r \cdot S_1$.

Но S_1 — это боковая поверхность конуса ABC, значит,

$$V_к = \frac{1}{3} r \cdot S_1 + \frac{1}{3} r \cdot S_о = \frac{r}{3}\left(S_1 + S_о\right) = \frac{r}{3} S_{п.к.}.$$

Дальнейшее — как и в предыдущем способе.

Гипотетичный финал

Все предыдущие способы наталкивают на гипотезу:

Если шар радиуса r вписан в многогранник и вписан в конус, то

$$\frac{V_ш}{S_ш} = \frac{V_м}{S_м} = \frac{V_к}{S_к} = \frac{r}{3}$$

($V_ш$, $S_ш$ — объем и поверхность шара, $V_м$, $S_м$ — объем и полная поверхность многогранника, $V_к$, $S_к$ — объем и полная поверхность конуса).

Доказательство

Имеем:

$$\frac{V_ш}{S_ш} = \frac{4\pi r^3}{4 \cdot 3\pi r^2} = \frac{r}{3}.$$

Воспользуемся формулой $r = \frac{3V_м}{S_м}$. Значит, $\frac{V_м}{S_м} = \frac{r}{3}$.

Докажем, что

$$\frac{V_к}{S_к} = \frac{r}{3}.$$

Первый способ

Аналогичен выводу формулы длины окружности или площади круга: бесконечно увеличивая количество вершин основания правильной n-угольной пирамиды, вписанной в конус, перейдем к пределу.

Для тех, кого не устраивает этот способ, предлагается еще...

Второй способ
(он фактически дублирует рассмотренный третий способ решения задачи)

$$\frac{V_к}{S_к} = \frac{\pi R^2 H}{3\pi R(l+R)} = \frac{HR}{3(l+R)} \tag{1°}$$

(l — образующая конуса, R — радиус основания конуса, r — радиус вписанного шара). Далее

$$\frac{R}{l} = \frac{r}{H-r},$$

откуда

$$r = \frac{HR}{l+R}. \tag{2°}$$

Сравнивая выражения (2°) и (1°), получим, что $\frac{V_к}{S_к} = \frac{r}{3}$.

Третий способ найдите самостоятельно.

78. Прямая Эйлера и стереометрия

Применение планиметрии в стереометрии не просто привычно, а обязательно. Удивить искушенного читателя этим очень трудно. То ли дело — применить стереометрию к доказательству планиметрических теорем! Таких случаев буквально наперечет. Поэтому каждое новое применение — событие для интересующихся геометрией. Тем более, если это касается прямой Эйлера. Предварительно рассмотрим несколько задач.

Задача 1. Пусть O — центр сферы, O_1 — центр сечения сферы. Доказать, что отрезок OO_1 — перпендикулярен плоскости этого сечения.

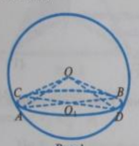

Рис. 1

Доказательство

В сечении проведем два диаметра AB и CD (рис. 1). Треугольники OAB и OCD — равнобедренные, а OO_1 — медиана, проведенная к основанию этих треугольников. Поскольку

$$OO_1 \perp AB \text{ и } OO_1 \perp CD,$$

то отрезок OO_1 перпендикулярен сечению.

Задача 2. В треугольной пирамиде $SABC$ плоские углы при вершине S прямые. Доказать, что скрещивающиеся ребра перпендикулярны.

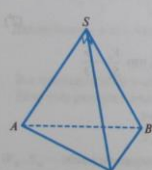

Рис. 2

Доказательство

Действительно, поскольку

$$SC \perp SA \text{ и } SC \perp SB$$

(рис. 2), то ребро SC перпендикулярно грани SAB, значит,

$$SC \perp AB.$$

Задача 3. В треугольной пирамиде $SABC$ плоские углы при вершине S — прямые. Доказать, что вершина S, точка M — центроид основания ABC и центр O описанной около пирамиды сферы принадлежат одной прямой.

Доказательство.

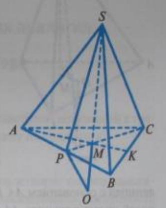

Рис. 3

В треугольнике ABC (рис. 3) проведем медианы AK и CP. Поскольку $\angle ASB = 90°$, то точка P есть центр окружности, описанной около треугольника ASB, значит, по задаче 1 отрезок PO перпендикулярен плоскости ASB. По задаче 2 ребро SC перпендикулярно плоскости ASB. Таким образом, отрезки PO и SC — параллельны и точки P, O, S, C принадлежат одной плоскости.

Аналогично доказывается, что точки O, K, S, A принадлежат одной плоскости. У этих плоскостей есть две несовпадающие общие точки S и O, поэтому прямая SO — линия пересечения этих плоскостей.

Первой плоскости принадлежит медиана CP, второй — медиана AK, значит, точка M — точка пересечения этих медиан — принадлежит двум плоскостям, т. е. пересечению SO этих плоскостей, что и требовалось доказать.

Задача 4. Если в треугольной пирамиде $SABC$ плоские углы при вершине S прямые (прямоугольный тетраэдр), то центроид G тетраэдра принадлежит прямой SO.

Действительно, это так, потому что точка G принадлежит прямой SM — медиане тетраэдра.

Стереометрическое доказательство теоремы о прямой Эйлера

Рассмотрим прямоугольный тетраэдр $SABC$. Обозначим H — ортоцентр треугольника ABC, M — центроид треугольника ABC, O — центр окружности, описанной около треугольника ABC, Q — центр сферы, описанной около прямоугольного тетраэдра $SABC$. Ортогонально спроецируем точку S на основание ABC. Тогда она спроецируется в ортоцентр H, а точка Q — в точку O (рис. 4).

Поскольку QO перпендикулярна плоскости ABC (задача 1), то $SH \parallel QO$. Проведем через точки S, H, Q, O плоскость. Она пересечет

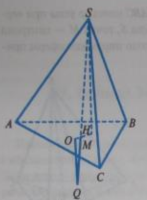

Рис. 4

плоскость ABC по прямой HO. Точка M принадлежит прямой SQ и плоскости ABC, значит, и прямой HO. Таким образом, точки H, M, O принадлежат одной прямой — прямой Эйлера.

Докажем, что

$$2OM = MH$$

(опять же с помощью стереометрии). Рассмотрим подобные треугольники SHM и QOM:

$$\frac{OM}{MH} = \frac{QM}{MS}. \qquad (1)$$

Строим вспомогательный параллелепипед с основанием AA_1BS (рис. 5), F — точка пересечения диагоналей прямоугольника AA_1BS. Поскольку треугольники ECM и SFM подобны, то

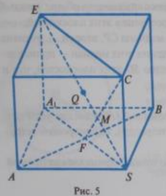

Рис. 5

$$\frac{SF}{EC} = \frac{FM}{MC} = \frac{MS}{EM}.$$

Поскольку

$$\frac{FS}{EC} = \frac{1}{2},$$

то M — центроид треугольника ABC и

$$\frac{MS}{EM} = \frac{1}{2}.$$

Поскольку Q — центр сферы, описанной около параллелепипеда, то $EQ = QS$. Отсюда

$$EM = 2QM + MS.$$

Тогда

$$\frac{EM}{MS} = \frac{2QM + MS}{MS} = 2,$$

или $\frac{2QM}{MS} + 1 = 2$, или $2QM = MS$.

Учитывая равенство (1), получим $2OM = HM$.

79. Стереометрическая аналогия формулы Эйлера

Формула Эйлера о расстоянии между центрами вписанной в треугольник окружности и описанной не может не нравиться:

$$OI^2 = R^2 - 2Rr.$$

Она обладает качествами, которые удовлетворят самого взыскательного эстета: ее форма, разнообразие доказательств, доступность даже восьмикласснику и, конечно же, применение.

Как это часто бывает, в стереометрии аналог этой формулы долгое время найден не был, если не считать следующую задачу:

В тетраэдре $DABC$ точка O — центр описанной сферы, R — ее радиус, точка O_o — центр окружности, описанной вокруг треугольника ABC, точка I_o — центр вписанной в этот треугольник окружности, R_o и r_o — радиусы этих окружностей. Доказать, что

$$OI_o^2 = R^2 - 2R_o r_o.$$

Доказательство

Поскольку отрезок OO_o перпендикулярен плоскости ABC (рис. 1), то треугольники OO_oA и OO_oI_o — прямоугольные. Имеем

$$OA^2 = OO_o^2 + AO_o^2,$$

$$OI_o^2 = OO_o^2 + O_oI_o^2,$$

откуда

$$OI_o^2 = OA^2 - AO_o^2 + O_oI_o^2 = R^2 - R_o^2 + O_oI_o^2.$$

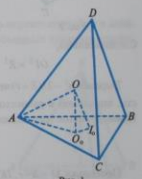

Рис. 1

По формуле Эйлера для треугольника ABC

$$O_oI_o^2 = R_o^2 - 2R_o r_o.$$

Следовательно,

$$OI_o^2 = R^2 - 2R_o r_o.$$

Хотя условие задачи не совпадает с поставленной целью — найти формулу OI в пространстве, ее вид позволяет надеяться, что в искомой формуле будет фигурировать выражение $R^2 - 2Rr$.

* * *

Несколько лет назад в журнале «Математика в школе» была опубликована формула Дюранда:

В правильной треугольной пирамиде

$$OI^2 = (R+r)(R-3r)$$

(O — центр описанного шара, R — радиус, I — центр вписанного шара, r — радиус).

Нетрудно показать, что вид формулы напоминает формулу Эйлера:

$$(R+r)(R-3r) = R^2 - 3Rr + Rr - 3r^2 = R^2 - 2Rr - 3r^2. \qquad (*)$$

В журнале формула доказывалась так:

Доказательство

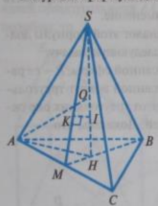

Рис. 2

Доказательство проведем для случая, когда центр описанной сферы лежит внутри пирамиды (рис. 2). Пусть $SABC$ — правильная треугольная пирамида, H — центр основания ABC, M — середина AC, K — точка касания вписанной в пирамиду сферы с боковой гранью SAC. Тогда SM — высота боковой грани SAC и $K \in SM$. Ясно, что

$$OI = |R + r - h|,$$

где $h = SH$ — высота пирамиды.

Следовательно,

$$OI^2 = R^2 + r^2 + 2Rr + h^2 - 2h(R+r). \qquad (1)$$

Выразим $h^2 - 2h(R+r)$ через R и r. Пусть $HM = x$ — радиус окружности, вписанной в равносторонний треугольник ABC, тогда $AH = 2x$. Прямоугольные треугольники SKI и SHM подобны, откуда

$$\frac{IK}{HM} = \frac{SI}{SM}.$$

Поскольку $SI = h - r$, $IK = r$, а $SM = \sqrt{h^2 + x^2}$ (из прямоугольного треугольника SHM), то

$$\frac{r}{x} = \frac{h-r}{\sqrt{h^2 + x^2}},$$

откуда

$$r^2\left(h^2 + x^2\right) = x^2(h-r)^2, \quad x^2\left(h^2 - 2hr\right) = h^2 r^2,$$

поэтому

$$x^2 = \frac{hr^2}{h-2r}. \qquad (2)$$

Из прямоугольного треугольника OHA:

$$OH^2 = OA^2 - AH^2 = R^2 - 4x^2,$$

с другой стороны,

$$OH = SH - SO = h - R.$$

Следовательно, $(h-R)^2 = R^2 - 4x^2$, откуда

$$4x^2 = 2hR - h^2. \qquad (3)$$

Из (2) и (3) имеем:

$$\frac{4hr^2}{h-2r} = 2hR - h^2,$$

т. е. $\frac{4r^2}{h-2r} = 2R - h$, $4r^2 = 2Rh - 4Rr - h^2 + 2rh$,

откуда

$$h^2 - 2h(R+r) = -4Rr - 4r^2. \qquad (4)$$

Подставим (4) в (1):

$$OI^2 = R^2 + r^2 + 2Rr - 4Rr - 4r^2 = R^2 - 2Rr - 3r^2,$$

что и требовалось доказать.

Будем считать доказательство Дюранда первым способом и докажем формулу (*) вторым способом (с помощью тригонометрии).

Второй способ

Обозначим (рис. 3)

$$\angle HSB = \alpha, \angle HSE = \beta,$$

d — расстояние между центрами O и I сфер. Очевидно, что

$$SH = R + r \pm d.$$

Обозначим $SH = h$. Имеем

$$HB = h \operatorname{tg} \alpha;$$

$$HE = h \operatorname{tg} \beta = HB \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} HB,$$

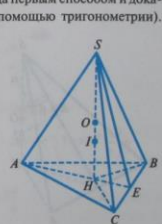

Рис. 3

$$h=r+\frac{r}{\sin\beta}. \qquad (1)$$

$$h=R+R\cos 2\alpha=2R\cos^2\alpha. \qquad (2)$$

Сравним выражения (1) и (2):

$$2R\cos^2\alpha=r\left(1+\frac{1}{\sin\beta}\right).$$

В правильной треугольной пирамиде

$$\operatorname{tg}\alpha=2\operatorname{tg}\beta \qquad (1^\circ)$$

(доказать!).

Поскольку

$$d=|R+r-h|=\left|R+r-\left(r+\frac{r}{\sin\beta}\right)\right|=\left|R-\frac{r}{\sin\beta}\right|,$$

следовательно,

$$d^2=R^2-\frac{2Rr}{\sin\beta}+\frac{r^2}{\sin^2\beta}=R^2-2Rr+r^2\left(1-\frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\beta}\right).$$

Учитывая соотношение (1°), имеем

$$OI^2=R^2-2Rr+r^2(1-4)=R^2-2Rr-3r^2,$$

что и требовалось доказать.

Пользуясь аналогией, обобщим формулу Дюранда (формулу Эйлера) для n-угольной правильной пирамиды:

$$OI^2=R^2-2Rr-r^2\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{n}.$$

Первый способ

Рассмотрим «секцию» n-угольной пирамиды $SHBA$ (рис. 4) ($SH=h$ — высота n-угольной пирамиды).

$$OI=|R+r-h|.$$

Следовательно,

$$OI^2=R^2+r^2+2Rr+h^2-2h(R+r). \qquad (1)$$

Обозначим

$$HE=x;\ IK=r;$$

$$SE=\sqrt{h^2+x^2};\ SI=h-r.$$

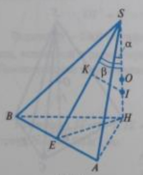

Рис. 4

Прямоугольные треугольники SIK и SEH подобны:

$$\frac{IK}{HE}=\frac{SI}{SE},\ \text{или}\ \frac{r}{x}=\frac{h-r}{\sqrt{h^2+x^2}},$$

$$r^2\left(h^2+x^2\right)=(h-r)^2x^2;$$

$$x^2\left(h^2-2hr\right)=h^2r^2;$$

$$x^2=\frac{hr^2}{h-2r}. \qquad (2)$$

Из ΔEHA

$$HA=\frac{x}{\cos\frac{\pi}{n}},\ OH=h-R=\sqrt{R^2-AH^2}=\sqrt{R^2-\frac{x^2}{\cos^2\frac{\pi}{n}}},$$

или

$$h^2-2hR+R^2=R^2-\frac{x^2}{\cos^2\frac{\pi}{n}}. \qquad (3)$$

Сравним (2) и (3):

$$\frac{hr^2}{h-2r}=\left(2Rh-h^2\right)\cos^2\frac{\pi}{n};$$

$$r^2=\left(2Rh-4Rr-h^2+2hr\right)\cos^2\frac{\pi}{n};$$

$$-h^2+2Rh+2hr=\frac{r^2}{\cos^2\frac{\pi}{n}}+4Rr;$$

$$h^2-2h(R+r)=-\frac{r^2}{\cos^2\frac{\pi}{n}}-4Rr.$$

Подставим это выражение в (1):

$$OI^2=R^2+r^2+2Rr+h^2-2h(R+r)=$$

$$=R^2+r^2+2Rr-\frac{r^2}{\cos^2\frac{\pi}{n}}-4Rr=R^2-2Rr+r^2\left(1-\sec^2\frac{\pi}{n}\right)=$$

$$=R^2-2Rr-r^2\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{n},$$

что и требовалось доказать.

Второй способ
(с помощью тригонометрии)

Обозначим $\angle HSA=\alpha$; $\angle ESH=\beta$ (рис. 4), d — расстояние между центрами O и I сфер, h — высота пирамиды. Тогда $h=R+r\pm d$ (знак перед d определяется взаимным расположением центров O и I). Имеем:

$$HA=h\operatorname{tg}\alpha;\ HE=h\operatorname{tg}\beta=HA\cos\frac{\pi}{n},$$

откуда следует, что

$$\operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}\alpha\cos\frac{\pi}{n}.$$

В треугольнике SHE:

$$h=r+\frac{r}{\sin\beta}.$$

В треугольнике SHA:

$$h=R+R\cos 2\alpha=2R\cos^2\alpha.$$

Значит,

$$2R\cos^2\alpha=r\left(1+\frac{1}{\sin\beta}\right)\ \text{и к тому же}\ d=|R+r-h|=\left|R-\frac{r}{\sin\beta}\right|.$$

Тогда

$$d^2=R^2-2Rr\cdot\frac{1}{\sin\beta}+\frac{r^2}{\sin^2\beta}=R^2-2Rr+2Rr\left(1-\frac{1}{\sin\beta}\right)+\frac{r^2}{\sin^2\beta}=$$

$$=R^2-2Rr+r^2\left(\left(1-\frac{1}{\sin^2\beta}\right)\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\beta}\right)=$$

$$=R^2-2Rr+r^2\left(1-\frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\beta}\right),$$

т. е. $d^2=R^2-2Rr+r^2\left(1-\dfrac{1}{\cos^2\frac{\pi}{n}}\right)$, откуда и следует доказываемая формула.

Следствие: $R\ge r\left(1+\dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{n}}\right)$.

80. Альтернатива теореме Чевы в стереометрии

Аналогией теоремы Чевы на плоскости есть условие пересечения прямых в гранях тетраэдра (см.: Г. П. Бевз. «Геометрія тетраедра». — Киев: Радянська школа, 1974. — Раздел 84).

Предлагается иная зависимость, альтернативная «условию Чевы».

Для того, чтобы две прямые, проведенные через вершины A и D тетраэдра пересекались, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение

$$\frac{S_{AD_1C}}{S_{AD_1B}}=\frac{S_{DA_1C}}{S_{DA_1B}}, \qquad (1)$$

где A_1 и D_1 — точки пересечения этих прямых с гранями DBC и ABC.

Доказательство

Необходимость. Пусть прямые AA_1 и DD_1 пересекаются в точке O. Через эти прямые проведем плоскость ADF (рис. 1). Понятно, что

$$\frac{S_{FD_1C}}{S_{FD_1B}}=\frac{CF}{BF},\ \frac{S_{CAF}}{S_{BAF}}=\frac{CF}{BF}.$$

Следовательно,

$$\frac{S_{CAF}-S_{FD_1C}}{S_{BAF}-S_{FD_1B}}=\frac{S_{AD_1C}}{S_{AD_1B}}=\frac{CF}{BF}.$$

Аналогично доказывается, что

$$\frac{S_{DA_1C}}{S_{DA_1B}}=\frac{CF}{BF},$$

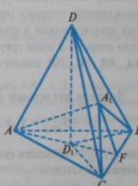

Рис. 1

то есть выполняется равенство (1).

Достаточность. Допустим, что прямые AA_1 и DD_1 не имеют общей точки. Пусть прямая DA_1 пересекает сторону BC в точке F_2, а прямая AD_1 — в точке F_1.

Понятно, что

$$\frac{S_{AD_1C}}{S_{AD_1B}} = \frac{CF_1}{BF_1}, \quad \frac{S_{DA_1C}}{S_{DA_1B}} = \frac{CF_2}{BF_2}.$$

Следовательно,

$$\frac{CF_1}{BF_1} = \frac{CF_2}{BF_2}, \text{ или } \frac{CF_1}{BF_1} + 1 = \frac{CF_2}{BF_2} + 1,$$

то есть $\frac{BC}{BF_1} = \frac{BC}{BF_2}$. Отсюда $BF_1 = BF_2$ и точки F_1 и F_2 совпадают. Следовательно, прямые AA_1 и DD_1 пересекаются.

Можно показать, что условием пересечения прямых AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 в одной точке является выполнение для каждых двух из них условия (1).

Задача 1. Доказать, что медианы тетраэдра пересекаются в одной точке.

Доказательство

Поскольку точки D_1 и A_1 — центроиды граней ABC и DBC и площади треугольников AD_1C, AD_1B и DA_1C, DA_1B равны, то утверждение задачи доказано.

Задача 2. На гранях ABC, DBC, DCA, DAB тетраэдра $DABC$ заданы соответственно точки D_1, A_1, B_1, C_1. Они соединены со всеми вершинами граней, которым принадлежат. Площади каждого из полученных треугольников в сумме с площадью грани, которая имеет общую сторону с этим треугольником, равны. Доказать, что прямые AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 имеют общую точку.

Доказательство

Докажем, что прямые AA_1 и DD_1 пересекаются. По условию (рис. 1)

$$S_1 + S_{AD_1C} = S_2 + S_{AD_1B} = S_1 + S_{DA_1C} = S_2 + S_{DA_1B} = \frac{S}{3},$$

где S_1, S_2 — площади граней DAC и DAB; S — полная поверхность тетраэдра. Отсюда

$$S_{AD_1C} = S_{DA_1C} = \frac{S}{3} - S_1, \; S_{AD_1B} = S_{DA_1B} = \frac{S}{3} - S_2.$$

Подстановка последних равенств в уравнение (1) преобразует его в тождество, что доказывает утверждение задачи.

Задача 3. В гранях тетраэдра $DABC$ заданы точки D_1, A_1, B_1, C_1, которые соединены со всеми вершинами граней, которым принадлежат. Отношения площадей каждого из полученных треугольников к площади грани, которая имеет общую сторону с треугольником, равны. Доказать, что прямые DD_1, AA_1, BB_1, CC_1 имеют общую точку.

Доказательство

Обозначим S_1 и S_2 — площади граней соответственно ADC и ADB. Имеем (рис. 1):

$$\frac{S_{AD_1C}}{S_1} = \frac{S_{AD_1B}}{S_2}, \quad \frac{S_{A_1DB}}{S_2} = \frac{S_{A_1DC}}{S_1},$$

следовательно, выполняется условие (1).

Задача 4. Доказать, что в тетраэдре $DABC$ прямые DI, AI_1, BI_2, CI_3, где I, I_1, I_2, I_3 — инцентры соответствующих граней, пересекаются в одной точке, если произведения длин противоположных ребер равны между собой.

Доказательство

Докажем, что DI и AI_1 пересекаются. Пусть r и r_1 — радиусы окружностей, вписанных в треугольники ABC и DBC. Имеем:

$$2S_{AIC} = r \cdot b, \quad 2S_{AIB} = r \cdot c, \quad 2S_{DI_1C} = r_1 \cdot b_1, \quad 2S_{DI_1B} = r_1 \cdot c_1$$

(b и b_1, c и c_1 — длины ребер соответственно AC и CD, AB и BD). Подставляя эти выражения в (1) и учитывая условие $bc_1 = b_1c$, получим требуемое утверждение.

Задача 5. Доказать, что четыре высоты тетраэдра пересекаются в одной точке, если произведения косинусов двугранных углов при скрещивающихся ребрах равны.

Доказательство

Пусть H — проекция вершины D на грань ABC, а H_1 — проекция вершины A на грань DBC. По теореме про площадь проекции плоской фигуры имеем $S_{AHC} = S_{ADC} \cdot \cos\varphi_1$, где φ_1 — линейный угол двугранного угла с ребром AC.

Далее запишем: $S_{AHB} = S_{ADB} \cdot \cos\varphi_2$, где φ_2 — линейный угол двугранного угла с ребром AB; $S_{DH_1C} = S_{ADC} \cdot \cos\varphi_3$, где φ_3 — линейный угол двугранного угла с ребром CD; $S_{DH_1B} = S_{ADB} \cdot \cos\varphi_4$, где φ_4 — линейный угол двугранного угла с ребром DB.

Подставляя эти соотношения в формулу (1) и учитывая условие, получим утверждение задачи.

81. Сечение одно — способы разные

Условие задачи «обманчиво» просто:

Плоскость пересекает боковые ребра правильной четырехугольной пирамиды в точках, расстояния от которых до вершин равны a, b, c, d. Доказать, что

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{1}{b} + \frac{1}{d}.$$

Но стоит «чуть-чуть» переписать иначе буквенное равенство:

$$\frac{a+c}{ac} = \frac{b+d}{bd},$$

как ассоциативно возникает сравнение с формулой биссектрисы внутреннего угла треугольника: $l_a = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$. Срабатывает!

Первый способ

Пусть $SABCD$ — правильная четырехугольная пирамида (рис. 1). $PNQM$ — ее сечение данной плоскостью, $SN = a$, $SQ = b$, $SM = c$, $SP = d$. Пусть SO — высота пирамиды; α — угол между высотой пирамиды и боковым ребром:

$$\alpha = \angle NSO = \angle QSO = \angle MSO = \angle PSO.$$

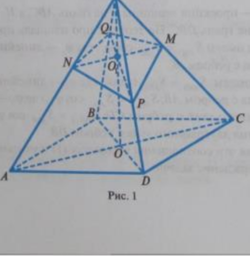

Рис. 1

Пусть прямая SO пересекает сечение $PNQM$ в некоторой точке O_1. Поскольку SO — биссектриса углов ASC и BSD, то SO_1 — биссектриса треугольников SNM и SPQ. Тогда по формуле длины биссектрисы $\left(l_a = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}\right)$, имеем

$$\frac{2bd}{b+d}\cos\alpha = SO_1 = \frac{2ac}{a+c}\cos\alpha,$$

отсюда $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{1}{b} + \frac{1}{d}$, что и требовалось доказать.

Второй способ

Обозначим $S_{NSO_1} = S_1$, $S_{QSO_1} = S_2$, $S_{MSO_1} = S_3$, $S_{PSO_1} = S_4$.

Имеем $\frac{S_1}{S_2} = \frac{aSO_1}{bSO_1} = \frac{a}{b}$, отсюда

$$S_2 = \frac{b \cdot S_1}{a}. \tag{1}$$

Далее $\frac{S_1}{S_3} = \frac{aSO_1}{cSO_1} = \frac{a}{c}$, отсюда

$$S_3 = \frac{c \cdot S_1}{a}, \tag{2}$$

И $\frac{S_1}{S_4} = \frac{aSO_1}{dSO_1} = \frac{a}{d}$, отсюда

$$S_4 = \frac{dS_1}{a}. \tag{3}$$

Кроме того,

$$\frac{S_{SNM}}{S_{SAC}} = \frac{S_1 + S_3}{S_{SAC}} = \frac{ac}{SA^2} \text{ и } \frac{S_{SQP}}{S_{SBD}} = \frac{S_2 + S_4}{S_{SCD}} = \frac{bd}{SA^2},$$

отсюда

$$\frac{S_1 + S_3}{S_2 + S_4} = \frac{ac}{bd}.$$

Учитывая соотношения (1), (2) и (3), получим

$$\frac{S_1 + \frac{cS_1}{a}}{\frac{bS_1}{a} + \frac{dS_1}{a}} = \frac{ac}{bd},$$

или $\frac{a+c}{b+d} = \frac{ac}{bd}$, откуда $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{1}{b} + \frac{1}{d}$.

Третий способ

Пусть боковое ребро пирамиды равно l. Тогда

$$\overline{SN}=\frac{a}{l}\overline{SA};\quad \overline{SQ}=\frac{b}{l}\overline{SB};\quad \overline{SM}=\frac{c}{l}\overline{SC};\quad \overline{SP}=\frac{d}{l}\overline{SD}. \qquad (1)$$

Согласно условию принадлежности точек N, Q, M, P одной плоскости, имеем

$$\overline{SP}=\alpha\overline{SN}+\beta\overline{SQ}+\gamma\overline{SM},\ \text{где}\ \alpha+\beta+\gamma=1. \qquad (2)$$

Учитывая соотношения (1), получим:

$$\frac{d}{l}\overline{SD}=\alpha\cdot\frac{a}{l}\overline{SA}+\beta\cdot\frac{b}{l}\overline{SB}+\gamma\cdot\frac{c}{l}\overline{SC},\ \text{т. е.}$$

$$\overline{SD}=\frac{\alpha a}{d}\overline{SA}+\frac{\beta b}{d}\overline{SB}+\frac{\gamma c}{d}\overline{SC}. \qquad (3)$$

Заметим, что $\overline{SB}+\overline{SD}=\overline{SA}+\overline{SC}$, а значит,

$$\overline{SD}=\overline{SA}-\overline{SB}+\overline{SC}. \qquad (4)$$

Сравнивая правые части формул (3) и (4), получим

$$\frac{\alpha\cdot a}{d}\overline{SA}+\frac{\beta b}{d}\overline{SB}+\frac{\gamma\cdot c}{d}\overline{SC}=\overline{SA}-\overline{SB}+\overline{SC},$$

откуда

$$\frac{\alpha a}{d}=1,\quad \frac{\beta b}{d}=-1,\quad \frac{\gamma c}{d}=1,$$

откуда

$$\alpha=\frac{d}{a};\quad \beta=\frac{-d}{b};\quad \gamma=\frac{d}{c}. \qquad (5)$$

Подставим полученные выражения в выражения (2)

$$\frac{d}{a}-\frac{d}{b}+\frac{d}{c}=1,\ \text{откуда}\ \frac{d}{a}+\frac{d}{c}=1+\frac{d}{b},\ \text{или}\ \frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{1}{d}+\frac{1}{b},$$

что и требовалось доказать.

Четвертый способ

Пусть NM пересекает AC в точке P (рис. 2). По теореме Менелая для ΔASO и прямой NM:

$$\frac{AN\cdot SO_1\cdot OP}{NS\cdot O_1O\cdot PA}=1,\ \text{откуда}$$

$$\frac{AN\cdot SO_1}{NS\cdot O_1O}=\frac{AP}{OP}. \qquad (1)$$

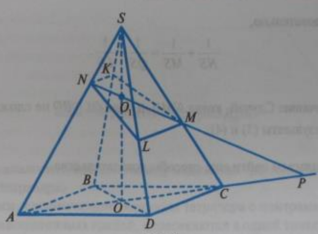

Рис. 2

По теореме Менелая для ΔCSO и прямой NM:

$$\frac{CM\cdot SO_1\cdot OP}{MS\cdot O_1O\cdot PC}=1,$$

откуда

$$\frac{CM\cdot SO_1}{MS\cdot O_1O}=\frac{PC}{OP}. \qquad (2)$$

Пусть b — боковое ребро. Прибавим (1) и (2):

$$\left(\frac{AN}{NS}+\frac{CM}{MS}\right)\cdot\frac{SO_1}{O_1O}=\frac{AP+PC}{OP}=\frac{AC+2PC}{OC+PC}=\frac{2OC+2PC}{OC+PC}=2,$$

откуда

$$\frac{AN}{NS}+\frac{CM}{MS}=\frac{2SO_1}{O_1O},\ \text{или}\ \frac{b-NS}{NS}+\frac{b-MS}{MS}=\frac{2SO_1}{O_1O},$$

$$\text{или}\ \frac{b}{NS}+\frac{b}{MS}=\frac{2SO_1}{O_1O}+2,$$

$$\text{или}\ b\left(\frac{1}{NS}+\frac{1}{MS}\right)=2\frac{(SO_1+O_1O)}{O_1O}=2\frac{SO}{O_1O},$$

откуда

$$\frac{1}{NS}+\frac{1}{MS}=\frac{2SO}{b\cdot O_1O}. \qquad (3)$$

Аналогично,

$$\frac{1}{QS}+\frac{1}{LS}=\frac{2SO}{b\cdot O_1O}. \qquad (4)$$

Следовательно,

$$\frac{1}{NS}+\frac{1}{MS}=\frac{1}{QS}+\frac{1}{LS}.$$

Замечание: Случай, когда $NM \parallel AC$ или $QL \parallel BD$ не сложен и дает те же результаты (3) и (4).

Предлагаем найти еще способы доказательства.

82. Медианы тетраэдра

Опять аналогия. Аналогия между медианами треугольника и медианами тетраэдра.

Отрезки, соединяющие вершины тетраэдра с центрами тяжести противоположных граней, пересекаются в одной точке, делящей каждый из них в отношении $1:3$. Эти отрезки называются медианами тетраэдра.

Первый способ

Пусть M — середина ребра BC тетраэдра $DABC$ (рис. 1). Отрезки DM и AM — медианы граней DBC и ABC, G', G'' — центроиды треугольников DBC и ABC.

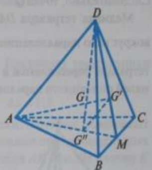

Рис. 1

Поскольку

$$MG'':MA=MG':MD=1:3,$$

то отрезок $G'G''$ параллелен ребру AD и равен $\frac{1}{3}AD$. Обозначим G точку пересечения медиан AG' и DG''. Треугольники $GG'G''$ и GAD подобны и

$$G'G:GA=G''D:GD=G'G'':AD=1:3.$$

Итак, отрезки $G'A$ и $G''D$ делятся в точке пересечения G в отношении $1:3$.

Аналогично доказывается, что и отрезки, соединяющие вершины B и C с центроидами граней ACD и ABD, пересекают отрезок DG'' и делят его также в отношении $1:3$, и потому проходят через ту же точку G.

Второй способ
(описанный параллелепипед)

Через скрещивающиеся ребра тетраэдра $DABC$ проведем параллельные плоскости. Получим параллелепипед $AA_1BB_1DD_1CC_1$, описанный вокруг тетраэдра $DABC$ (рис. 2).

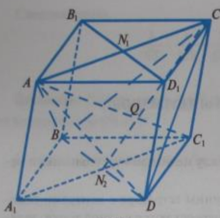

Рис. 2

Лемма. Диагональ описанного параллелепипеда пересекает одну из граней в ее центроиде. Доказать.

Доказательство

Проведем диагональное сечение AA_1C_1C. Ему принадлежат отрезки AC_1 и CN_2 (N_2 — середина отрезка BD). Отрезок CN_2 является медианой в треугольнике BCD. Эта медиана пересекает диагональ параллелепипеда AC_1 в точке Q. Из подобия треугольников N_2QC_1 и CQA следует, что

$$CQ:QN_2 = AC:N_2C_1 = 2:1.$$

Следовательно, точка Q — центроид треугольника CBD.

Медиана тетраэдра $DABC$ принадлежит диагонали описанного вокруг него параллелепипеда и равна $\frac{2}{3}$ этой диагонали, а медианы тетраэдра пересекаются в одной точке — точке пересечения диагоналей описанного параллелепипеда.

Третий способ

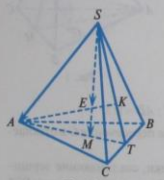

Рис. 3

Пусть M и K — точки пересечения медиан треугольников ABC и SBC в тетраэдре $SABC$ (рис. 3). Тогда

$$MT:MA = 1:2,\ KT:SK = 1:2.$$

Поскольку отрезки MS и AK лежат в одной плоскости, то они пересекаются (в точке E). Пусть

$$AE:EK = p:q; SE:EM = m:n.$$

Тогда

$$\overline{SM} = \frac{1}{3}\overline{SA} + \frac{2}{3}\overline{ST},$$

$$\overline{SE} = \frac{m}{m+n}\overline{SM} = \frac{m}{3(m+n)}\overline{SA} + \frac{2m}{3(m+n)}\overline{ST}.$$

$$\overline{SE} = \frac{q}{p+q}\overline{SA} + \frac{p}{p+q}\overline{SK} = \frac{q}{p+q}\overline{SA} + \frac{2p}{3(p+q)}\overline{ST},$$

значит,

$$\begin{cases} \dfrac{q}{p+q} = \dfrac{m}{3(m+n)}, \\ \dfrac{2p}{3(p+q)} = \dfrac{2m}{3(m+n)}, \end{cases}$$

отсюда $q:p = 1:3$, значит, $m:n = 3:1$.

Аналогично доказывается, что отрезки, которые соединяют вершины B и C с точками пересечения медиан противоположных граней, делятся в отношении $3:1$.

Четвертый способ

Пусть X — произвольная точка. Тогда имеет место зависимость

$$\overline{XM} = \frac{1}{3}(\overline{XA} + \overline{XB} + \overline{XC}),\quad \overline{XK} = \frac{1}{3}(\overline{XB} + \overline{XC} + \overline{XS}) \text{ (рис. 3).}$$

Вычтем почленно эти равенства, получим

$$\overline{KM} = \frac{1}{3}\overline{SA}.$$

Это значит, что $KM \parallel SA$ и $KM:SA = 1:3$. Поскольку треугольники EMK и EAS подобны, то

$$ME:ES = EK:AE = MK:AS = 1:3.$$

Аналогично доказывается, что отрезки, которые соединяют вершины B и C с точками пересечения медиан противоположных граней, пересекают один из данных отрезков AK или SM в точке E и делятся этой точкой в таком же отношении.

20 - 6-1744

83. Теорема Чевы... в стереометрии

«Пересекаются или не пересекаются?» — вопрос в стереометрии встречается достаточно часто хотя бы из-за скрещивающихся прямых: например, высоты тетраэдра могут и не пересекаться (сравните с треугольником). К сожалению, здесь «планиметрическая» теорема Чевы не поможет.

Однако...

Задача. В боковых гранях SBC, SAC и SAB тетраэдра $SABC$ проведены биссектрисы SA_1, SB_1, SC_1 соответственно. Доказать, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

Первый способ

Так как прямые AA_1, BB_1 и CC_1 принадлежат одной плоскости, то возникает возможность применить теорему Чевы (рис. 1). Достаточно доказать, что

$$\frac{AB_1 \cdot CA_1 \cdot BC_1}{B_1C \cdot A_1B \cdot C_1A} = 1. \quad (*)$$

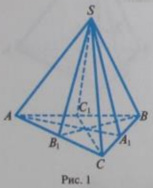

Рис. 1

По свойству биссектрисы:

$$\frac{AB_1}{B_1C} = \frac{AS}{SC};\ \frac{CA_1}{A_1B} = \frac{SC}{SB};$$

$$\frac{BC_1}{C_1A} = \frac{BS}{SA}.$$

Подставим эти значения в соотношение (*), получим

$$\frac{AB_1 \cdot CA_1 \cdot BC_1}{B_1C \cdot A_1B \cdot C_1A} = \frac{AS \cdot SC \cdot BS}{SC \cdot SB \cdot SA} = 1,$$

значит, прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

Второй способ

Докажем задачу без применения теоремы Чевы.

Отложим на боковых ребрах $SABC$ равные отрезки SD, SE, SF (рис. 2). Пусть SA_1 пересекает EF в точке A_2, SB_1 пересекает DF в точке B_2, SC_1 пересекает DE в точке C_2. Так как SA_2 — биссектриса равнобедренного треугольника ESF, то SA_2 — медиана, а значит, точка A_2 — середина EF. Аналогично доказываем, что B_2 — середина DF, C_2 — середина DE.

Итак, отрезки DA_2, EB_2 и FC_2 — медианы треугольника DEF, а значит, пересекаются в одной точке (точке M).

Таким образом, плоскости SA_2D, SB_2E и SC_2F имеют общую прямую SM.

Пусть прямая SM пересекает плоскость ABC в точке Q. Точка Q принадлежит плоскостям ABC и SDA_2, так как $Q \in SM$, $SM \in (SDA_2)$. Значит, точка Q принадлежит общей прямой этих плоскостей, т. е. $Q \in AA_1$. Аналогично доказывается, что $Q \in BB_1$ и $Q \in CC_1$.

Таким образом, прямые AA_1, BB_1 и CC_1 имеют общую точку Q.

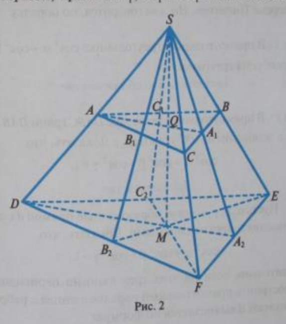

Рис. 2

20*

84. Прямоугольный тетраэдр как Клондайк аналогий

Читатели, знакомые с книгами автора, наверняка заметили «охоту за аналогиями». Не буду приводить вновь слова Штефана Банаха «Математик — это тот... и т. д.». Скажу только, что обращение к аналогии вполне естественно — это путь в научных исследованиях и в методике преподавания математики. Сам удивляюсь, что до сих пор не обратил должного внимания на аналогию между прямоугольным треугольником и прямоугольным тетраэдром. Особое внимание — пространственной теореме Пифагора. Но, как говорится, по порядку.

Задача 1. В прямоугольном треугольнике $\cos^2\alpha+\cos^2\beta=1$, где α и β — острые углы треугольника.

Доказательство общеизвестно.

Задача 1°. В прямоугольном тетраэдре $DABC$ грани DAB, DBC, DAC образуют с основанием ABC углы α, β, γ. Доказать, что

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

Доказательство

Лемма. Пусть α, β, γ — углы, образованные прямой d с тремя взаимно перпендикулярными прямыми. Доказать, что

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

Действительно, если на этих трех взаимно перпендикулярных прямых построить прямоугольный параллелепипед с ребрами a, b, c, то его диагональ d вычисляется по формуле

$$d^2=a^2+b^2+c^2.$$

Но $a=d\cos\alpha$; $b=d\cos\beta$; $c=d\cos\gamma$. Значит,

$$d^2=d^2\left(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma\right),$$

$$\text{или } \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

Перейдем к задаче 1° (рис. 1).

Поскольку точка D проектируется в ортоцентр H грани ABC, то линейные углы двугранных углов при основании образуются высотами соответственных граней, например, $\angle DEC=\gamma$. Поскольку $\angle EDC=90°$, то

$$\angle HDC=\angle DEC=\gamma.$$

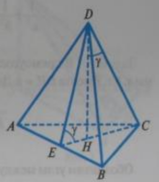

Рис. 1

Значит, два других аналогичных линейных угла равны β ($\angle HDB$) и α ($\angle HDA$). Высота DH образует с тремя перпендикулярными прямыми DA, DB, DC углы α, β, γ. По лемме

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

Задача 2. Площадь прямоугольного треугольника с катетами a и b равна $\frac{1}{2}ab$.

Задача 2°. Объем прямоугольного тетраэдра равен $\frac{1}{6}abc$ (a, b, c — ребра при вершине D).

Указание. *Применить формулу* $V=\frac{1}{6}a_1a_2d\sin\varphi$ *(a_1 и a_2 — скрещивающиеся ребра тетраэдра, d — расстояния между ними, φ — угол между ними).*

Задача 3. В прямоугольном треугольнике с катетами a и b имеет место равенство

$$\frac{1}{h^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$$

(h — высота, опущенная из вершины прямого угла).

Первый способ

Пусть $\angle CBA=\alpha$ (рис. 2). Тогда

$$a=\frac{h}{\sin\alpha},\ b=\frac{h}{\cos\alpha} \text{ и}$$

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{h^2}=\frac{1}{h^2}.$$

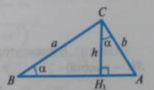

Рис. 2

Второй способ

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}=\frac{c^2}{4S^2}=\frac{1}{h^2}.$$

Задача 3°. В прямоугольном тетраэдре $DABC$ боковые ребра равны a, b, c. Высота $DH=h$. Доказать, что

$$\frac{1}{h^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}.$$

Первый способ

Обозначим углы между высотой DH и ребрами DA, DB, DC (рис. 1) через α, β, γ соответственно. Тогда

$$\cos\alpha=\frac{DH}{DA}=\frac{h}{a};\ \cos\beta=\frac{h}{b};\ \cos\gamma=\frac{h}{c}.$$

По лемме:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1,$$

$$\text{или } \frac{h^2}{a^2}+\frac{h^2}{b^2}+\frac{h^2}{c^2}=1,$$

$$\text{откуда } \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{h^2}.$$

Второй способ

Имеем:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2}{a^2b^2c^2}=$$

$$=\frac{4\left(S_1^2+S_2^2+S_3^2\right)}{36V^2}=\frac{S^2}{9V^2}=\frac{1}{h^2},$$

где была применена пространственная теорема Пифагора (см. ниже):

$$S_1^2+S_2^2+S_3^2=S^2.$$

Задача 4. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C=90°$)

$$BC=\sqrt{AB\cdot BH_3}.$$

Задача 4°. В прямоугольном тетраэдре $SCAB$ (ABC — основание, SH — высота)

$$S_{SAB}=\sqrt{S_{ABC}\cdot S_{AHB}}.$$

Доказательство

По теореме о площади проекции плоской фигуры (рис. 3):

$$S_{SAB}=\frac{S_{AHB}}{\cos\varphi} \qquad (1)$$

(φ — угол между гранями CAB и SAB).

$$\cos\varphi=\frac{S_{SAB}}{S_{ABC}}. \qquad (2)$$

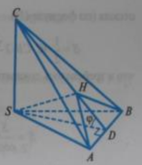

Рис. 3

Подставим (2) в (1):

$$S_{SAB}=\frac{S_{AHB}\cdot S_{ABC}}{S_{SBA}},$$

откуда $S_{SAB}^2=S_{ABC}\cdot S_{AHB}$.

Теорема Пифагора

Пусть $S_{QAC}=S_2, S_{QBC}=S_1, S_{QAB}=S_3$, $S_{ABC}=S$ (Q — вершина прямоугольного тетраэдра $QABC$) (рис. 4). Требуется доказать, что

$$S_1^2+S_2^2+S_3^2=S^2.$$

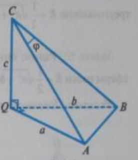

Рис. 4

Первый способ

Обозначим $QA=a, QB=b, QC=c$. Имеем:

$$AC^2=a^2+c^2,\ CB^2=c^2+b^2,\ BA^2=b^2+a^2.$$

Далее $S_3=\frac{ab}{2}, S_2=\frac{ac}{2}, S_1=\frac{bc}{2}$. Обозначим $\varphi=\angle ACB$:

$$S=\frac{1}{2}AC\cdot CB\cdot\sin\varphi. \qquad (1)$$

$$\cos\varphi=\frac{a^2+c^2+b^2+c^2-a^2-b^2}{2\sqrt{\left(a^2+c^2\right)\left(b^2+c^2\right)}}=\frac{c^2}{\sqrt{\left(a^2+c^2\right)\left(b^2+c^2\right)}}.$$

$$\sin\varphi=\sqrt{1-\frac{c^4}{\left(a^2+c^2\right)\left(b^2+c^2\right)}}=$$

$$=\sqrt{\frac{a^2b^2+a^2c^2+c^2b^2+c^4-c^4}{\left(a^2+c^2\right)\left(b^2+c^2\right)}}=\sqrt{\frac{4\left(S_1^2+S_2^2+S_3^2\right)}{AC^2\cdot CB^2}},$$

отсюда (по формуле (1))

$$S=\frac{1}{2}AC\cdot CB\cdot 2\frac{\sqrt{S_1^2+S_2^2+S_3^2}}{AC\cdot CB}=\sqrt{S_1^2+S_2^2+S_3^2},$$

что и требовалось доказать.

Второй способ

$$S=\frac{S_1}{\cos\alpha};S=\frac{S_2}{\cos\beta};S=\frac{S_3}{\cos\gamma};$$

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=\frac{S_1^2+S_2^2+S_3^2}{S^2}=1.$$

Задача 5. Радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника: $R=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$.

Задача 5°. Радиус описанной около прямоугольного тетраэдра сферы равен $R=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

Указание. Дополнить тетраэдр до параллелепипеда.

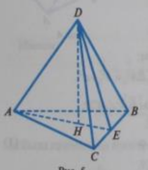

Рис. 5

В прямоугольном треугольнике наибольшая сторона — гипотенуза. В прямоугольном тетраэдре наибольшую площадь имеет грань-гипотенуза: в тетраэдре $DABC$ — грань ABC. Сравним, например, площади граней ABC и DBC (рис. 5):

$$S_{ABC}\cdot\cos\angle DEA=S_{BDC}.$$

Значит, $S_{ABC}>S_{BDC}$.

Заметим, что для доказательства можно применить пространственную теорему Пифагора.

Задача 6. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C=90°$)

$$c^3>a^3+b^3.$$

Доказательство

Имеем $c>a$ и $c>b$. Первое неравенство умножим на a^2, второе на b^2 и сложим:

$$c\cdot a^2>a\cdot a^2;\ c\cdot b^2>b\cdot b^2;\ c\left(a^2+b^2\right)>a^3+b^3,\text{ или } c^3>a^3+b^3.$$

Задача 6°. Доказать, что в прямоугольном тетраэдре

$$S^3>S_1^3+S_2^3+S_3^3.$$

Доказательство

По аналогии с прямоугольным треугольником $S>S_1$, $S>S_2$, $S>S_3$ или

$$S\cdot S_1^2>S_1^3;S\cdot S_2^2>S_2^3;S\cdot S_3^2>S_3^3.$$

Значит,

$$S\left(S_1^2+S_2^2+S_3^2\right)>S_1^3+S_2^3+S_3^3.$$

Поскольку

$$S_1^2+S_2^2+S_3^2=S^2,\text{ то } S^3>S_1^3+S_2^3+S_3^3,$$

что и требовалось доказать.

Глава IX. Планиметрия. Коллекционные задачи

85. Сенсационная находка геометрических археологов

Первая задача была известна еще Архимеду (ее так и называют — «задача Архимеда»):

«Сумма квадратов отрезков, на которые точка пересечения делит взаимно перпендикулярные хорды, равна квадрату диаметра окружности».

В немного ином виде эта задача встречается в древней Индии («задача Парамадисвари»):

«Доказать, что во вписанном четырехугольнике, диагонали которого взаимно перпендикулярны, квадратный корень из суммы квадратов длин двух противоположных сторон равен диаметру окружности, описанной вокруг этого четырехугольника».

За двадцать пять столетий своего существования задача (в одном или в другом виде) неоднократно решалась, причем многими способами и ничего необычного сегодня мы бы в ней не увидели, если бы... в журнале «Квант» («Задачник „Кванта“», № 582) не появилась **новая** авторская задача:

«В окружность с центром O вписан четырехугольник с взаимно перпендикулярными диагоналями. Доказать, что расстояние от точки O до стороны четырехугольника равно половине длины противоположной стороны».

Удивило не только внешнее сходство задач, но и сходство решений в каждом из способов. Действительно, смотрите сами.

Задача Архимеда. Первый способ

Пусть AB и CD — взаимно перпендикулярные хорды окружности с центром O и радиусом R (рис. 1). Нужно доказать, что $BC^2+AD^2=4R^2$ (это равносильно утверждению задачи Архимеда).

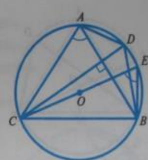

Рис. 1

Проведем диаметр CE. Поскольку $\angle CBE=90°$, а углы CAB и CEB равны, то $\angle ACD=\angle ECB$, откуда $AD=BE$.

Тогда, из прямоугольного треугольника CBE: $BC^2+BE^2=CE^2$, или $BC^2+AD^2=4R^2$, что и требовалось доказать.

Задача «Кванта». Первый способ

Пусть $ADBC$ — четырехугольник с взаимно перпендикулярными диагоналями, который вписан в окружность с центром O (рис. 2).

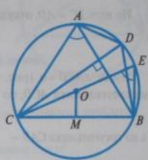

Рис. 2

Пусть M — середина BC, тогда длина отрезка OM является расстоянием от O до BC. Нужно доказать, что $OM=\frac{1}{2}AD$.

Проведем диаметр CE. Аналогично доказательству задачи Архимеда, имеем: $AD=BE$. В прямоугольном треугольнике CBE отрезок OM — средняя линия, поэтому $OM=\frac{1}{2}BE$, что и требовалось.

Задача Архимеда. Второй способ

В дальнейшем сохраним обозначения первого способа (рис. 3). Проведем хорду AE, параллельную CD. Тогда $AE\perp AB$, то есть $\angle EAB=90°$, откуда EB — диаметр окружности. Поскольку $CEAD$ — вписанная трапеция, то $CE=AD$.

Рис. 3

Следовательно, из прямоугольного треугольника ECB:

$$EC^2+BC^2=BE^2,$$

то есть $AD^2+BC^2=4R^2$, что и требовалось доказать.

Задача «Кванта». Второй способ

Рис. 4

Проведем хорду AE, которая параллельна CD (рис. 4). Из тех же соображений, что и при доказательстве задачи Архимеда имеем, что EB — диаметр окружности.

Отсюда следует, что треугольник ECB — прямоугольный. Пусть M — середина BC ($OM \perp BC$), тогда OM — средняя линия треугольника ECB (поскольку $OE = OB$), а поэтому $OM = \frac{1}{2}EC$.

Но ведь $EC = AD$, откуда $OM = \frac{1}{2}AD$, что и требовалось доказать.

Задача Архимеда. Третий способ

Пусть $\angle ACD = \alpha$ (рис. 5). Тогда $\angle CAB = 90° - \alpha$. Следовательно, из треугольника ACD, по следствию из теоремы синусов, имеем:

$$AD = 2R\sin\alpha,$$

а из треугольника CAB —

$$BC = 2R\sin(90° - \alpha) = 2R\cos\alpha.$$

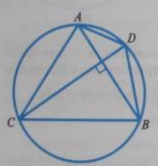

Рис. 5

Поэтому

$$AD^2 + BC^2 = $$
$$= 4R^2\sin^2\alpha + 4R^2\cos^2\alpha = 4R^2,$$

что и требовалось доказать.

Задача «Кванта». Третий способ

Рис. 6

Пусть $\angle CDB = \alpha$ (рис. 6). Тогда

$$\angle BOM = \frac{1}{2}\angle BOC = \alpha,$$

и значит, из прямоугольного треугольника BMO имеем:

$$OM = OB\cos\alpha = R\cos\alpha.$$

Далее,

$$\angle ACD = 90° - \angle CAB =$$
$$= 90° - \angle CDB = 90° - \alpha,$$

поэтому из треугольника ACD, по следствию из теоремы синусов, имеем, что

$$AD = 2R\sin\angle ACD =$$
$$= 2R\sin(90° - \alpha) = 2R\cos\alpha,$$

то есть $AD = 2OM$, что и требовалось доказать.

Задача Архимеда. Четвертый способ

Пусть H — ортоцентр треугольника BCD (рис. 7). Поскольку $BA \perp CD$, то $H \in BA$ и точка A является точкой пересечения продолжения высоты с описанной окружностью, а поэтому она симметрична точке H относительно стороны CD. Следовательно, $AD = DH$.

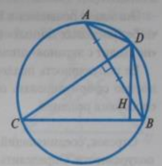

Рис. 7

По известной формуле геометрии треугольника имеем:

$$DH^2 = 4R^2 - BC^2.$$

Следовательно, $AD^2 + BC^2 = 4R^2$, что и требовалось доказать.

Задача «Кванта». Четвертый способ

Пусть H — ортоцентр треугольника BCD (рис. 8). Тогда (см. доказательство задачи Архимеда) $AD = DH$.

Пусть точка M — середина BC. Используя известный факт геометрии треугольника, получим, что: $OM = \frac{1}{2}DH$.

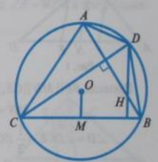

Рис. 8

Следовательно, $OM = \frac{1}{2}AD$, что и требовалось доказать.

Возникает сенсационная гипотеза: задача Архимеда и задача «Кванта» — тождественны — это одна и та же задача! Геометрия треугольника подтверждает это! Действительно,

$$\underbrace{4R^2 - BC^2 = DH^2}_{\text{задача Архимеда}} = AD^2 = \overbrace{DH^2 = 4OM^2}^{\text{задача Кванта}}.$$

86. Задача Д. С. Людмилова

Эта задача появилась в 1961 году в книге Д. С. Людмилова «Задачи без числовых данных» (Москва: Учпедгиз, 1961). С тех пор она «не сходит с экранов» школьных, районных олимпиад.

Ее популярность поддерживается коротким условием, возможностью сформулировать обратные условия, а также несколькими способами решений.

Отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, равен их полуразности. Определить сумму углов при основании.

Первый способ
(Людмилов Д. С.)

Рис. 1

Пусть M и N — середины оснований BC и AD трапеции $ABCD$ (рис. 1). Имеем

$$MN = \frac{AD - BC}{2} =$$
$$= AN - BM = DN - CM.$$

Проведя $BF \| MN \| CE$, получим

$$MN = BF = CE = AF = DE,$$

$$\angle D = \angle DCE = \frac{1}{2}\angle CEF,\ \angle A = \angle ABF = \frac{1}{2}\angle BFE, \text{откуда}$$

$$\angle A + \angle D = \frac{1}{2}\angle BFE + \frac{1}{2}\angle CEF = \frac{180°}{2} = 90°.$$

Второй способ

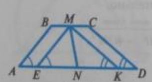

Рис. 2

Проведем $ME \| AB$ и $MK \| CD$ (рис. 2). Тогда в треугольнике EMK

$$EK = AD - BC = 2MN,$$

а это значит, что $\angle EMK = 90°$, следовательно,

$$\angle E + \angle K = 90° \text{ и } \angle A + \angle D = 90°.$$

Третий способ

Обозначим (рис. 3) $BM = MC = x$, $AN = ND = y$. Проведем $EA \| MN$, $KD \| MN$. Эти прямые пересекут прямую BC так, что четырехугольник $AEKD$ — параллелограмм, причем $BE = MN = KD$ (каждый из отрезков

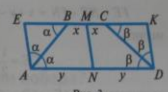

Рис. 3

равен $y - x$). Пусть $\angle BAN = \alpha$, $\angle CDN = \beta$. Поскольку треугольники EBA и KCD равнобедренные, то $\angle EAB = \alpha$, значит, $\angle EAN = 2\alpha$. Аналогично, $\angle KDN = 2\beta$. Из параллелограмма: $2\alpha + 2\beta = 180°; \alpha + \beta = 90°$.

Четвертый способ

Достроим трапецию $ABCD$ до треугольника EAD (рис. 4). Пусть $BC = a$; $AD = b$. Тогда $\frac{a}{b} = \frac{EM}{EN}$. Пусть $EM = x$, значит,

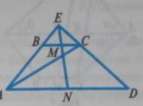

Рис. 4

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{x + \frac{b-a}{2}}, \text{ откуда } ax + \frac{ab - a^2}{2} = bx,\ x = \frac{a}{2}.$$

В треугольнике BEC $EM = \frac{1}{2}BC$, значит, $\angle E = 90°$ и в треугольнике EAD $\angle A + \angle D = 90°$.

Пятый способ

Проведем $BK \| MN$ (рис. 5). Поскольку $MN = \frac{b-a}{2}$ ($BC = a$; $AD = b$) и $AK = \frac{b-a}{2}$, то $AK = BK$, а значит,

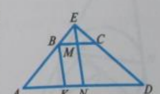

Рис. 5

$$AN = EN \text{ и } EN = \frac{1}{2}AD,$$

следовательно, $\angle E = 90°$, а значит, $\angle A + \angle D = 90°$.

Шестой способ

В трапеции $ABCD$ проведем $CF \| AB$ и $CE \| MN$ (рис. 6). Докажем, что в ΔCFD CE — медиана и

$$CE = \frac{1}{2}FD.$$

Рис. 6

Действительно. Пусть $BM = x$; $AN = y$. Тогда

$$FE = NE + FN = x + y - 2x = y - x;\ ED = y - x;\ CE = y - x,$$

значит,

$$CE = \frac{1}{2} FD \text{ и } \angle FCD = 90°,$$

следовательно, $\angle F + \angle D = \angle A + \angle D = 90°$.

Седьмой способ

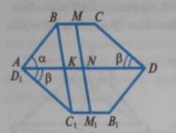

Рис. 7

Произведем симметрию трапеции относительно точки N — получим трапецию $D_1C_1B_1D$ (рис. 7). Обозначим $BM = MC = x$; $AN = ND = y$. Проведем прямую BKC_1 параллельную MN, причем $BC_1 = 2(y - x)$, а $AK = y - x$. Поскольку

$$\angle DD_1C = \angle D_1DC = \beta,$$

то $\angle BD_1C_1 = \alpha + \beta$, а поскольку

$$AK = \frac{1}{2} BC_1 \text{ и } BK = KC_1,$$

то $\alpha + \beta = 90°$, или $\angle A + \angle D = 90°$.

Предлагаем самостоятельно найти еще способы решения этой задачи.

87. Поражение или победа?

И пораженье от победы ты сам не должен отличать.

Б. Пастернак

Эта задача попалась мне в семидесятых годах прошлого столетия... в газете «Комсомольская правда» — был объявлен какой-то конкурс. И условие и решение привлекло меня (применялась вспомогательная окружность), но только теперь знание ее как теоремы привело к интересным последствиям. Итак,

Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AB и AC в точках N и M, K — точка пересечения биссектрисы угла B с прямой MN. Доказать, что $\angle BKC = 90°$.

Доказательство

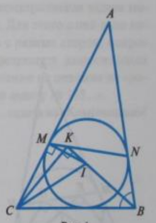

Рис. 1

Поскольку I — инцентр треугольника ABC (рис. 1), то $\angle BIC = 90° + \frac{A}{2}$.

$$\angle KMC = 180° - \angle AMN = 180° - \left(90° - \frac{A}{2}\right) = 90° + \frac{A}{2}$$

($\angle AMN$ легко находится из равнобедренного треугольника AMN). Поскольку

$$\angle KIC = 180° - \angle BIC = 180° - \left(90° + \frac{A}{2}\right) = 90° - \frac{A}{2},$$

то

$$\angle KMC + \angle KIC = 90° + \frac{A}{2} + 90° - \frac{A}{2} = 180°$$

и вокруг четырехугольника $CMKI$ можно описать окружность. Поскольку $\angle IMC = 90°$, то IC — диаметр этой окружности, а значит, $\angle BKC = 90°$.

21 - 6-1744

Попробовал продолжить понравившуюся задачу — провести биссектрису угла ACB, которая пересекла прямую MN в точке U (рис. 2). Как следовало ожидать, $\angle BUC = 90°$. Окружность, проходящая через точки C, K, U, B с диаметром BC напрашивалась сама собой (рис. 3) и стала напоминать ситуацию с ортоцентрическим треугольником. С ортоцентрическим? Только в данном случае будет не треугольник $H_1H_2H_3$, а треугольник KUK_1, где K_1 — точка касания вписанной окружности стороной BC. Аналог усиливался возможностью описать окружность около четырехугольника KIK_1B! А далее все было делом техники: $\angle UBC = \angle UKC$ (они опираются на дугу UC), $\angle IBK_1 = \angle IKK_1$ (они опираются на дугу IK_1), значит, $\angle K_1KI = \angle UKI$, следовательно, инцентр I будет инцентром треугольника KUK_1! (Равенство углов KUI и K_1UI — доказательство аналогично.)

Можно формулировать новую авторскую задачу:

Вписанная в треугольник окружность касается сторон BC, AC, AB в точках K_1, K_2, K_3. Биссектрисы углов B и C пересекают прямую K_2K_3 в точках V и U. Доказать, что треугольники ABC и K_1UV имеют общий инцентр.

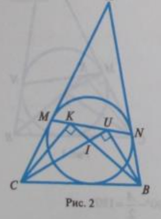

Рис. 2

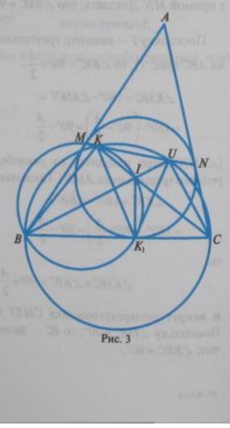

Рис. 3

Учитывая решение задачи, о котором речь шла выше, я рассчитывал...

Однако!

Успокоившись, я «с ужасом» увидел мгновенное (!) доказательство:

Четырехугольник BK_1VK_3 — дельтоид! Значит, BV — биссектриса угла K_3VK_1 (рис. 4). И все!

И все-таки, не забудем о цели книги: решить задачу еще одним способом. И тогда придется описывать окружности.

Вот теперь все!

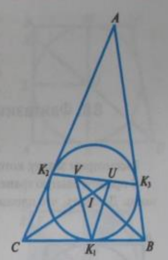

Рис. 4

* * *

Когда этот сюжет был написан, я непроизвольно обратил внимание на концовку предисловия к книге И. Ф. Шарыгина «Геометрия. 9—11 классы. Задачник» (Москва: Дрофа, 1997).

«Наверное, каждая содержательная геометрическая задача может быть источником целого ряда новых. Для этого с ней надо некоторое время «повозиться», посмотреть с разных сторон, попробовать перефразировать, обобщить. В результате удивительным образом может возникнуть новая, совершенно не похожая на «родителя» задача. Например, возьмем тут же задачу № 255...».

Я посмотрел на задачу № 255. Это была... задача из «Комсомолки»!

— Мистика?

— Ищите и обрящете!

21*

88. Фантазии на тему одной задачи

Рассмотрим задачу, которая «распадается» на две:

В прямоугольную трапецию с основаниями a и b вписана окружность. Доказать, что площадь трапеции равна ab.

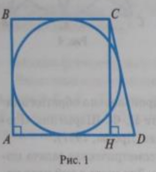

Рис. 1

Первый способ

Пусть в трапеции $ABCD$ ($AB \perp AD$) $BC = a$, $AD = b$ (рис. 1).

Проведем $CH \perp AD$. Обозначим r — радиус окружности. Тогда

$$2r + CD = a + b \text{ и } CD = a + b - 2r.$$

Поскольку $HD = b - a$, то из ΔCHD:

$$(b-a)^2 + (2r)^2 = \left((a+b) - 2r\right)^2,$$

или $b^2 - 2ab + a^2 + 4r^2 = (a+b)^2 - 4r(a+b) + 4r^2$,

или $2r = \dfrac{2ab}{a+b}$, значит, площадь S трапеции $ABCD$ равна

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot \frac{2ab}{a+b} = ab.$$

Второй способ

Пусть O — центр вписанной в трапецию $ABCD$ окружности (рис. 2). Тогда $\angle COD = 90°$. Проведем $OK \perp CD$ (K — точка касания окружности и стороны CD). Пусть M и N — точки касания с основаниями. Поскольку

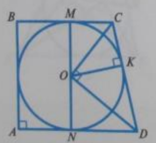

Рис. 2

$$MC = CK,\ ND = DK,$$
$$CK = a - r,\ KD = b - r, \text{ то}$$
$$r^2 = (a-r)(b-r), \text{ или}$$
$$r^2 = ab - ar - br + r^2,$$

откуда

$$r = \frac{ab}{a+b};\ S = \frac{ab}{a+b} \cdot (a+b) = ab.$$

Первая фантазия. Поскольку $AD = b$, то наверняка на стороне трапеции существует некоторая точка X, что площадь прямоугольного треугольника AXD равна половине площади трапеции $\left(\dfrac{ab}{2}\right)$. Найдем ее.

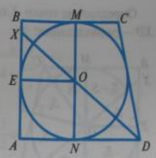

Рис. 3

Опустим из центра O перпендикуляр OE на сторону AB (рис. 3). Если $XA = a$, то $EX = a - r$, так как $EA = ON = r$.

Вторая фантазия. Может быть, отрезку XD принадлежит центр окружности, точка O, и тогда XD — равноделящая?! Поставлена вторая задача!

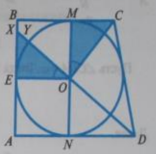

Рис. 4

Докажем, что это так.

Проведем прямую OD (рис. 4), которая пересечет сторону AB в точке Y. Рассмотрим треугольники MOC и YEO. Поскольку $EO = OM$ и $\angle YOE = \angle MOC$ как углы с взаимно перпендикулярными сторонами, то эти треугольники равны и $YE = MC = a - r$, т. е. точка Y совпадает с точкой X, а значит, фантазия оказалась реальностью: точка O принадлежит отрезку XD — равноделящей трапеции.

Мы получили возможность решить поставленную задачу

третьим способом:

треугольник XOE (рис. 4) подобен треугольнику XAD:

$$\frac{r}{b} = \frac{a-r}{a};\ ar = ab - br;\ r = \frac{ab}{a+b};\ S = ab.$$

Четвертый способ

Применим тригонометрию. Обозначим $\angle XDA = \alpha$. Тогда

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{XA}{AD} = \frac{a}{b}.$$

Из ΔXEO: $\operatorname{tg}\angle XOE = \dfrac{XE}{EO}$, или $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a-r}{r}$.

Значит,

$$\frac{a}{b} = \frac{a-r}{r};\ ar = ab - br;\ r = \frac{ab}{a+b};\ S = ab.$$

Определение точки X позволяет доказать вторым способом, что XD — равноделящая:

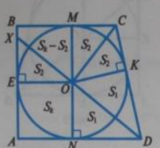

Рис. 5

Второй способ-А

Имеем (рис. 5):

$$S_{AXD} = \frac{1}{2}S = S_2 + S_k + S_1.$$

$$S_{XBCD} = 2S_2 + S_1 + (S_k - S_2) = $$
$$= S_2 + S_k + S_1,$$

значит, XD — равноделящая.

Третий способ-А

Пусть $\angle CDA = \alpha$. Тогда $\angle ODN = \dfrac{\alpha}{2}$. Имеем (из ΔOND)

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{b-r}. \qquad (1)$$

Далее,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2r}{(b-r)\left(1 - \frac{r^2}{(b-r)^2}\right)}. \qquad (2)$$

Но из ΔCHD (рис. 1)

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2r}{b-a}. \qquad (3)$$

Приравняем выражения (2) и (3)

$$\frac{2r}{b-a} = \frac{2r}{(b-r)\left(1 - \frac{r^2}{(b-r)^2}\right)}.$$

Получим

$$b - a = (b-r)\left(1 - \frac{r^2}{(b-r)^2}\right);\ b - a = b - r - \frac{r^2}{b-r},$$

откуда

$$r = \frac{ab}{a+b}. \qquad (4)$$

Найдем отрезок AX: из ΔAXD

$$AX = b \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Из формулы (1), учитывая формулу (4),

$$AX = b \cdot \frac{r}{b-r}, \text{ или } AX = b \cdot \frac{\frac{ab}{a+b}}{b - \frac{ab}{a+b}} = a.$$

Значит,

$$S_{AXD} = \frac{1}{2} \cdot AX \cdot AD = \frac{1}{2}ab,$$

следовательно, DX — равноделящая.

Предлагаем найти новые свойства равноделящей.

89. Возведение на трон

В книге «Собрание геометрических теоремъ и задачъ» (Составитель Е. Пржевальский. — Москва, 1901), условие и доказательство рассматриваемой задачи выглядело так:

«Около равностороннего треугольника ABC опишем окружность и на дуге BC возьмем произвольную точку M. Доказать, что

$$MA = MB + MC».$$

Первый способ

«Проведем хорду $CD \| MB$, которая пересечет прямую AM в точке F (рис. 1). ΔADF и ΔMFC — равносторонние, потому что

$$\angle ADC = \angle ABC = 60°,$$
$$\angle DAM = \angle BAC = 60°,$$
$$\angle FCM = \angle BDC = \angle BAC = 60°,$$
$$\angle FMC = \angle ABC = 60°,$$

а потому

$$AF = AD = BM,\ FM = CM$$
$$\text{и } AF + FM = BM + CM$$

или $AM = BM + CM$».

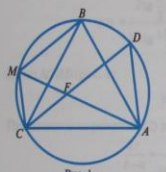

Рис. 1

Задача, может быть, осталась незамеченной, если бы на нее не обратил внимание А. И. Мостовой в книге «Различные способы доказательств в курсе геометрии восьмилетней школы» (Пособие для учителей. — Москва: Просвещение, 1965). Он привел несколько способов доказательств, что в то время (да и сейчас тоже) было явлением, и, я думаю, впервые, применил к этой задаче теорему Птолемея! (См. способ 13.)

Второй способ
(у А. И. Мостового он первый)

Отложим на отрезке MA отрезок $MD = MC$. Соединим точку D с точкой C (рис. 2). Равнобедренный треугольник DMC с углом при вершине DMC, равным $60°$, будет равносторонним, т. е. $MC = DC$. Кроме того, $\angle BMC = \angle ADC = 120°$.

К тому же $AC > DC$. Следовательно, $\Delta ADC = \Delta BMC$ (по четвертому признаку равенства треугольников) и $AD = MB$, значит, $MA = MB + MC$.

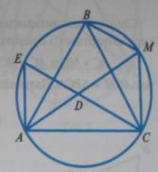

Рис. 2

Третий способ

Вновь отложим на отрезке MA (рис. 2) отрезок MD, равный MC. Докажем иначе, чем во втором способе, что $AD = MB$.

Воспользуемся вторым признаком равенства треугольников:

$$DC = MC, \angle ADC = \angle BMC \text{ и } \angle ACD = \angle BCM$$
$$(\text{поскольку } \angle DAC = \angle CBM) \text{ и } \angle ACD = \angle BCM.$$

Четвертый способ

Отложим $AD = MB$ (рис. 2). Имеем первый признак равенства треугольников ADC и BMC: $AD = MB$, $AC = BC$ как стороны равностороннего треугольника, и $\angle DAC = \angle MBC$ как вписанные, опирающиеся на одну дугу. Из равенства треугольников следует: $CD = MC$, т. е. ΔDMC — равнобедренный, а так как $\angle DMC = 60°$, то ΔDMC — равносторонний и $DM = MC$.

Пятый способ

На продолжении BM (рис. 3) отложим отрезок MN, равный MC (можно продолжить MC и на ее продолжении отложить отрезок, равный MB). Так как

$$\angle BMC = 120°,$$
$$\text{то } \angle CMN = 60°,$$

и равнобедренный треугольник CMN будет равносторонним.

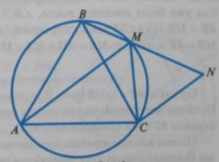

Рис. 3

Далее, $\Delta AMC = \Delta BNC$ ($AC = BC$, $MC = NC$ и $\angle ACM = \angle BCN$, так как каждый из них является суммой углов в $60°$ и $\angle BCM$). Из равенства треугольников следует, что

$$AM = MB + MN = MB + MC.$$

Шестой способ

Сделав дополнительные построения пятого способа, воспользуемся четвертым (!) признаком. Так как

$$AC > MC \text{ и } AC = BC, MC = NC, \angle AMC = \angle MNC = 60°,$$

то $\Delta ACM = \Delta BCN$. Дальнейшее очевидно.

Седьмой способ

По аналогии с предыдущими построениями продолжим MB за точку B (рис. 4) и отложим $NB = MC$. Точки A и N соединим.

Поскольку $AC = AB$, $MC = NB$ и $\angle ACM = \angle ABN$ как углы, дополняющиеся одним и тем же углом ABM до $180°$, треугольники ACM и ABN равны. Из равенства этих треугольников следует: $MA = NA$, т. е. ΔANM — равнобедренный. Но $\angle NMA = 60°$, значит,

$$MA = MN = MB + BN = MB + MC.$$

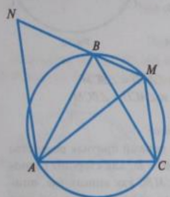

Рис. 4

Восьмой способ

Как и в первом случае отложим $MD = MC$ (рис. 2). Продолжим CD до пересечения с окружностью в точке E и соединим E с A. Как уже было доказано выше, $\angle ACE = \angle BCM$, а, следовательно, $AE = MB$. Но ΔADE равносторонний (докажите!), и $AE = AD$. Итак, $MB = AE = AD$, т. е. $MB = AD$ и $MA = MB + MC$.

Девятый—одиннадцатый способы

Так как $\cup AE = \cup MB$ (рис. 2), то соединив B с E, получим $BE \| MA$. Поэтому построение можно начать с проведения $BE \| MA$ или с проведения $EC \| MB$ (десятый способ!).

Можно воспользоваться параллельным переносом или свойствами боковых сторон двух равнобедренных трапеций $MBEA$ и $CMBE$.

Двенадцатый способ

Продолжим MB за точку B и отложим $ME = MC$ (рис. 5). Соединим E с C. Равнобедренный треугольник MCE, у которого угол CME равен $60°$, будет равен равносторонним. Проведем $BD \| CE$; тогда, соединив точки D и C, получим параллелограмм $ECDB$ ($BD \| CE$ и $BE \| CD$, так как $\angle BDC = \angle BAC = 60°$).

Значит, $BE = CD$. Но $CD = AM$ (доказать!), а поэтому

$$MC = ME = MB + BE =$$
$$= MB + DC = MB + MA.$$

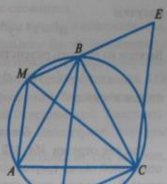

Рис. 5

И наконец, отдавая должное А. И. Мостовому, приведем способ, впервые, мо моему мнению, им предложенный: применение теоремы Птолемея.

Тринадцатый способ

Пусть $AB = BC = CA = a$. Тогда по теореме Птолемея (рис. 4)

$$MA \cdot BC = MB \cdot AC + MC \cdot AB \text{ или } MA \cdot a = MB \cdot a + MC \cdot a,$$

откуда $MA = MB + MC$.

Способы решения этой необыкновенной задачи на этом не окончились. В книге Э. Г. Готмана и З. А. Скопеца «Задача одна — решения разные» (Киев: Радянська школа, 1988), были предложены еще пять способов, среди которых был и способ с применением теоремы Птолемея. Рассмотрим остальные четыре.

Четырнадцатый способ

Отрезки MA, MB и MC являются сторонами треугольников AMB и BMC, в которых $\angle AMB = 60°$ и $\angle BMC = 120°$ (рис. 6). Применим к треугольникам теорему косинусов. Обозначим $AB = a$, $MA = x$, $MB = y$, $MC = z$. Учитывая, что

$$\cos 60° = \frac{1}{2} \text{ и } \cos 120° = -\frac{1}{2},$$

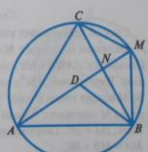

Рис. 6

получим

$$a^2 = x^2 + y^2 - xy; a^2 = y^2 + z^2 + yz.$$

Вычтем из первого равенства второе, имеем:

$$x^2 - z^2 - y(x+z) = 0, \text{ или } (x+z)(x-y-z) = 0,$$

отсюда $x = y + z$.

Пятнадцатый способ

Так как отрезки MA, MB и MC являются хордами окружности, описанной около треугольника ABC, то их длины можно выразить через R — радиус этой окружности, введя вспомогательный угол $\angle BAM = \alpha$. Имеем

$$x = 2R\sin(60^\circ + \alpha);\ y = 2R\sin\alpha;\ z = 2R\sin(60^\circ - \alpha).$$

Получим тождество $\sin(60^\circ + \alpha) = \sin\alpha + \sin(60^\circ - \alpha)$, которое доказать нетрудно, а значит, $x = y + z$.

Шестнадцатый способ

Площадь четырехугольника $ABMC$ выразим двумя способами. Пусть $\angle ANB = \varphi$, где N — точка пересечения отрезков AM и BC. Тогда площадь четырехугольника $ABMC$ равна $\frac{1}{2}ax\sin\varphi$. С другой стороны, площадь этого четырехугольника равна сумме площадей треугольников ABM и ACM. Нетрудно доказать, что $\angle ABM = \varphi$, а $\angle ACM = 180^\circ - \varphi$. Поэтому

$$\frac{1}{2}ax\sin\varphi = \frac{1}{2}ay\sin\varphi + \frac{1}{2}az\sin(180^\circ - \varphi),$$

откуда $x = y + z$.

Как современные геометры, З. А. Скопец и Э. Г. Готман не могли не предложить геометрические преобразования. Итак, поворот!

Семнадцатый способ

Способ напоминает второй способ, но...

Отложим на отрезке MA отрезок MD, равный отрезку MB (рис. 6). Поскольку $\angle AMB = 60^\circ$, то треугольник BDM является равносторонним. Треугольник ABC тоже равносторонний. Повернем треугольник BCM вокруг точки B на 60° так, чтобы точка C совпала с точкой A. Тогда точка M совпадет с точкой D и отрезок MC совместится с отрезком DA. Итак, $DA = MC$. Поэтому при любом выборе точки M на дуге BC имеем $MA = MB + MC$.

Но и на этом «водопад» способов не окончился.

Возведение задачи на трон как одной из лучших в многоспособье, произошло после следующего замечательного факта, вызывающего поначалу недоумение: для произвольной точки M (теперь будем обозначать ее точкой X) вершина C есть точка W для треугольника AXB (напомним, что точка W — точка пересечения биссектрисы внутреннего угла треугольника с описанной окружностью). Теперь возможны применения формулы Лагранжа о биссектрисе, формулы биссектрисы $l_a = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$, теоремы трилистника и, что, конечно, особенно радует автора, формулы $S = \frac{1}{2}AW \cdot MN$.

Итак,

Восемнадцатый способ
(аналог формулы Лагранжа $l_a^2 = bc - b_1c_1$)

Пусть X — произвольная точка окружности (рис. 7), XL — биссектриса угла AXB ($\cup BC = \cup AC$). Проведем доказательство, аналогично выводу формулы Лагранжа

$$l_a^2 = bc - b_1c_1.$$

Из подобия треугольников XCA и XLB:

$$\frac{XC}{XB} = \frac{XA}{XL}.$$

Обозначим $XB = a$, $XA = b$; $XL = l_x$. Имеем $XC \cdot l_x = ab$. Учитывая, что $\angle AXB = 120^\circ$, а $XL = \frac{2ab}{a+b}\cos 60^\circ$,

имеем

$$XC \cdot \frac{2ab}{a+b} \cdot \frac{1}{2} = ab, \text{ или } XC = a + b,$$

что и требовалось доказать.

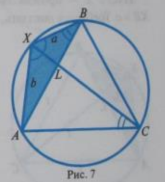

Рис. 7

Девятнадцатый способ

Обозначим $XB = a$, $XA = b$ (рис. 8). Ясно, что $\angle AXB = 120^\circ$, а биссектриса LX равна:

$$XL = \frac{2ab}{a+b}\cos 60^\circ = \frac{ab}{a+b}.$$

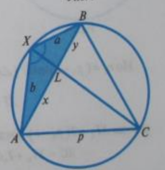

Рис. 8

Далее:

$$XL \cdot LC = AL \cdot LB. \quad (1)$$

Обозначим сторону равностороннего треугольника p, $AL = x$, $LB = y$. Имеем

$$x = \frac{bp}{a+b}; y = \frac{ap}{a+b}.$$

Обозначим $LC = z$. Тогда

$$xy = XL \cdot z, \frac{abp^2}{(a+b)^2} = \frac{ab}{a+b} \cdot z,$$

$$\text{отсюда } z \cdot (a+b) = p^2.$$

Из ΔAXB: $p^2 = a^2 + b^2 + ab$, значит,

$$z(a+b) = a^2 + b^2 + ab, \text{ или } z = \frac{a^2 + b^2 + ab}{a+b};$$

$$z + XL = \frac{a^2 + b^2 + ab}{a+b} + \frac{ab}{a+b} = \frac{(a+b)^2}{a+b} = a + b.$$

Двадцатый способ

Пусть X — произвольная точка окружности (рис. 9), $XA = b$; $XB = a$. Требуется доказать, что $XC = a + b$.

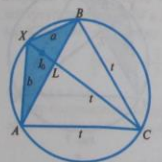

Рис. 9

Обозначим сторону равностороннего треугольника ABC как t, R — радиус описанной окружности, $2p_0$ — периметр треугольника XAB, I_0 — инцентр треугольника AXB, r_0 — радиус окружности, вписанной в треугольник AXB.

Поскольку C — середина дуги AB, то

$$XI_0 \cdot I_0C = 2Rr_0,$$

или, по теореме трилистника,

$$I_0C = AC = CB = t \text{ и } XI_0 \cdot t = \frac{2t\cdot\sqrt{3}}{3}r_0.$$

Но $r_0 = (p_0 - t)\operatorname{tg}60^\circ$ ($\angle AXB = 120^\circ$). Значит,

$$XI = \frac{2\sqrt{3}}{3}(p_0 - t)\cdot\sqrt{3},$$

откуда $XI_0 = 2(p_0 - t)$. Тогда

$$XC = XI_0 + I_0C = 2(p_0 - t) + t = 2p_0 - 2t + t = \\ = 2p_0 - t = b + a + t - t = a + b.$$

Двадцать первый способ

Имеем (рис. 10)

$$XW = \frac{2S}{XL \cdot \sin X}; XL = \frac{ab}{a+b};$$

$$S = \frac{1}{2}ab\sin 120^\circ,$$

$$S = \frac{1}{2}ab \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{ab\sqrt{3}}{4}.$$

$$XW = \frac{ab\cdot\sqrt{3}\cdot 2(a+b)}{2\cdot\sqrt{3}\cdot ab} = a + b.$$

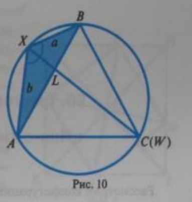

Рис. 10

Двадцать второй способ

Проведем $CK \perp XB$ (рис. 11).

По формуле Архимеда

$$KX = \frac{AX + BX}{2}. \quad (1)$$

Из ΔCKX:

$$CX = \frac{KX}{\cos 60^\circ} = 2KX.$$

Учитывая (1)

$$CX = AX + BX.$$

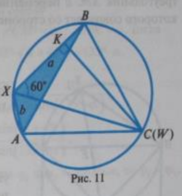

Рис. 11

И все!

Думаю, что это не конец.

Виват, королева, виват!

90. Треугольник и квадрат: «Мно-о-гие спо-о-со-бы!»

Рассмотрим конфигурацию:

На стороне квадрата $ABCD$ внешне построен прямоугольный треугольник XBC с переменной вершиной точкой X, гипотенуза которого совпадает со стороной квадрата BC (рис. 1).

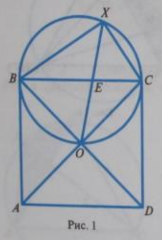

Рис. 1

Первая задача

Пусть O — точка пересечения диагоналей квадрата $ABCD$. Доказать, что XO делит угол BXC пополам.

Первый способ

Опишем окружность около треугольника BXC (рис. 1). Этой окружности принадлежит точка O. Поскольку $BO = OC$, то

$$\angle BXO = \angle OXC.$$

Второй способ

На стороне квадрата CD (рис. 2) построим треугольник CND с углом CND, равным $90°$, равный треугольнику BXC так, что

$$\angle DCN = \angle CBX.$$

Тогда $\angle XCN = 180°$. Если на сторонах квадрата AB и AD построить треугольники ADL и BKA, то четырехугольник $XNLK$ — квадрат, а отрезок XO принадлежит его диагонали, т. е. делит угол BXC пополам.

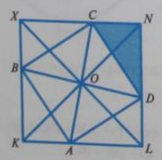

Рис. 2

Третий способ

Повернем треугольник BXC около центра O квадрата $ABCD$ на $90°$ (рис. 3). Тогда точка X перейдет в точку X_1, точка C — в точку B, а треугольник BXC — в равный ему треугольник AX_1B:

$$\angle X_1BA + \angle ABC + \angle XBC = 180°.$$

Значит, точки X_1, B, X принадлежат одной прямой. Треугольник X_1OX — равнобедренный и прямоугольный. Значит, XO делит угол BXC пополам.

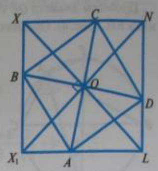

Рис. 3

Четвертый способ

Введем обозначения: $\angle BXO = \varphi_1$, $\angle CXO = \varphi_2$, $\angle XBC = \alpha$. Тогда

$$\angle XBO = \alpha + 45°;\ \angle XCO = 180° - (\alpha + 45°) = 135° - \alpha.$$

По теореме синусов

$$\frac{OB}{\sin\varphi_1} = \frac{XO}{\sin(\alpha + 45°)};\ \frac{OC}{\sin\varphi_2} = \frac{XO}{\sin(135° - \alpha)},$$

$$\text{отсюда } \frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_2} = \frac{\sin(\alpha + 45°)}{\sin(135° - \alpha)},$$

значит, $\sin\varphi_1 = \sin\varphi_2$. Поскольку углы φ_1 и φ_2 — острые, то $\varphi_1 = \varphi_2$.

Вторая задача

В треугольнике BXC длины катетов $XB = a$; $XC = b$. Найти длину отрезка XO.

Первый способ

Рассмотрим построенный квадрат XX_1LN (рис. 3). Его сторона равна $a + b$. Значит, $XO = \frac{\sqrt{2}}{2}(a + b)$.

Второй способ

Пусть $XO = x$, $BO = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$. Из треугольника BOX по теореме косинусов следует:

$$\frac{1}{2}\left(a^2 + b^2\right) = a^2 + x^2 - 2ax\frac{\sqrt{2}}{2},\ 2x^2 - 2\sqrt{2}ax + a^2 - b^2 = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{\sqrt{2}(a \pm b)}{2},\ x = XO = \frac{\sqrt{2}}{2}(a + b).$$

Третий способ

Проведем диаметр OF окружности, описанной около треугольника BXC (рис. 4). Обозначим $\angle FOX = \varphi$. Тогда

$$OX = x = OF \cdot \cos\varphi.$$

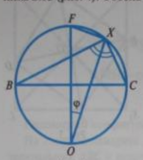

Рис. 4

Поскольку $\varphi = 45° - B$, где $B = \angle XBC$, а $OF = \sqrt{a^2 + b^2}$, то

$$x = \sqrt{a^2 + b^2}\cos(45° - B) =$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin B + \cos B) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \frac{a + b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(a + b).$$

Четвертый способ

Четырехугольник $XBOC$ вписан в окружность. Поэтому имеет место теорема Птолемея:

$$BO \cdot XC + OC \cdot BX = BC \cdot OX,$$

$$\text{или } \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(a + b) = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot XO,$$

отсюда $XO = \frac{\sqrt{2}}{2}(a + b)$.

Пятый способ

Используем формулу биссектрисы l_a для треугольника ABC

$$l_a = \frac{2bc}{b + c}\cos\frac{A}{2}$$

(a, b, c — стороны треугольника ABC, A — угол BAC).

В данном случае XE (рис. 1) — биссектриса угла BXC: $XE = \frac{2ab}{a + b} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Треугольники XOC и XBE подобны, потому

$$\frac{XO}{a} = \frac{b}{XE};\ XO = \frac{ab(a + b)}{ab\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(a + b).$$

Шестой способ

Используем авторскую формулу

$$S = \frac{1}{2}AW_1 \cdot MN = \frac{1}{2}AW_1 \cdot l_a \sin A.$$

Для данного случая $S = \frac{1}{2}ab$; $AW_1 = XO$; $MN = l_a \cdot \sin 90° = \frac{ab\sqrt{2}}{a + b}$.

Значит, $XO = \frac{2S}{l_a} = \frac{ab(a + b)}{ab\sqrt{2}} = (a + b)\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Седьмой способ

Используем формулу Архимеда:

$$AW_1 = XO = \frac{XC + XB}{2} \cdot \frac{1}{\cos 45°} = \frac{a + b}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = (a + b)\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Восьмой способ

Имеем $XO = BC\sin(45° + \alpha)$, где $\alpha = \angle XBC$,

$$XO = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha + \sin\alpha) = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a + b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(a + b).$$

Девятый способ

Рассмотрим прямоугольную систему координат с центром в точке B (рис. 5). Пусть гипотенуза BC принадлежит оси X, а сторона квадрата $ABCD$ — оси Y. Найдем координаты точек O и X:

$$O\left(\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}; -\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}\right);\ X\left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right).$$

По формуле расстояния между двумя точками:

$$XQ^2 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2} - \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 +$$

$$+\left(-\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2} - \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 =$$

$$= \frac{\left(a^2 - b^2\right)^2 + (a + b)^4}{4\left(a^2 + b^2\right)} =$$

$$= \frac{(a + b)^2\left((a - b)^2 + (a + b)^2\right)}{4\left(a^2 + b^2\right)} =$$

$$= \frac{(a + b)^2}{2};\quad XO = \frac{(a + b)\sqrt{2}}{2}.$$

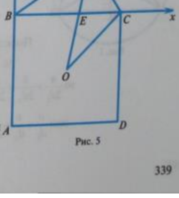

Рис. 5

Десятый способ предлагается найти самостоятельно.

91. Коллекционная задача

Эта задача была предложена С. И. Зетелем в его популярной книге «Новая геометрия треугольника» (Москва: Учпедгиз, 1962).

Во всяком треугольнике

$$4\left(\frac{a}{d_1}+\frac{b}{d_2}+\frac{c}{d_3}\right)=\frac{abc}{d_1d_2d_3},$$

где d_1, d_2, d_3 — соответственно расстояния центра описанной окружности O от сторон a, b, c. Доказать.

Сам автор задачи предложил доказательство с помощью тригонометрии, а Я. И. Айзенштат и Б. Г. Белоцерковская в книге «Решение задач с помощью тригонометрии» (Москва: Учпедгиз, 1960), воспользовались ею для демонстрации формулы

$$\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B+\operatorname{tg} C=\operatorname{tg} A\cdot\operatorname{tg} B\cdot\operatorname{tg} C$$

(A, B и C — углы треугольника ABC):

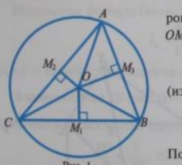

Рис. 1

Пусть M_1, M_2, M_3 — середины сторон BC, AC, AB (рис. 1). Тогда $OM_1=d_1$, $OM_2=d_2, OM_3=d_3$.

Поскольку $\angle BOC=2A$, то $\operatorname{tg} A=\frac{a}{2d_1}$ (из ΔOM_1B). Аналогично,

$$\operatorname{tg} B=\frac{b}{2d_2},\ \operatorname{tg} C=\frac{c}{2d_3}.$$

Поскольку

$$\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B+\operatorname{tg} C=\operatorname{tg} A\cdot\operatorname{tg} B\cdot\operatorname{tg} C,$$

то $$\frac{a}{2d_1}+\frac{b}{2d_2}+\frac{c}{2d_3}=\frac{abc}{8d_1d_2d_3},$$

или $$\frac{a}{d_1}+\frac{b}{d_2}+\frac{c}{d_3}=\frac{abc}{4d_1d_2d_3}.$$

Второй способ
(без применения тригонометрии)

Применим теорему Птолемея к четырехугольнику OM_2AM_3:

$$\frac{cd_2}{2}+\frac{bd_3}{2}=\frac{aR}{2}.$$

Отсюда $aR=cd_2+bd_3$. Аналогично, $bR=ad_3+cd_1$, $cR=ad_2+bd_1$.

Домножим выражения aR, bR, cR соответственно на d_1, d_2, d_3. Имеем

$$a\cdot d_1R+bd_2R+c\cdot d_3R=$$
$$=\left(cd_1d_2+bd_1d_3\right)+\left(ad_2d_3+cd_1d_2\right)+\left(ad_3d_2+bd_2d_3\right)=$$
$$=2\left(ad_2d_3+bd_1d_3+cd_2d_1\right)=$$
$$=2d_1d_2d_3\left(\frac{a}{d_1}+\frac{b}{d_2}+\frac{c}{d_3}\right).$$

Сопоставим начало и конец этого выражения:

$$R\left(ad_1+bd_2+cd_3\right)=2d_1d_2d_3\left(\frac{a}{d_1}+\frac{b}{d_2}+\frac{c}{d_3}\right).$$

Поскольку

$$R\left(ad_1+bd_2+cd_3\right)=R\cdot 2S$$

(S — площадь треугольника ABC) и $SR=\frac{abc}{4}$, то

$$d_1d_2d_3\left(\frac{a}{d_1}+\frac{b}{d_2}+\frac{c}{d_3}\right)=\frac{abc}{4},$$

или $$\frac{a}{d_1}+\frac{b}{d_2}+\frac{c}{d_3}=\frac{abc}{4d_1d_2d_3},$$

что и требовалось доказать.

92. С тригонометрией... Без тригонометрии...

Рассмотрим несколько задач, имеющих только два равноценных способа решения (по крайней мере на первый взгляд). Несмотря на малое количество способов, такие задачи занимают достойно высокое место в коллекции лучших геометрических задач.

Задача 1 (авторская). Доказать, что если в треугольнике ABC инцентр I принадлежит прямой Эйлера, то этот треугольник равнобедренный.

Заметим, что задача относится к типу «Неожиданный эффект обратной задачи».

Первый способ
(авторский)

Поскольку отрезок OM_1 параллелен отрезку AH (M_1 — середина стороны BC, H — ортоцентр), то треугольник OIW_1 подобен треугольнику HIA (рис. 1) (I — ортоцентр, W_1 — точка пересечения биссектрисы угла A с описанной около треугольника ABC окружностью).

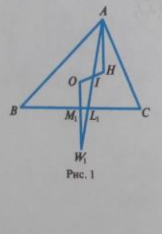

Рис. 1

Следовательно,

$$\frac{OI}{IH}=\frac{OW_1}{AH}.$$

Аналогично,

$$\frac{OI}{IH}=\frac{OW_3}{CH}.$$

Таким образом,

$$AH=CH,$$

из чего следует, что $BC=AB$.

Второй способ
(А. Карлюченко)

Из ΔAOH (рис. 2): $\frac{OI}{IH}=\frac{AO}{AH}$ (свойство биссектрисы AI, которая разделит пополам и $\angle OAH$). Из ΔBOH: $\frac{OI}{IH}=\frac{BO}{BH}$. Следовательно, $\frac{AO}{AH}=\frac{BO}{BH}$, откуда $AH=BH$, а значит, $a=b$.

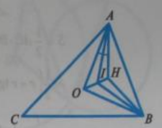

Рис. 2

Задача 2. Радиусы двух пересекающихся окружностей равны R и r. Их общие внутренние касательные взаимно перпендикулярны. Найти площадь треугольника, образованного этими касательными и общей касательной к этим окружностям.

Первый способ

Обозначим O_1 и O_2 — центры окружностей (рис. 3). D, K, E, F, E_1, F_1 — точки касания. Введем далее обозначения $DK=l$, $DA=x$, $BK=y$; S — площадь треугольника ABC.

Поскольку четырехугольники ECO_1O_2 и FCF_1O_1 — квадраты, и $FC=F_1O_1=R$, $EC=CE_1=r$, то $AD=AE=x$, $BK=BF_1=y$, $DB=BE_1$, $AK=AF$, отсюда $l-x=R+r+x$; $l-y=R+r+y$, значит, $x=y$. $AB=R+r$. По теореме Пифагора $(R+r)^2=(R+x)^2+(r+x)^2$;

$$Rr=Rx+rx+x^2. \qquad (1)$$

Имеем

$$S=\frac{1}{2}(R+x)(r+x)=\frac{1}{2}(Rr+Rx+rx+x^2). \qquad (2)$$

Подставим (1) в (2), получим $S=\frac{1}{2}(Rr+Rr)=Rr$.

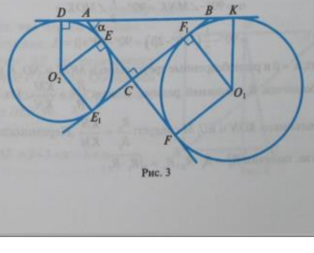

Рис. 3

Второй способ

Введем вспомогательный угол $\alpha = \angle BAC$ (рис. 3). Тогда

$$\angle F_1O_1K = 90^\circ - \alpha.$$

$$S = \frac{1}{2}AC\cdot BC = \frac{1}{2}(r+AE)(R+B_1F) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(r + r\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\left(R + R\,\mathrm{tg}\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}Rr\left(1+\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\right)\left(1+\frac{1-\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{1}{2}Rr\left(1+\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\right)\left(\frac{2}{1+\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}\right) = R\cdot r.$$

Задача 3. Одна из точек пересечения двух окружностей — точка K. Прямая касается этих окружностей в точках M и N. Радиусы окружностей R_1 и R_2. Найти радиус окружности, описанной около треугольника KMN.

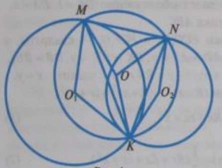

Рис. 4

Первый способ

Обозначим O_1 и O_2 — центры пересекающихся окружностей. O — центр окружности, описанной около треугольника MNK. Докажем, что треугольники MOK и NO_2K подобны (рис. 4). Пусть

$$\angle KNO_2 = \alpha, \angle KMO = \beta.$$

Но

$$\alpha = 90^\circ - \angle MNK = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle MOK =$$

$$= 90^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - 2\beta) = 90^\circ - 90^\circ + \beta = \beta.$$

Значит, $\alpha = \beta$ и равнобедренные треугольники MOK и NO_2K подобны.

Обозначим R_x искомый радиус. Имеем $\frac{R_x}{R_2} = \frac{KM}{KN}$. Из подобия треугольников KON и KO_1M следует: $\frac{R_x}{R_1} = \frac{KN}{KM}$. Перемножив эти равенства, получим $R_x^2 = R_1\cdot R_2$, $R_x = \sqrt{R_1\cdot R_2}$.

Второй способ

Обозначим

$$\angle KNO_2 = \beta,\ \angle MKO_1 = \alpha.$$

Значит (рис. 5),

$$MK = 2R_1\cos\alpha,$$
$$NK = 2R_2\cos\beta,$$
$$\angle KMN = 90^\circ - \alpha,$$
$$\angle MNK = 90^\circ - \beta.$$

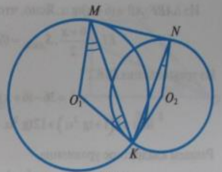

Рис. 5

По теореме синусов

$$R_x = \frac{2R_1\cos\alpha}{2\sin(90^\circ-\beta)},\ R_x = \frac{2R_2\cos\beta}{2\sin(90^\circ-\alpha)}.$$

Перемножив эти равенства, получим

$$R_x^2 = \frac{R_1\cos\alpha\cdot R_2\cos\beta}{\cos\beta\cdot\cos\alpha} = R_1\cdot R_2.$$

Вызывают особый интерес задачи повышенной трудности, предлагаемые авторами учебников геометрии. Почему именно эта, а не иная задача получила почетное право на внимание миллионов (!) учащихся бывшего СССР?

Проанализируем одну из них — № 1204 из учебника «Геометрия. 7—9» Л. С. Атанасяна и др.

Задача 4. В прямоугольной трапеции $ABCD$ меньшее основание AD равно 3, а боковая сторона CD, не перпендикулярная к основаниям, равна 6. Точка E — середина отрезка CD, угол CBE равен α. Найдите площадь трапеции $ABCD$.

Первый способ

Говорят, что первое решение — не самое лучшее.

Продлим BE до пересечения с AD в точке F (рис. 6). Обозначим $HC = x$. Поскольку ΔBEC равен треугольнику DEF, то

$$DF = BC = x+3,$$

а $AF = 3+3+x = 6+x$.

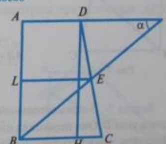

Рис. 6

Из ΔABF: $AB = (6+x)\,\mathrm{tg}\,\alpha$. Ясно, что

$$EL = \frac{6+x}{2}.\ S_{ABCD} = (6+x)^2\,\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\frac{1}{2}.$$

Из треугольника DHC:

$$x^2 = 36-(6+x)^2\,\mathrm{tg}^2\alpha,$$

$$\text{или } x^2\left(1+\mathrm{tg}^2\alpha\right)+12\,\mathrm{tg}^2\alpha\cdot x+36\left(\mathrm{tg}^2\alpha-1\right)=0.$$

Решаем квадратное уравнение

$$D = 144\,\mathrm{tg}^4\alpha - 144\left(\mathrm{tg}^2\alpha-1\right)\left(\mathrm{tg}^2\alpha+1\right) =$$

$$= 144\,\mathrm{tg}^4\alpha - 144\left(\mathrm{tg}^4\alpha-1\right) = 144.$$

$$x_{1,2} = \frac{-12\,\mathrm{tg}^2\alpha \pm 12}{2\left(1+\mathrm{tg}^2\alpha\right)};$$

$$x_1 = \frac{\frac{-12\,\mathrm{tg}^2\alpha+12}{2}}{\frac{1}{\cos^2\alpha}} = \frac{-12\sin^2\alpha+12\cos^2\alpha}{2} = 6\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right).$$

Имеем $6+x = 12\cos^2\alpha$. Значит,

$$S_{ABCD} = \frac{(6+x)^2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{2} = \frac{144\cos^4\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha}{2} = 72\cos^3\alpha\sin\alpha.$$

Заметим, что в решении не используется числовое соотношение, приводящее к равенству $AD = DE$.

Второй способ

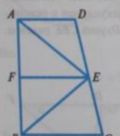

Рис. 7

Используем, что $AD = DE$ (рис. 7),

$$AE = BE.$$

Значит, $\angle DEA = \alpha$. Из ΔADE:

$$AE = 2AD\cos\alpha = 6\cos\alpha;$$
$$BE = 6\cos\alpha.$$
$$FE = BE\cos\alpha = 6\cos^2\alpha,$$
$$AB = 2FB = 2BE\sin\alpha = 12\cos\alpha\sin\alpha.$$
$$S = FE\cdot AB = 72\sin\alpha\cos^3\alpha.$$

Задача 5. В прямоугольной трапеции $ABCD$ проведена биссектриса угла D. Она пересекла сторону AB в точке E так, что $AE = BC$. Доказать, что в четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность.

Первый способ

Требуется доказать, что

$$AB+CD = a+b.$$

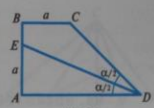

Рис. 8

Заметим (рис. 8), что

$$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{b},\ AB = (b-a)\,\mathrm{tg}\,\alpha,$$

$$CD = \frac{b-a}{\cos\alpha}.$$

Имеем

$$AB+CD = (b-a)\left(\mathrm{tg}\,\alpha+\frac{1}{\cos\alpha}\right) = (b-a)\left(\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}\right) =$$

$$= (b-a)\left(\frac{1+\frac{2\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}}{\frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}}\right) = (b-a)\left(1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}+2\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\frac{1}{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= (b-a)\left(1+\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{(b-a)\left(1+\frac{a}{b}\right)}{1-\frac{a}{b}} =$$

$$= \frac{(b-a)(b+a)\cdot b}{(b-a)\cdot b} = b+a,$$

а это значит, что в четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность.

Второй способ

Проведем $EF \perp CD$ (рис. 9). Рассмотрим треугольники AED и EFD. Они равны, значит, $EA = EF$.

Из равенства треугольников EFC и EBC следует, что $BE = FC$. Пусть $BE = x$; $CD = y$. Тогда

$$AD = x+y,\ AB = x+a,$$
$$AD+BC = a+x+y,\ AB+CD = a+x+y,$$

отсюда $AD+BC = AB+CD$, значит, требование задачи выполнено.

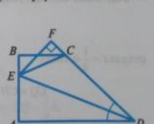

Рис. 9

93. «Вся» геометрия в одной задаче

Такая задача является украшением самой требовательной коллекции, потому что она имеет все, чем обладает жемчужина... геометрическая жемчужина.

В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) проведена высота CH и медианы CM и CN треугольников CAH и CBH. Найти расстояния от точки C до ортоцентра треугольника CMN, если $CH = h$.

Первый способ

Пусть $AM = MH = m$, $BN = NH = n$ (рис. 1). Тогда

$$CH = h = \sqrt{AH \cdot BH} = 2\sqrt{mn}. \qquad (1)$$

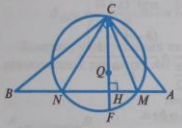

Рис. 1

Пусть Q — ортоцентр треугольника CMN. Опишем окружность вокруг треугольника CMN и продолжим CH до пересечения с окружностью в точке F.

Пусть $QH = t$, тогда HF тоже равно t. Тогда по теореме о произведении отрезков хорд:

$$CH \cdot HF = MH \cdot HN,$$

или

$$h \cdot t = m \cdot n. \qquad (2)$$

Учитывая соотношение (1), соотношение (2) запишется так:

$$h \cdot t = \frac{h^2}{4},$$

откуда $t = \frac{1}{4}h$. Тогда

$$CQ = CH - HQ = h - t = h - \frac{h}{4} = \frac{3}{4}h.$$

Второй способ

Треугольник MQH подобен треугольнику CNH (рис. 2):

$$\frac{QH}{NH} = \frac{MH}{h},$$

$$\text{отсюда } QH = \frac{NH \cdot MH}{h}.$$

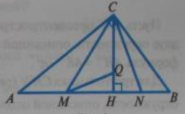

Рис. 2

Но $4NH \cdot MH = h^2$, значит, $QH = \frac{h^2}{4h} = \frac{1}{4}h$ и $CQ = \frac{3}{4}h$.

Третий способ

Обозначим (рис. 3) $HM = x$, $HN = y$, $\angle CNH = \varphi$, $\angle CMH = \gamma$.

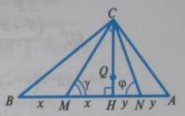

Рис. 3

Для остроугольного треугольника ABC (рис. 4), в котором H — ортоцентр, H_1 — основание высоты h_a

$$\frac{AH}{HH_1} = \frac{\cos A}{\cos B \cos C}. \qquad (1)$$

Действительно, $AH = 2R\cos A$;

$$HH_1 = H_1B \operatorname{ctg} C = c\cos B \cdot \operatorname{ctg} C =$$

$$= 2R\sin C \cos B \frac{\cos C}{\sin C} = 2R\cos B \cos C.$$

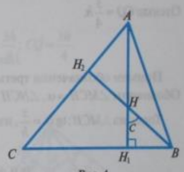

Рис. 4

Значит, выражение (1) можно записать в виде:

$$\frac{\cos A}{\cos B \cos C} = \frac{-\cos(B+C)}{\cos B \cos C} =$$

$$= \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C - 1$$

и в треугольнике CMN:

$$\frac{CQ}{QH} = \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\gamma - 1.$$

Но $\operatorname{tg}\varphi = \frac{h}{y}$; $\operatorname{tg}\gamma = \frac{h}{x}$, следовательно,

$$\frac{CQ}{QH} = \frac{h^2}{xy} - 1 = 3,$$

так как $h = 2\sqrt{xy}$ и $xy = \frac{h^2}{4}$, следовательно, $CQ = \frac{3}{4}h$.

Четвертый способ

Пусть H — ортоцентр остроугольного треугольника ABC, R — радиус окружности, описанной около треугольника ABC. Имеет место формула $AH^2 = 4R^2 - a^2$.

Для треугольника CMN (рис. 3): $CQ^2 = 4R_1^2 - (x+y)^2$ (R_1 — радиус окружности, описанной около треугольника CMN).

$$CM = \sqrt{h^2 + x^2}; \; CN = \sqrt{h^2 + y^2}.$$

$$R_1 = \frac{\sqrt{h^2+x^2} \cdot \sqrt{h^2+y^2} \cdot \frac{c}{2}}{4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{c}{2} \cdot h} = \frac{\sqrt{h^2+x^2} \cdot \sqrt{h^2+y^2}}{2h};$$

$$CQ^2 = \frac{\left(h^2+x^2\right)\left(h^2+y^2\right)}{h^2} - (x+y)^2 =$$

$$= h^2 + \left(x^2+y^2\right) + \frac{x^2y^2}{h^2} - (x+y)^2 =$$

$$= h^2 + (x+y)^2 - 2xy + \frac{x^2y^2}{h^2} - (x+y)^2 = h^2 - \frac{h^2}{2} + \frac{h^2}{16} = \frac{9h^2}{16}.$$

Отсюда $CQ = \frac{3}{4}h$.

Пятый способ

Примем обозначения третьего способа (рис. 3): $MH = x$; $HN = y$. Обозначим $\angle MCH = \alpha$, $\angle NCH = \beta$.

Тогда из ΔMCH: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{x}{h}$, из ΔCHN: $\operatorname{tg}\beta = \frac{y}{h}$. Значит,

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} = \frac{\frac{x}{h} + \frac{y}{h}}{1 - \frac{xy}{h^2}} = \frac{h(x+y)}{h^2 - xy}.$$

Заметим, что из того, что

$$CH = \sqrt{AH \cdot HB}, \; h = \sqrt{2x \cdot 2y}, \; xy = \frac{h^2}{4};$$

$$CQ = MN \operatorname{ctg} \angle MCN,$$

следует

$$CQ = (x+y)\operatorname{ctg}(\alpha+\beta) = (x+y)\frac{h^2 - xy}{h(x+y)} = \frac{h^2 - xy}{h} = \frac{h^2 - \frac{h^2}{4}}{h} = \frac{3}{4}h.$$

Шестой способ

Обозначим $\angle MCN = \alpha$ (рис. 3). Из треугольника MCN:

$$CQ = 2R\cos\alpha = \frac{MN}{\sin\alpha} \cdot \cos\alpha = \frac{c}{2}\operatorname{ctg}\alpha. \qquad (1)$$

$$2CM \cdot CN \cdot \sin\alpha = h \cdot c.$$

По формуле медианы

$$CM^2 = 2a^2 + 2h^2 - BH^2, \; 4CN^2 = 2b^2 + 2h^2 - AH^2.$$

Но

$$AH^2 + BH^2 = (AH + BH)^2 - 2AH \cdot BH = c^2 - 2h^2.$$

Из треугольника CMN по теореме косинусов:

$$c^2 = 4CM^2 + 4CN^2 - 8CM \cdot CN \cos\alpha =$$

$$= 2a^2 + 2b^2 + 4h^2 - \left(AH^2 + BH^2\right) - 4hc\operatorname{ctg}\alpha =$$

$$= 2c^2 + 6h^2 - c^2 - 4hc\operatorname{ctg}\alpha = c^2 + 6h^2 - 4hc\operatorname{tg}\alpha,$$

$$\text{отсюда } c^2 = c^2 + 6h^2 - 4hc\operatorname{ctg}\alpha,$$

$$\text{отсюда } 4hc\operatorname{ctg}\alpha = 6h^2, \text{ или } \operatorname{ctg}\alpha = \frac{3h}{2c}.$$

Подставим в выражение (1):

$$CQ = \frac{c}{2}\operatorname{ctg}\alpha = \frac{c}{2} \cdot \frac{3h}{2c} = \frac{3h}{4}; \; CQ = \frac{3h}{4}.$$

Седьмой способ

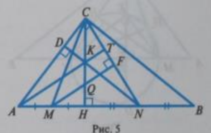

Рис. 5

Пусть K — середина высоты CH (рис. 5). Тогда NK — средняя линия треугольника BCH, значит, $NK \parallel BC$. Пусть точка D — точка пересечения NK и AC. Тогда $ND \perp AC$ и K — ортоцентр треугольника ACN, значит, прямая AK содержит высоту AT треугольника ACN: $AT \perp CN$. Но высота MF треугольника MCN также перпендикулярна CN, значит, $AT \parallel MF$, следовательно, MQ — средняя линия треугольника AHK и Q — середина KH, значит,

$$QH = \frac{1}{2}KH = \frac{1}{4}CH, \text{ отсюда } CQ = \frac{3}{4}CH.$$

Восьмой способ

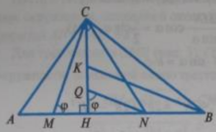

Рис. 6

Пусть K — середина CH (рис. 6). Проведем отрезок BK. Чтобы доказать, что Q — середина KH, достаточно доказать, что $NQ \parallel BK$ (тогда NQ — средняя линия и Q — середина KH). Значит, необходимо доказать, что

$$\angle BKH = \angle NQH.$$

Как известно,

$$\angle NQH = \angle CMH = \varphi$$

(оба равны $90° - \angle QNM$).

Поскольку $\Delta ACH \sim \Delta CBH$, то все соответственные углы этих треугольников равны, $\varphi = \angle CMH$ — угол между медианой и стороной треугольника ACH, находящейся против угла ACH, равного B.

$\angle BKH$ — угол между медианой и стороной треугольника BCH, находящейся против угла B, следовательно,

$$\angle BKH = \angle CMH = \varphi,$$

а это значит, что $CQ = \frac{3}{4} CH$.

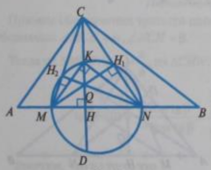

Рис. 7

Девятый способ

Пусть K — середина отрезка CH (рис. 7). Тогда $NK \parallel BC$ (средняя линия треугольника BCH), $MK \parallel AC$ (средняя линия треугольника ACH). Тогда

$$\angle MKN = \angle ACB = 90°.$$

Пусть MH_1, NH_2 — высоты треугольника CMN, Q — ортоцентр треугольника CMN.

Так как

$$\angle MH_2N = \angle MKN = 90°,$$

то точки H_2, K, H_1 лежат на окружности γ с диаметром MN. Продолжим CH до пересечения с γ в точке D. Тогда

$$CK \cdot CD = CH_1 \cdot CN. \quad (1)$$

Имеем: $CK = \frac{1}{2} h$ (так как K — середина CH). Имеем далее $KH = HD$ (так как MN — диаметр, $MN \perp KD$, значит,

$$KD = 2KH = 2 \cdot \frac{h}{2} = h,$$

следовательно, $CD = \frac{3}{2} h$.

Пусть $\angle QCH_1 = \alpha$. Из треугольника CQH_1:

$$CH_1 = CQ \cos\alpha$$

(α — угол HCN). Подставим эти выражения в (1):

$$\frac{h}{2} \cdot \frac{3}{2} h = CQ \cdot \cos\alpha \cdot CN.$$

Но $\cos\alpha \cdot CN = CH$ (из ΔCHN):

$$\frac{h}{2} \cdot \frac{3}{2} h = CQ \cdot h, \text{ откуда } CQ = \frac{3}{4} h.$$

23 - 6-1744

94. Восхищение обучением

Право, не скажу, где была напечатана впервые эта задача, кто ее автор. Зато с уверенностью могу утверждать, что тираж ее огромен: она скромно разместилась в группе В известнейшего задачника под редакцией М. Сканави. Вот ее условие.

Площадь треугольника ABC равна S_1, площадь треугольника AHB (H — ортоцентр) равна S_2. На прямой CH взята такая точка K, что треугольник ABK прямоугольный. Доказать, что площадь треугольника ABK есть среднее геометрическое между S_1 и S_2.

С задачей я знаком давно, но только теперь осознал ее педагогическую ценность.

Начнем с того, что решить задачу не просто. Наверное, самое естественное ее решение — с помощью подобия.

Первый способ

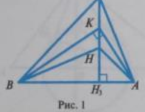

Рис. 1

Требуется доказать (рис. 1), что

$$S_3^2 = S_1 \cdot S_2$$

(S_3 — площадь треугольника ABK). Это равенство можно записать в виде:

$$c^2 \cdot KH_3^2 = c^2 \cdot CH_3 \cdot HH_3,$$

или

$$KH_3^2 = CH_3 \cdot HH_3. \quad (*)$$

Поскольку $\angle BKA = 90°$, то

$$KH_3^2 = AH_3 \cdot BH_3.$$

Чтобы получить равенство (*), надо доказать, что

$$CH_3 \cdot HH_3 = AH_3 \cdot BH_3.$$

Если это равенство записать в виде

$$\frac{CH_3}{AH_3} = \frac{BH_3}{HH_3}, \quad (1°)$$

то очевидно, что надо воспользоваться подобием треугольников CBH_3 и AHH_3. Действительно, эти прямоугольные треугольники имеют по равному острому углу.

Кстати, можно «обойти» подобие: из равенства (1°)

$$\frac{CH_3}{AH_3} = \operatorname{tg} A, \text{ а } \frac{BH_3}{HH_3} = \operatorname{tg} \angle BHH_3, \text{ но } \angle BHH_3 = A!$$

Итак, задача «помещается» в равенство:

$$KH_3^2 = CH_3 \cdot HH_3. \quad (*)$$

Попробуем тригонометрию.

Второй способ

Выразим с помощью R и углов треугольника все компоненты равенства (*):

$$HH_3 = BH \cos A = 2R \cos A \cos B,$$

$$CH_3 = a \sin B = 2R \sin A \sin B,$$

$$KH_3 = \sqrt{AH_3 \cdot BH_3} = \sqrt{b \cos A \cdot a \cos B} = \sqrt{R^2 \sin 2A \cdot \sin 2B}.$$

Имеем

$$HH_3 \cdot CH_3 = R^2 \sin 2A \cdot \sin 2B.$$

Однако! Существует третий способ доказательства. И вновь на «хорошую геометрию» выведет алгебра!

Третий способ

Обозначим $AH_3 = m$; $BH_3 = n$; $HH_3 = t$. Имеем:

$$\frac{S_{AKB}}{S_{AHB}} = \frac{KH_3}{HH_3} = \frac{\sqrt{mn}}{t}.$$

Далее $\frac{S_{AKB}}{S_{ABC}} = \frac{\sqrt{mn}}{h_a}$. Перемножим:

$$\frac{S_{AKB}^2}{S_{AHB} \cdot S_{ABC}} = \frac{\sqrt{mn} \cdot \sqrt{mn}}{t \cdot h_a}.$$

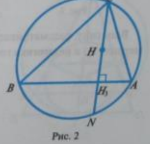

Рис. 2

Очевидно, что должно быть $mn = t \cdot h_a$. Действительно, опишем окружность вокруг ΔABC (рис. 2). Продлим отрезок CH_3 до пересечения с окружностью в точке N.

Тогда $H_3N = t$ (использовали известное свойство $HH_3 = H_3N$).

23*

Теперь применим теорему о произведении отрезков хорд

$$CH_3 \cdot H_3N = AH_3 \cdot BH_3,$$

или $mn = t \cdot h_a$, а значит, $S^2_{AKB} = S_{AHB} \cdot S_{ABC}$.

И, наконец, кульминация!

Решим задачу с помощью стереометрии. Применение стереометрии для решения планиметрических задач особо интересно!

Четвертый способ

Рассмотрим прямоугольный тетраэдр $CSAB$ (три угла при вершине S — прямые (рис. 3)).

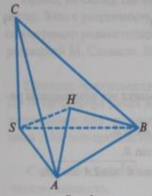

Рис. 3

Можно доказать, что

$$S_{SAB} = \sqrt{S_{ABC} \cdot S_{AHB}}. \qquad (2^\circ)$$

К треугольнику ABC (рис. 4) в пространстве из ортоцентра H восстановим перпендикуляр t. Пусть K — некоторая точка на прямой CH, такая, что $\angle AKB = 90°$. Повернем треугольник AKB так, чтобы его вершина K оказалась на перпендикуляре t. Полученную точку обозначим $S(k)$.

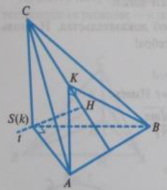

Рис. 4

Тогда тетраэдр $CS(k)AB$ — прямоугольный, ибо $\angle BS(k)A = 90°$, а высота $S(k)H$ проходит через ортоцентр H грани CAB. Тогда по формуле (2°)

$$S_{S(k)AB} = \sqrt{S_{ABC} \cdot S_{AHB}}.$$

Но треугольник SAB — это треугольник AKB, таким образом

$$S_{AKB} = \sqrt{S_{ABC} \cdot S_{AHB}}.$$

Воистину, рассматриваемая задача — жемчужина не только геометрии, но и **педагогики** геометрии!

95. Единственная и неповторимая

Конечно, как вы и догадались, речь снова пойдет о задаче. Постараюсь объяснить, за что ей такая честь.

Действительно, появившись на Международной математической Олимпиаде в 1978 г., она до сих пор обсуждается.

Для решения привлекается гомотетия, вспомогательная окружность, тригонометрия, лемма Архимеда, теорема Паскаля, формула Эйлера и даже теорема Кэзи. Какая из задач может «похвастаться» таким послужным списком?

Начнем с того, что первоначальное условие задачи, предложенное на Международной олимпиаде, было перегруженным — слово «равнобедренный» было лишним. Но именно такое условие опубликовал впервые журнал «Квант» (№ 537).

Окружность касается внутренним образом окружности, описанной вокруг равнобедренного треугольника ABC, а также равных сторон AB и AC этого треугольника в точках P, Q соответственно. Докажите, что середина отрезка PQ является центром окружности, вписанной в треугольник ABC.

Приведем доказательство известного московского математика, сотрудника журнала «Квант» Н. Васильева.

Пусть AH — высота треугольника ABC, E — середина отрезка PQ, O_1 — центр данной окружности, T — точка касания данной окружности с описанной около треугольника (рис. 1). Ясно, что точки E и T принадлежат прямой AH.

Рис. 1

Проведем через точку T касательную к данной окружности (а значит, и к окружности, описанной около треугольника ABC). Пусть она пересечет

прямые AB и AC в точках B_1 и C_1 соответственно. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ гомотетичны с центром гомотетии в точке A и некоторым коэффициентом k. Очевидно, что $k = \frac{AH}{AT}$. Из прямоугольных треугольников AHB и ABT имеем, что

$$AH = AB\cos\alpha,\ AT = \frac{AB}{\cos\alpha}$$

($\alpha = \angle BAH = \angle CAH$), значит, $k = \cos^2\alpha$. Аналогично, из прямоугольных треугольников AEP и APO_1: $\frac{AE}{AO_1} = \cos^2\alpha$.

Поэтому при гомотетии точка E перейдет в точку O_1, а поскольку точка O_1 — центр вписанной в треугольник AB_1C_1 окружности, то точка E будет инцентром треугольника ABC!

Теперь приведем решения усовершенствованной задачи, убрав слово «равнобедренный»:

Окружность касается сторон AB и AC треугольника ABC в точках P и Q соответственно, а также внутренним образом касается окружности, описанной около этого треугольника. Доказать, что инцентр I треугольника ABC совпадает с серединой отрезка PQ.

Первый способ
(с помощью тригонометрии)

Чтобы доказать, что точка E, середина отрезка PQ, является инцентром треугольника ABC, достаточно показать, что

$$AE = \frac{r}{\sin\frac{A}{2}}, \qquad (1)$$

где r — радиус окружности, вписанной в треугольник ABC. Действительно, поскольку $AP = AQ$, то $AO_1 \perp PQ$ (O_1 — центр данной окружности) и точка E принадлежит прямой AO_1 (рис. 2).

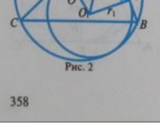

Рис. 2

Поскольку инцентр также принадлежит прямой AO_1 (биссектрисе угла A), то чтобы доказать, что точки E и I совпадают, достаточно показать, что

$$AE = AI.\ AI = \frac{r}{\sin\frac{A}{2}}.$$

Обозначим r_1 — радиус окружности, данной в условии: $O_1Q = r_1$. Из треугольников O_1EQ и AEQ имеем:

$$r_1 = \frac{EQ}{\cos\angle EQO_1} = \frac{AE\operatorname{tg}\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}} = AE \cdot \frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}}.$$

Откуда $AE = \frac{r_1\cos^2\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}}$. Итак, для доказательства формулы (1) достаточно показать, что

$$r_1\cos^2\frac{A}{2} = r. \qquad (2)$$

Здесь будет уместно провести аналогию с тригонометрическим доказательством формулы Эйлера ($OI^2 = R^2 - 2Rr$) (см. книгу «Треугольник и тетраэдр в задачах»).

Поскольку заданная окружность и окружность, описанная около треугольника, касаются, то $OO_1 = R - r_1$, где R — радиус описанной окружности. Точка O_1 принадлежит биссектрисе угла A, поэтому $\angle OAO_1 = \frac{B-C}{2}$ (считаем, что $\angle B > \angle C$). Применим теорему косинусов к треугольнику AOO_1: $AO = R$, $AO_1 = \frac{r_1}{\sin\frac{A}{2}}$, значит,

$$(R - r_1)^2 = R^2 - 2R \cdot \frac{r_1}{\sin\frac{A}{2}}\cos\frac{B-C}{2} + \frac{r_1^2}{\sin^2\frac{A}{2}},$$

$$r_1\sin^2\frac{A}{2} - r_1 = -2R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2} + 2R\sin^2\frac{A}{2},$$

$$r_1\cos^2\frac{A}{2} = 2R\sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B-C}{2} - \sin\frac{A}{2}\right),$$

$$r_1\cos^2\frac{A}{2} = 2R\sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B-C}{2} - \cos\frac{B+C}{2}\right),$$

$$r_1\cos^2\frac{A}{2} = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

Поскольку по известной формуле правая часть равенства равна r, то $r_1\cos^2\frac{A}{2} = r$, тогда формула (2), а значит, и сама задача, доказана.

Для применения других способов нам понадобится *лемма Архимеда.*

Лемма Архимеда. Если некоторая окружность касается данной окружности и ее хорды, то прямая, соединяющая точки касания, проходит через середину дуги, стягиваемой этой хордой.

Первый способ. Пусть O, O_1 — центры данных окружностей (рис. 3), T_1, T_2 — точки касания окружностей и хорды BC большей окружности, A — точка пересечения прямой T_1T_2, с большей окружностью. Треугольники $O_1T_1T_2$ и OT_1A — равнобедренные, поэтому

$$\angle O_1T_2T_1 = \angle O_1T_1T_2 = \angle OT_1A = \angle OAT_1,$$

откуда $O_1T_2 \| OA$. Но $O_1T_2 \perp BC$, следовательно, $OA \perp BC$ и поэтому $\cup AB = \cup AC$.

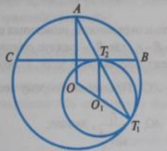

Рис. 3

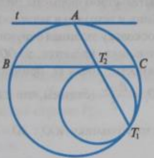

Рис. 4

Второй способ. Рассмотрим гомотетию с центром в точке T_1 и коэффициентом $\frac{R}{r}$, где R и r — радиусы большой и малой окружностей (рис. 4). При этой гомотетии меньшая окружность перейдет в большую, а хорда BC в касательную t к большей окружности в точке A, причем $t \| BC$. Поскольку в этом случае $\cup AB = \cup AC$, то лемма Архимеда доказана.

Второй способ
(с помощью леммы Архимеда и вспомогательной окружности)

Сохраним все обозначения из «тригонометрического способа». Пусть T — точка касания данной окружности и окружности, описанной вокруг треугольника ABC (рис. 5).

Проведем биссектрису угла BTC. Пусть она пересечет отрезок PQ в некоторой точке D.

Докажем, что

$$\angle PCD = \frac{1}{2}\angle ACB. \qquad (3)$$

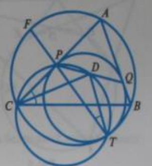

Рис. 5

Действительно,

$$\angle CPD + \angle CTD =$$
$$= 180° - \left(90° - \frac{A}{2}\right) + \frac{1}{2}\angle CTB =$$
$$= 90° + \frac{A}{2} + \frac{1}{2}(180° - A) = 180°.$$

Следовательно, четырехугольник $CPDT$ — вписанный, поэтому

$$\angle PTD = \angle PCD.$$

Воспользуемся леммой Архимеда. Пусть прямая PT пересекает большую окружность в точке F. Тогда

$$\cup CF = \cup AF = \frac{1}{2}\cup AC.$$

Остаются вычисления:

$$\angle CTD = \angle CTF + \angle FTD = \frac{\angle ABC}{2} + \angle ACD.$$

С другой стороны:

$$\angle CTD = \frac{1}{2}\angle CTB = \frac{1}{2}(180° - A) = 90° - \frac{A}{2},$$

следовательно,

$$90° - \frac{\angle BAC}{2} = \frac{\angle ABC}{2} + \angle ACD, \angle ACD = \frac{\angle ACB}{2}.$$

Равенство (3) доказано, следовательно, CD — биссектриса угла ACB.

Аналогично доказывается, что BD — биссектриса угла ABC, значит, точка D — инцентр I треугольника ABC, а значит, D — середина PQ $(AP = AQ)$.

Для доказательства третим способом нам понадобится теорема Паскаля.

Теорема Паскаля. Если шестиугольник $ABCDEF$ вписан в окружность и противоположные его стороны (AB и DE, BC и EF, CD и FA) не параллельны, то точки пересечения продолжений этих сторон лежат на одной прямой (рис. 6).

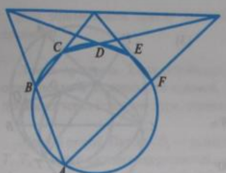

Рис. 6

Рис. 7

Третий способ
(применение теоремы Паскаля и леммы Архимеда)

По лемме Архимеда прямая PT пересекает дугу AC в ее середине — точке W_2 (рис. 7).

Аналогично, прямая TQ пересекает дугу AB в точке W_3. Пересечение прямых BW_2 и CW_3 — есть инцентр I треугольника ABC.

Докажем, что он принадлежит отрезку PQ.

Рассмотрим шестиугольник TCW_2AW_3B. Точки пересечения его противоположных сторон (P, I, Q) принадлежат одной прямой PQ.

Четвертый способ доказательства при помощи теоремы Кэзи рекомендуем найти самостоятельно.

Думаю, что этим не ограничивается применение знаменитых теорем к доказательствам предложенной задачи. Время покажет!

96. Право автора

Этим правом я и воспользовался, чтобы без всякой аргументации выбрать задачу.

Задача. Отрезки MN, EF и KL, параллельные сторонам треугольника ABC и пересекающие его стороны (рис. 1), обозначим a_1, b_1, c_1. Доказать соотношение

$$\frac{a_1}{a} + \frac{b_1}{b} + \frac{c_1}{c} = 2.$$

Первый способ

Пусть $CE = k$, $EK = m$, $BK = n$. Тогда $MX = k$, $NX = n$, т. е. $a_1 = k + n$. Из подобия треугольников BEF и BCA имеем:

$$\frac{b_1}{b} = \frac{m+n}{a}.$$

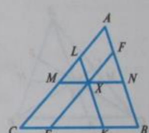

Рис. 1

Аналогично,

$$\frac{c_1}{c} = \frac{k+m}{a}.$$

Следовательно, имеем:

$$\frac{a_1}{a} + \frac{b_1}{b} + \frac{c_1}{c} = \frac{k+n}{a} + \frac{m+n}{a} + \frac{k+m}{a} = \frac{2(k+m+n)}{a} = 2.$$

Второй способ

Пусть S_1, S_2, S_3 — площади треугольников XEK, XLM, XFN, соответственно (рис. 1). Справедливо равенство (докажите!):

$$S_{AMN} = \left(\sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}\right)^2.$$

Значит,

$$\frac{MN}{a} = \frac{\sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}}{\sqrt{S}}.$$

Аналогично,

$$\frac{EF}{b}=\frac{\sqrt{S_1}+\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}};$$

$$\frac{LK}{c}=\frac{\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}}.$$

Учитывая, что $\sqrt{S}=\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}$, имеем:

$$\frac{a_1}{a}+\frac{b_1}{b}+\frac{c_1}{c}=\frac{2\left(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}\right)}{\sqrt{S}}=2.$$

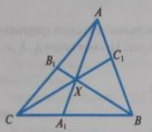

Рис. 2

Третий способ
(теорема Жергона)

Пусть три отрезка AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке X (рис. 2). Имеет место соотношение (теорема Жергона):

$$\frac{AX}{AA_1}+\frac{BX}{BB_1}+\frac{CX}{CC_1}=2.$$

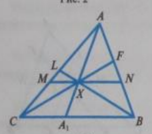

Рис. 3

В нашем случае (рис. 3):

$$\frac{MN}{BC}=\frac{AX}{AA_1}.$$

Значит,

$$\frac{a_1}{a}+\frac{b_1}{b}+\frac{c_1}{c}=\frac{AX}{AA_1}+\frac{BX}{BB_1}+\frac{CX}{CC_1}=2.$$

Думаю, что связь теоремы Жергона и поставленной задачи и есть главная аргументация. Согласны?

Содержание

Кушнир, Исаак

К 96 Альтернативные способы решения задач (Геометрия). — К.: Факт, 2006. — 368 с.

ISBN 966-359-124-2

Желание решить задачу многими способами является далеко не праздным. И те, кто искренне заинтересованы в изучении математики и ее преподавании, наверняка убедились не только в эффективности, но и в эстетической привлекательности поисков второго способа решения. Сделать такой поиск не случайным явлением, а регулярным — цель этой книги.

УДК 514(075.3)
ББК 22.15я722

Научно-методическое издание

Исаак КУШНИР

АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ (ГЕОМЕТРИЯ)

Редактор *Леонид Финкельштейн*
Технический редактор *Оксана Кравцова*
Корректор *Инна Киселева*
Макетирование обложки *Иннокентия Вырового*
Верстка и макетирование *Дмитрия Финкельштейна*

Сдано в производство 17.05.2006. Подписано в печать 17.10.2006. Формат 60×100 1/16. Бумага офсетная № 1. Гарнитура «Ньютон». Печать офсетная. Усл. печ. л. 25,6. Уч.-изд. л. 21,58. Тираж 1000 экз. Зак. № 6-1744

ООО «Издательство „Факт"»
04080, Украина, Киев-80, а/я 76
Регистрационное свидетельство
ДК № 1284 от 19.03.2003
Тел./факс: (044) 287 1882, 287 1886
E-mail: office@fact.kiev.ua
Отдел сбыта: (044) 463 6887
E-mail: sbyt@fact.kiev.ua
www.fact.kiev.ua

Отпечатано с готовых форм на ЗАО «ВИПОЛ»
03151, Киев, ул. Волынская, 60
Свидетельство о внесении в Государственный реестр
серия ДК № 752 от 27.12.2001